

El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo

Teresa Rojano

Resumen: Se plantea una prospectiva de investigación futura, a partir de un recuento de los resultados de estudios empíricos y teóricos sobre entornos tecnológicos de aprendizaje en matemáticas, llevados a cabo a lo largo de tres décadas. También se analizan los factores favorables y los obstrutores potenciales para la implementación de un currículo de matemáticas que incorpore a las tecnologías digitales como agentes de cambio, tanto a nivel de contenidos como de prácticas de aula. El artículo se enfoca sobre todo en el uso de la tecnología en la educación básica y media, y se intenta dar una visión panorámica internacional (sin pretender que ésta sea exhaustiva).

Palabras clave: tecnologías digitales y educación matemática, análisis retrospectivo, visión prospectiva, literatura especializada internacional.

Abstract: A prospective for future research is outlined on the basis of a brief revision of the outcomes from empirical and theoretical studies on the use of technology learning environments in mathematics, that have been undertaken for three decades. At the same time, propitious factors as well as potential obstrutors for a productive implementation of a mathematics curriculum that incorporates digital technologies as agents of change are analyzed. The article focuses on the use of technology in the elementary and middle and junior secondary school, but at the same time it intends to provide an international (albeit not exhaustive) overview.

Keywords: digital technologies and mathematics education, retrospective analysis, prospective vision, international specialized literature.

INTRODUCCIÓN

En su conferencia plenaria de 2010, en el congreso del 17th ICMI Study, “Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain”, Seymour Papert señaló que si bien ha sido importante investigar cómo el conocimiento existente puede ser aprendido (y enseñado) en entornos tecnológicos, pedía a la audiencia del congreso que dedicáramos un 10% de nuestras reflexiones durante la reunión a considerar qué nuevos tipos de prácticas y qué nuevos conocimientos matemáticos podrían emerger

Fecha de recepción: 31 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 23 de diciembre de 2013.

como resultado del acceso a un uso efectivo de las tecnologías digitales. Siguiendo el espíritu de la sugerencia de Papert, en este artículo expongo una prospectiva sobre cómo la evolución tecnológica, junto con la experiencia acumulada de 30 años de investigación intensiva sobre su uso en la educación matemática, puede llegar en el futuro a influir no sólo en el currículo oficial sino en el currículo implementado y en las prácticas de enseñanza dentro y fuera del aula de matemáticas. Para ello, recorro a varias fuentes, entre otras, al libro que fue el resultado de la reunión del 17th ICMI Study que he mencionado (Hoyles y Lagrange, 2010), a la entrada “Technology and curricula in mathematics education” de la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Lerman, 2012) y al libro *Improving Classroom Learning with ICT*, en el que se sintetizan las experiencias y los resultados del proyecto InterActive Education (Sutherland, Robertson y John, 2009) llevado a cabo por investigadores de la Universidad de Bristol, Inglaterra.

Más allá de la posibilidad que ofrecen los entornos tecnológicos de aprendizaje de un acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas, las potencialidades didácticas probadas de dichos entornos (tanto de naturaleza cognitiva como epistemológica) hicieron suponer que su influencia podría llegar a moldear un currículo de matemáticas completamente nuevo, así como a revolucionar las prácticas de aula. Sin embargo, esta posibilidad ha sido seriamente cuestionada a partir de los resultados de evaluaciones internacionales recientes y de estudios sobre el uso real de la tecnología por parte de los maestros, lo cual ha dado lugar a intensos debates en la comunidad internacional de matemáticos y educadores matemáticos. Aquí me referiré a dos posturas extremas que surgieron en medio de tales debates y a cómo esas posturas evolucionaron hacia una gama de perspectivas sobre el uso de las tecnologías computacionales en la educación matemática.

PROGRAMACIÓN, IDEAS MATEMÁTICAS Y EL CURRÍCULO

Los inicios de la presencia de la tecnología computacional en la educación pueden ubicarse en la década de 1970, cuando la programación computacional se empezó a enseñar en las escuelas. Los contenidos de los cursos estaban desligados del currículo de matemáticas, a pesar de que la programación está fuertemente relacionada con las ideas de variable y de algoritmo (Sutherland y Rojano, 2012). Por esa misma época, Papert y sus colegas desarrollaron el lenguaje de programación Logo, cuya principal característica es la de una tortuga en la pantalla que puede ser controlada por comandos de programación. Los estudios empíricos realizados en la década de 1980 revelaron el poder de este ambiente de programación para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos específicos. En particular, se evidenció que mediante el trabajo con Logo era posible que estudiantes muy jóvenes exploraran ideas matemáticas, como las ideas de variable, variación funcional, razón y proporción, procesos recursivos, generalización matemática y su simbolización (Hoyles y Noss, 1992; Hoyles y Sutherland, 1992). Debido

a estos resultados y a la introducción de actividades con Logo en algunas escuelas (principalmente del Reino Unido), emergen distintas perspectivas y posicionamientos sobre la relación entre el uso de la tecnología computacional y el currículo de matemáticas.

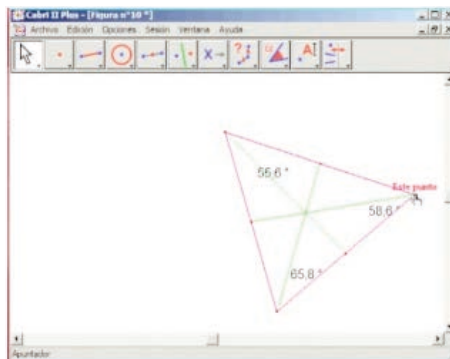
Como se puede notar, algunos de los tópicos que podrían introducirse en la escuela primaria utilizando Logo desbordan los límites del grupo de temas clásicos del currículo de ese nivel escolar. De ahí que desde esos años se iniciara una discusión (que continúa hoy en día) sobre la posibilidad de que el uso de las tecnologías computacionales influya en cambios de fondo del programa oficial. Por ejemplo, en vista de los resultados de los trabajos experimentales con Logo, ideas matemáticas poderosas como la generalización y la recursividad bien podrían tener cabida en el currículo de la escuela elemental. Sin embargo, después de tres décadas de debate persiste la interrogante de cómo lograr la articulación de tales temas con temas curriculares bien establecidos. Esta inquietud proviene no sólo del ámbito de los diseñadores y desarrolladores del currículo, sino también y principalmente de quienes pondrían en práctica el uso de tales tecnologías en el aula, es decir, de los maestros.

TECNOLOGÍA Y CURRÍCULO, DOS TENDENCIAS

Por otra parte, entre las décadas de 1980 y 1990, para algunos diseñadores y desarrolladores de *software* para la enseñanza de las matemáticas, se planteó la disyuntiva de hacer desarrollos para apoyar al currículo oficial o hacer desarrollos para traspasar los límites institucionales tradicionales de la educación matemática. Así, en este terreno y de entonces a la fecha, pueden distinguirse dos tendencias: la del uso de la tecnología ajustada al currículo y la del uso de la tecnología como un medio de cambio.

Respecto a la primera de estas dos tendencias, destacan los programas de geometría dinámica (GD), como Cabri-Géometre y Geometer Sketchpad, desarrollados en un inicio para apoyar la enseñanza de la geometría euclidiana en distintos niveles escolares. De acuerdo a la descripción de Jones, Mackrell y Stevenson (2010), en un ambiente de GD el usuario puede ‘asir’ con el *mouse* un elemento de una figura en la pantalla y arrastrarlo, y conforme estos arrastres tienen lugar, la figura o diagrama cambia de tal manera que las relaciones geométricas especificadas (o implicadas) en su construcción se mantienen (Ibíd., p. 50). Esta característica hace de la GD una herramienta didáctica muy poderosa, en vista de que a través de la construcción de figuras en la pantalla y del arrastre de los elementos en la figura, el usuario tiene un acceso exploratorio y experimental al mundo de la geometría. Así, propiedades como “la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ” o el teorema “las medianas en un triángulo cualquiera son concurrentes” pueden descubrirse o comprobarse mediante exploraciones ‘por construcción y arrastre’ (figura 1). Puede entonces decirse que en

Figura 1 Trazo de las medianas en un triángulo con Cabri Géometre. Colocando el cursor en uno de los vértices, 'por arrastre' se puede deformar el triángulo y confirmar la concurrencia de las medianas en todos los triángulos así generados



este caso las tecnologías digitales son creadas para servir a propósitos de un currículo clásico. Es decir, la innovación no reside en el contenido matemático que se intenta enseñar, sino en la forma de acercar al estudiante a contenidos establecidos en el programa de matemáticas oficial.

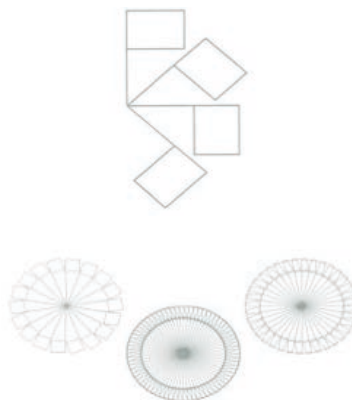
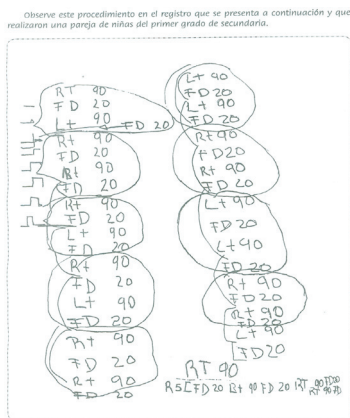
Por otra parte, respecto a la segunda tendencia, el programa Logo constituye el ejemplo por excelencia de que la tecnología no sólo puede cambiar la forma de enseñar y aprender matemáticas, sino que puede trastocar los contenidos del currículo mismo. En el diseño de las actividades preparadas para los trabajos experimentales con Logo puede advertirse esta tendencia a usar la tecnología como un medio para transformar la matemática escolar (y por ende, el currículo; véase figura 2).

Hacia la década de 1990, estas dos tendencias tan marcadas en un tiempo evolucionaron hacia una gama amplia de perspectivas sobre la relación entre la tecnología y el currículo. Lo anterior tuvo lugar a raíz de los desarrollos posteriores a Logo y a los programas de GB y, sobre todo, a partir de los resultados del uso de los nuevos desarrollos en investigaciones empíricas con estudiantes.

EL AUGE DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE TD EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

A inicios de la década de 1990, había ya una variedad amplia de tecnologías digitales (TD) accesibles para ser usadas en la escuela, incluidas las hojas electrónicas de cálculo, los graficadores y los sistemas computacionales de álgebra (CAS, por sus siglas en inglés), entre otras. Con la creciente presencia de herramientas para la enseñanza de las matemáticas, se incrementaron a su vez las investigaciones que ponían a prueba su uso

Figura 2 Actividad de generalización con Logo. El programa escrito por estudiantes de secundaria genera la figura de las ‘banderas’ y gracias a la función recursiva del mismo se generan las figuras ‘circulares’



por parte de los estudiantes. Dichas investigaciones coincidieron en sus conclusiones en que los entornos tecnológicos poseen una gran potencialidad para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010), la cual se traduce en:

- Un impacto en el nivel epistemológico.
- La posibilidad de un acercamiento experimental y práctico al aprendizaje de la geometría.
- La factibilidad de una iniciación temprana al aprendizaje del álgebra y al estudio de la matemática de la variación.
- Una aproximación a la enseñanza de las matemáticas vía la modelación de fenómenos del mundo físico.
- El logro de la transversalidad en la enseñanza de distintas materias de estudio.
- La emergencia de nuevas prácticas de aula.
- La posibilidad de la inclusión de nuevos temas en el currículo de matemáticas de distintos niveles escolares (por ejemplo, recursividad, generalización y matemática del cambio en la educación básica, y geometría tridimensional y estadística inferencial en la educación pre-universitaria y universitaria, manipulando datos auténticos).

En este escenario rico en innovaciones y trabajo experimental, se diversifica el papel de las TD en la educación matemática, por una parte, continuando con el desarrollo de programas ajustados a propósitos curriculares, como Autograph y Fathom, utilizados en la enseñanza de la estadística (figura 3) y, por otra, desarrollando programas para hacer accesibles las matemáticas a nuevos grupos de estudiantes, como SimCalc, diseñado

Figura 3 Distribución de promedios de muestras de una población geométrica modelada con Fathom

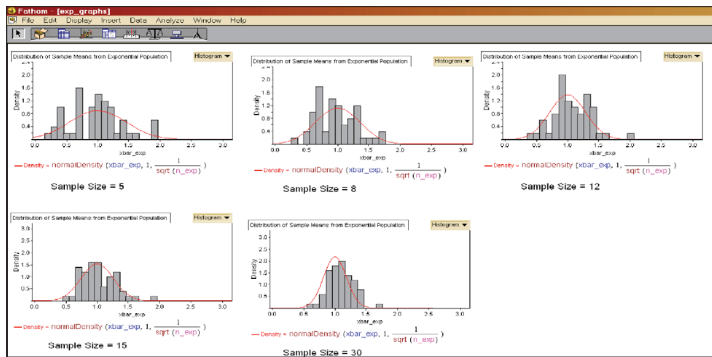
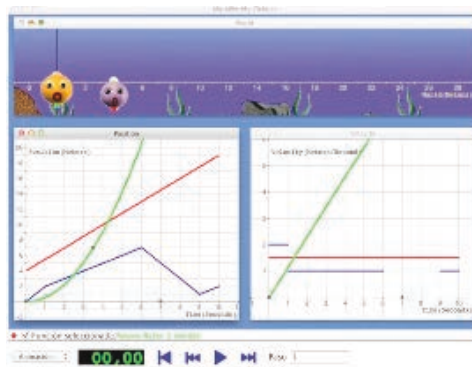


Figura 4 Pantalla de SimCalc. En el lado izquierdo se despliegan las gráficas de posición conforme se desplazan los personajes del simulador (parte superior), y del lado derecho se despliegan simultáneamente las gráficas de velocidad correspondientes.



para democratizar la enseñanza del cálculo (Kapur, 1994) (figura 4), o haciendo adaptaciones de tecnologías que no fueron diseñadas con fines educativos, como las hojas de cálculo, utilizadas para la enseñanza de la modelación, la resolución de problemas de varias variables, la generalización y las funciones (Sutherland y Rojano, 1993; Molyneux et ál, 1999) (figura 5).

Figura 5 Hoja de trabajo sobre la resolución de un problema de varias variables con Excel (Proyecto EMAT, SEP-Cinvestav)

Problema del Teatro

En una función de una obra de teatro, los boletos de adulto costaban \$120 pesos y los de niño costaban \$80 pesos. Se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron si se recaudaron \$30,000 pesos en total?

Usa tu Hoja de Cálculo para resolver este problema.

	A	B	C	D	E
1	No. de boletos de adulto	No. de boletos de niño	Costo boletos de adulto	Costo boletos de niño	Costo total de boletos
2					
3					
4					
5					

Supongamos que van 10 adultos al teatro; entra el número 10

$=A2 + 100$

$=A2 * 120$

$=B2 * 80$

$=C2 + D2$

¿Cuánto se recauda si van 10 adultos al teatro?

Cambia el número en la celda A2 (número de boletos de adulto) hasta que en la celda E2 obtengas 30,000.

Encontrarás que se vendieron 110 boletos de adulto.

¿Cuántos boletos de niño se vendieron?

A esa diversificación de roles de las TD la acompañan más estudios empíricos, pero también se plantea en la comunidad de investigadores de la educación matemática la necesidad de profundizar en las teorizaciones formuladas hasta ese momento (finales de la década de 1990 y principios de la década de 2000). A continuación describo brevemente las perspectivas teóricas que se han consolidado a partir de una preocupación por dar explicaciones plausibles a fenómenos que surgen en nuevos estudios y por delinear pautas para el uso efectivo de las tecnologías en el salón de clases.

LOS AÑOS DOS MIL

NUEVOS RESULTADOS-NUEVAS TEORIZACIONES

Adicionalmente a las potencialidades didácticas de las *td* evidenciadas por los estudios de la década de 1990, investigaciones más recientes revelan otro tipo de resultados, los cuales señalan serios obstáculos para el uso de dichas tecnologías en el aula, es decir, para su uso en un ambiente distinto al de las situaciones creadas para los estudios experimentales, ecológicamente protegidas y con variables determinantes controladas (Artigue, 2007b). Por ejemplo, algunas de esas investigaciones reportan que independientemente de la intención de los desarrolladores, los estudiantes pueden utilizar las tecnologías diseñadas para el aprendizaje de las matemáticas con propósitos no-matemáticos. Éste es el caso de los estudiantes que utilizan el *software* de *GD* para hacer dibujos en la pantalla, en lugar de construir objetos matemáticos con propiedades geométricas. O bien, en un contexto más amplio que el de la educación matemática, está el caso reportado por Sutherland, Robertson y John (2009) quienes, en un experimento en el que estudiantes de primaria trabajaban con un *software* de simulación de la ecología marina, encontraron que los niños trataban al simulador como un juego de computadora y terminaron embarcándose en un proceso de ‘ganar’ (Ibíd., p. 32). El simulador Fishtank utilizado en el experimento fue diseñado bajo principios construccionistas,¹ para que los usuarios diseñaran (y no sólo observaran) el comportamiento de los peces, pero claramente en el experimento referido surgió una discrepancia entre la intencionalidad del *software* y su utilización por los usuarios reales; es decir, en este caso, como en el ejemplo del uso del *software* de *GD* como herramienta de dibujo, surge un uso idiosincrásico de la tecnología. Este tipo de experiencias condujo al grupo de investigadores a concluir que, para lograr un uso efectivo de las *TD* en la educación, es necesario tender puentes entre los aprendizajes incidental, idiosincrásico e intencional (Ibíd., pp. 32-33).

Otro tipo de discrepancia que puede obstruir una implementación adecuada del uso de *TD* en el salón de clase es cuando dicha implementación se centra en el profesor y no en las estrategias pedagógicas sugeridas en los documentos curriculares modernos, las cuales deben ser centradas en los alumnos, con acercamientos exploratorios y experimentales.

Por otra parte y en este mismo orden de cosas, se han reportado evidencias de que los profesores no están explotando la potencialidad de las *TD* para el aprendizaje de las matemáticas, a pesar de lo que se especifica al respecto en los documentos oficiales (estándares, currículo) y a pesar de la evidencia acumulada a lo largo de tres décadas de investigación en el campo (Assude, Buteau y Forgasz, 2010).

¹ De acuerdo con la teoría del construccionismo, el individuo aprende construyendo modelos mentales para entender el mundo que lo rodea y sostiene que el aprendizaje tiene lugar de manera más efectiva cuando los individuos son activos construyendo objetos tangibles en el mundo real (Papert, 1980; Harel y Papert, 1991; Noss y Hoyles, 1996).

Ante el panorama que presentan resultados como los anteriores, en el nuevo milenio se plantea la necesidad de profundizar en teorizaciones que conduzcan a la elaboración de marcos para el desarrollo de prácticas en el aula de matemáticas que exploten la potencialidad de la tecnología. Es decir, las nuevas tendencias teóricas están marcadas por su intención de acercar la investigación a la práctica. Con esta característica, actualmente pueden identificarse de manera general las siguientes perspectivas teóricas:

- **Teoría de la génesis instrumental**, que distingue entre la tecnología (artefacto) y el instrumento. En esta teoría, el artefacto es considerado el dispositivo o programa tecnológico que permite resolver tareas o realizar actividades para el aprendizaje, y el instrumento es una construcción mental del sujeto cuando se apropia del artefacto para resolver tareas y abordar situaciones de aprendizaje que se le presentan. En este sentido, la teoría también separa la intención del diseñador de lo que el usuario construye en su contexto de uso (Artigue, 2007a).²
- **Teoría de la mediación semiótica en la clase de matemáticas**, que sugiere pautas para las prácticas del profesor de matemáticas, basadas en el rol de los sistemas de signos en la mediación entre el maestro, la tecnología y los alumnos (Bartolini Bussi y Mariotti, 2008).
- **Teoría del construccionismo**, que se basa en el principio constructivista de que el individuo aprende construyendo modelos mentales para entender el mundo que lo rodea y sostiene que el aprendizaje tiene lugar de manera más efectiva cuando los individuos son activos construyendo objetos tangibles en el mundo real (Papert, 1980; Harel y Papert, 1991). De acuerdo a esta teoría, dicha construcción de objetos mentales tiene lugar en los llamados micromundos, en los que los sujetos, por ejemplo, pueden percibir los invariantes en una actividad específica, los cuales contienen el germen de la generalidad que podrán identificar en otros contextos (noción de abstracción situada: Noss y Hoyles, 1996).

Pero no sólo en el terreno teórico se hacen formulaciones que atienden la necesidad de delinear pautas para la transformación de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la ciencia a través de la tecnología, sino que también la evolución tecnológica se ha convertido en un factor de cambio y se observa entre los desarrolladores una tendencia al diseño de herramientas para la transformación de esas prácticas. En el siguiente apartado se incluyen ejemplos de desarrollos que llevan una intencionalidad transformadora desde su concepción.

² Esta perspectiva general acerca de la relación usuario-artefacto-instrumento ha dado lugar a nuevas formulaciones teóricas, algunas de las cuales incorporan elementos de la teoría antropológica de la didáctica de Yves Chevallard (1999) o variables institucionales, como la disponibilidad tecnológica en la escuela o el involucramiento de las autoridades educativas (Drijvers y Trouche, 2008).

EVOLUCIÓN TECNOLÓGICA

La experiencia de introducir la tecnología a la escuela ha dado pie a una multiplicidad de modelos de uso, los cuales en muchos casos se han acompasado con las innovaciones tecnológicas. Por ejemplo, el uso de calculadoras y computadoras personales en el salón de clases se ha complementado con el uso del pizarrón electrónico. De este modo, se puede combinar el trabajo individual o por equipos pequeños con el despliegue en pantalla grande de las producciones de los alumnos, creándose condiciones propicias para discusiones grupales, contrastación de soluciones, puestas en común, institucionalización del saber (Trouche, 2004), entre otras prácticas de construcción social del conocimiento. En la década pasada se implementaron proyectos gubernamentales con estas características en varias partes del mundo. En México se desarrollaron materiales interactivos apegados a los libros de texto gratuito de primaria para su despliegue y manipulación en pizarrones interactivos (Trigueros et ál., 2006) y en el Reino Unido se introdujo el uso masivo de esos pizarrones en las aulas de la enseñanza obligatoria (Kennewell, 2009). A pesar de que ambas experiencias no reportan resultados muy optimistas respecto al uso de dicha tecnología, puede decirse que con los modelos de uso a que ésta da lugar, se puede dar por terminada la dicotomía tan marcada, en la década de 1980, de las tecnologías diseñadas para un uso personal y privado (como las calculadoras gráficas), por un lado, y las tecnologías en las que se hace público el trabajo personal (como las computadoras personales), por el otro.

También, en relación a la transformación de prácticas, innovaciones tecnológicas más recientes están cambiando las condiciones para el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, el acceso en dispositivos móviles (a través de la red) a aplicaciones nuevas (*Apps* para tabletas) y a materiales interactivos desarrollados en décadas anteriores (como por ejemplo, GD, hojas de cálculo, CAS) puede alentar modelos más flexibles del uso de la tecnología, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje. En este punto hago la distinción entre enseñanza y aprendizaje, en razón de que la posibilidad de trabajo individual en dichos dispositivos, con aplicaciones diseñadas para el autoestudio, pone en el centro al aprendiz y la tecnología funciona como un medio para el aprendizaje autónomo y el llamado aprendizaje para la vida (*life-long learning*). En estos desarrollos se disminuye el énfasis en la enseñanza. Por ejemplo, las aplicaciones *i-factor* y *i-factor pro* para iPads están diseñadas para la factorización de expresiones cuadráticas y para la resolución de ecuaciones de segundo grado, respectivamente, y pueden utilizarse para verificar los resultados de tareas previamente realizadas por el estudiante con álgebra de papel y lápiz, apoyándolo así en el desarrollo de habilidades de álgebra manipulativa. Este tipo de *Apps* tiene la característica de que se le presentan al usuario, de manera automatizada, familias de problemas o ejercicios algebraicos que incluyen variantes en la estructura de las expresiones y en el dominio numérico de coeficientes y soluciones de las ecuaciones.

Por otra parte, se han desarrollado *Apps* para tabletas en las que los usuarios

Figura 6 Manipulación directa de una figura geométrica en pantalla *touch screen* de tableta digital (imagen video James Kaput Center, UMASS, www.kaputcenter.umassd.edu, virneo.com/40085636)

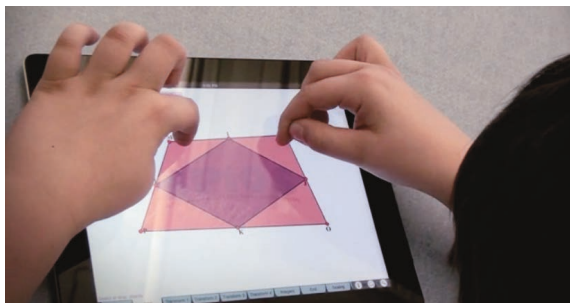
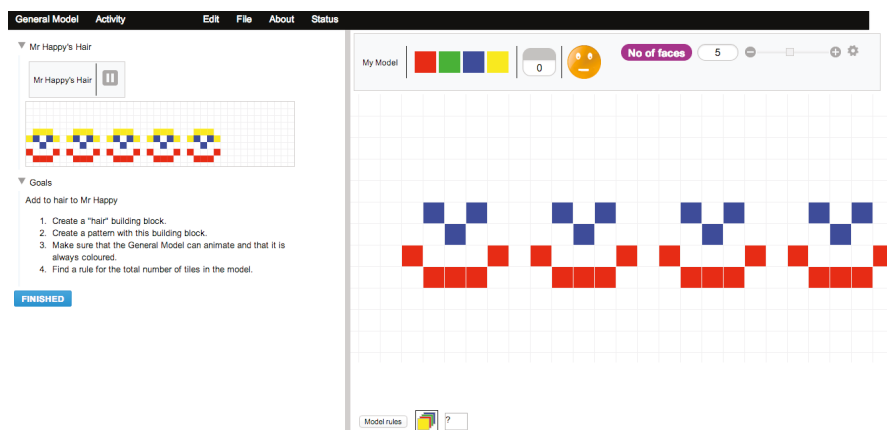


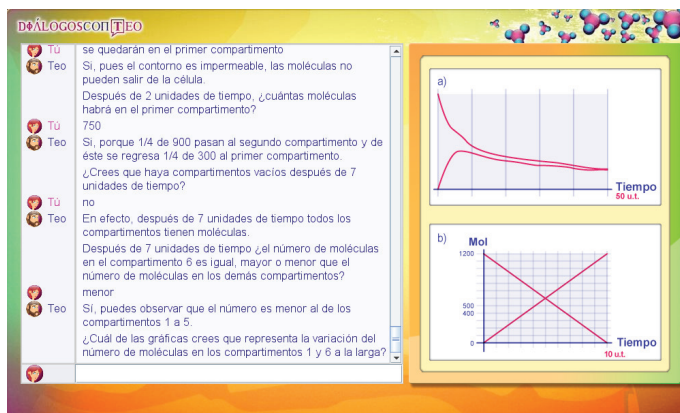
Figura 7 Pantalla de eXpresser. Del lado izquierdo aparece la ventana del mundo general, y del derecho, la ventana de 'mi mundo'. La retroalimentación del soporte inteligente aparece en la parte superior derecha



prácticamente 'tocan' y manipulan los objetos geométricos, sin la mediación del *mouse* o del teclado. Este tipo de interacción tan directa con el objeto de conocimiento hace suponer que el trabajo con estos materiales tendrá repercusiones en el nivel cognitivo y epistemológico, es decir, en la forma en que los estudiantes construyen el conocimiento matemático (figura 6).

Otras innovaciones incluyen un sistema de soporte inteligente que proporciona retroalimentación al usuario cuando trabaja en un entorno tecnológico de aprendizaje (o micromundo). Tal es el caso del programa eXpresser, desarrollado en el London

Figura 8 Pantalla del modelo de difusión molecular en Diálogos Inteligentes. Del lado derecho aparece la ventana del micromundo (gráficas con parámetros manipulables) y del lado izquierdo, aparece la ventana de diálogo



Knowledge Lab (www.lkl.ac.uk), en el cual los estudiantes trabajan en un micromundo para el aprendizaje de la generalización a partir de construir y analizar patrones en secuencias figurativas (figura 7). Durante la realización de una tarea, el sistema plantea al usuario preguntas o hace sugerencias en momentos considerados por los diseñadores de la actividad como 'oportunidades de aprendizaje' (Noss et ál., 2009).

Por su parte, en las unidades interactivas *diálogos inteligentes*, desarrolladas en colaboración por el Laboratorio de Innovación Tecnológica y Educativa (LITE) y el Instituto de Matemáticas de la UNAM, se despliegan en la pantalla, de manera simultánea, una ventana de micromundo y una ventana de *chat*, dinámicamente vinculadas entre sí. Así, el sistema entabla un diálogo con los usuarios mientras éstos trabajan en el micromundo. En este caso, la interacción es con los dos sistemas, y una acción del estudiante en el micromundo puede dar lugar a una pregunta o sugerencia por parte del sistema, en la ventana de *chat*. A su vez, las respuestas por parte del usuario en esta ventana pueden recibir retroalimentación en ambas ventanas. Del mismo modo que en eXpresser, en el diseño de las unidades interactivas de *diálogos inteligentes* también se identifican previamente momentos críticos de retroalimentación. Cuando el contenido de las unidades incluye actividades de modelación parametrizada en ciencias, dichos momentos corresponden a momentos de predicción del comportamiento de un fenómeno, de confirmación de una conjetura o de validación del modelo (figura 8).

Cabe mencionar que en los dos ejemplos anteriores, las interacciones entre el usuario y el entorno tecnológico son de naturaleza compleja y distan mucho del tipo de aplicaciones que en la década de 1980 solían desarrollarse con sistemas de inteli-

gencia artificial y que dieron lugar a los llamados tutoriales, cuyo diseño se basaba en modelos de enseñanza programada (Rojano y Abreu, 2012). De hecho, esa complejidad en la interacción está relacionada con la intencionalidad del diseño didáctico, pues, en ambos casos, el soporte inteligente está pensado como un recurso de retroalimentación oportuna, puntual, específica y personalizada, como un complemento a la retroalimentación del maestro o de los compañeros de clase. Es decir, haciendo referencia a lo que se mencionó en una sección anterior, este par de herramientas llevan en su diseño la intención de ayudar a transformar las prácticas de aula, en lo que a las posibilidades de retroalimentación focalizada se refiere.

La emergencia de modos de uso novedosos, a raíz de la evolución tecnológica, hace necesaria la investigación correspondiente a partir de la cual se verifiquen las hipótesis de trabajo de los nuevos diseños, tanto de artefactos como de *Apps* y de *software* especializado. En otras palabras, el futuro del uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debiera no sólo depender de la evolución tecnológica, sino también de los resultados de investigaciones que hagan transparentes, para maestros y diseñadores del currículo, las potencialidades y las limitaciones de esas innovaciones.

EVOLUCIÓN TECNOLÓGICA Y EL FUTURO DEL CURRÍCULO, DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA INVESTIGACIÓN

LAS INNOVACIONES TECNOLÓGICAS COMO FACTOR DE CAMBIO

A pesar de los resultados desalentadores de las investigaciones de inicios del milenio respecto al poco o nulo impacto tecnológico en las prácticas docentes, el *boom* de las innovaciones tecnológicas de los años recientes y la enorme diseminación de su uso en la sociedad en general han revivido el interés por la integración de la tecnología a la educación. Dicho interés ha resurgido con fuerza al interior de las comunidades de investigadores, maestros, autoridades educativas, padres de familia y diseñadores y desarrolladores de currículo, y en el caso particular de la educación matemática, algunos de los nuevos desarrollos se han convertido en factores potenciales de cambio en la concepción de la enseñanza de esta disciplina. A continuación hago un breve recuento de algunos de esos factores.

Los desarrollos recientes de la *GD* de tres dimensiones (3D) permiten a los estudiantes obtener visualmente información sobre figuras tridimensionales. De este modo, temas de geometría espacial que tradicionalmente estaban reservados para el currículo universitario y que requerían del análisis de las expresiones analíticas de las figuras o del dominio de propiedades y teoremas de matemática avanzada, ahora pueden ser abordados por estudiantes de bachillerato (figura 9).

A partir de las investigaciones realizadas en ambientes de *CAS*, se ha encontrado

Figura 9 Figura geométrica de Cabri-3D

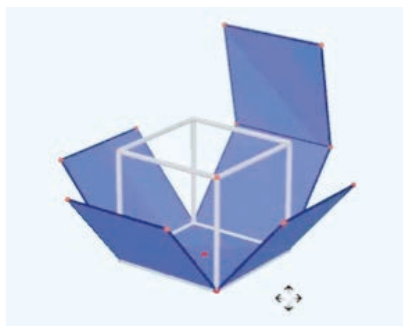
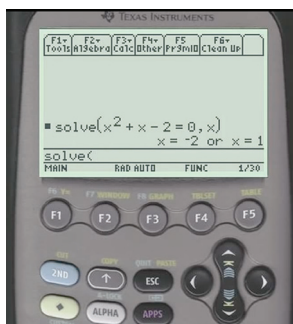


Figura 10 Pantalla de calculadora con CAS



que es posible reducir el énfasis en los aspectos manipulativos del álgebra y enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales (Kieran, 2007), o bien promover tanto aspectos conceptuales como técnicos de la matemática (figura 10) (Artigue, 2002; Lagrange, 2003).

- Las nuevas versiones de algunos programas especializados corren en tabletas digitales y los estudiantes pueden físicamente tocar y manipular representaciones de objetos matemáticos, lo cual permite una interacción directa entre el sujeto y el objeto de conocimiento (véase figura 6).
- Versiones recientes de las hojas de cálculo ofrecen un ambiente amigable para actividades de modelación matemática que involucran representaciones matemáticas múltiples y simuladores de fenómenos del mundo físico.
- La versión libre (*open source*) de GD GeoGebra favorece la conexión entre geometría euclidiana, geometría cartesiana y geometría analítica.

- La incorporación de soportes inteligentes en los entornos tecnológicos de aprendizaje permite una retroalimentación oportuna y focalizada en las acciones del usuario.
- La conectividad vía Internet puede influir en la forma en que las TD puedan ser integradas al currículo de matemáticas, tanto en términos de los materiales y contenidos educativos accesibles en la nube, como debido a que estudiantes y maestros pueden trabajar colaborativamente dentro de comunidades virtuales.
- La conectividad está cambiando la manera en que se diseñan las TD. Por ejemplo, GeoGebra se desarrolla colaborativamente como *software* libre dentro del movimiento '*open-source software*'.
- La forma en que la conectividad puede transformar las prácticas matemáticas en la escuela, particularmente si los estudiantes pueden usar las redes sociales para crear comunidades matemáticas de colaboración, da lugar a un área promisorio de investigación futura.
- Las posibilidades de uso de las TD para la evaluación del aprendizaje de las matemáticas abren un área nueva de investigación.
- La implementación a nivel nacional de modelos de uso de las TD para la enseñanza de las matemáticas, llevada a cabo en varios países, es un signo de aceptación más o menos amplia de la presencia de tales herramientas en el salón de clases. A diferencia de los estudios a pequeña escala centrados en el estudiante, los estudios a gran escala se enfocan en aspectos sistémicos que toman en cuenta cuestiones como la adopción de la tecnología por parte del maestro y la integración de la tecnología al currículo (Sinclair et ál., 2010, pp. 61-62).

Este breve recuento conduce de nuevo a interrogantes sobre la relación tecnología-curriculum de matemáticas, la cual resulta ser cambiante en el tiempo y de una región a otra.

LA RELACIÓN TECNOLOGÍA-CURRÍCULO NO ES ESTÁTICA

A pesar de que aún persiste la controversia sobre el impacto potencial de la tecnología en el curriculum de matemáticas, los estudios empíricos realizados en la última década, en los cuales se utilizó una gran variedad de *software* y aplicaciones, ya han influido de hecho en cambios curriculares a distintos niveles (Sutherland y Rojano, 2012):

- Al conectar diferentes áreas curriculares, en el mismo o en diferentes niveles escolares. Esta interconexión explota la posibilidad de trabajar con representaciones múltiples de conceptos o situaciones, vinculadas dinámicamente entre sí.
- Al permitir a los estudiantes acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas, como por ejemplo, la posibilidad de introducir el estudio de la matemática de la variación desde la enseñanza elemental.
- Por el hecho de proporcionar herramientas a los estudiantes para analizar gran-

des conjuntos de datos auténticos en los cursos de estadística del bachillerato y la universidad.

- Al incorporar nuevos temas al currículo, como por ejemplo, temas de geometría 3D.
- Con la eliminación de temas curriculares clásicos. Tal es el caso del Reino Unido, donde se removió buena parte del álgebra manipulativa en la década de 1990. En esa propuesta curricular, la resolución de ecuaciones y problemas se realiza por ensayo y refinamiento, con ayuda de la calculadora. Cabe mencionar que tiempo después y a raíz de los resultados reportados por investigaciones sobre didáctica del álgebra, las autoridades educativas se retractaron de esa decisión y hoy en día se observa una presencia importante de temas del álgebra simbólica de papel y lápiz en el currículo inglés (Sutherland, 2007).

Pero la relación tecnología-curriculo no sólo cambia en función de los avances en la investigación y en la innovación tecnológica, esta relación también cambia a lo largo del tiempo y de unos países a otros. Por ejemplo, en la URSS de la década de 1980, se consideraba a la informática como una 'Nueva Matemática' y se introdujeron metacontenidos como descubrimiento, colaboración, generalización, transferencia y matemáticas en distintas materias (Julie et ál., 2010).

Por otra parte, en varios países se ha introducido explícitamente al currículo de matemáticas el uso de programas como Logo, hojas de cálculo, CAS, GD y aplicaciones para la enseñanza de tópicos específicos. En algunos de esos países, la incorporación se ha hecho de manera obligatoria (como en Hong Kong, Francia y Rusia), mientras que en otros se ha hecho de manera opcional (como en Sudáfrica, México, Brasil y países centroamericanos) (Julie et ál., 2010).

Además de analizar la integración de las TD al currículo, es necesario profundizar en el estudio de la influencia real de la tecnología en el currículo implementado (o *enacted curriculum*). Si bien, esta problemática se ha atendido desde la perspectiva del papel del maestro en los procesos de implementación, y teóricamente se ha investigado a través de los procesos de instrumentación y orquestación en el aula, existen otros factores identificados en estudios sobre TD y educación en general. A este respecto, quiero referirme al proyecto interActive Education, en el que se identifican e investigan factores determinantes para una implementación productiva. Entre dichos factores están: la explotación de la tecnología disponible en la escuela; la relación entre el aprendizaje incidental, idiosincrásico e intencional a partir de la tecnología; la combinación compleja entre personas, cultura y tecnología en el salón de clases, y la conexión entre las culturas de uso de las TD en el hogar y en la escuela (Sutherland, Robertson y John, 2009). Uno de los desafíos para la investigación futura es poder traer este tipo de temas al campo de la educación matemática y abordarlos con las especificidades didácticas, históricas y epistemológicas propias de la materia de conocimiento (es decir, de las matemáticas).

AHORA Y EL FUTURO

De acuerdo al análisis que hace Artigue en su ponencia de la CIAEM de 2007 en México, el trabajo en entornos tecnológicos de aprendizaje que hoy en día podríamos considerar clásicos (como los programas de GB, las hojas de cálculo y los micromundos) tendrá que seguir buscando su camino hacia el aula de matemáticas (Artigue, 2007b). En vista de la desproporción tan grande entre el enorme cúmulo de evidencias sobre las potencialidades didácticas de esos entornos, reveladas durante 30 años de investigación intensiva, y su mínimo impacto en el currículo (oficial e implementado), habrá que reconocer que, en este caso, estamos ante el núcleo duro de la relación entre investigación y práctica. En ese escenario, quisiera hacer el pronóstico de que la realización de proyectos de implementación y de estudios longitudinales a gran escala (como por ejemplo, *Computer-Intensive Algebra*, Fey y Heid, 1991; *Visual Math*, Yerushalmy y Shternberg, 2001) ayudarán a tender puentes entre los mundos de la teoría, el currículo escrito y la práctica. Así lo han pronosticado también los autores del capítulo "Implementing digital technologies at a national scale", del 17th ICM Study (Sinclair et ál., 2010), quienes afirman que en futuras investigaciones de esta naturaleza podrían encontrarse nuevos ejes que, por ejemplo, relacionen la medida en que las TD están disponibles fuera de la escuela o la medida en la cual la implementación involucra el desarrollo de la actividad, la instrumentación de parte del docente, la instrumentación de parte de los padres de familia y el soporte de la infraestructura.

Por otra parte y siguiendo de nuevo las reflexiones de Artigue (2007b), se puede hacer el pronóstico de que el acceso a materiales y contenidos en la red tenderá a cambiar sustancialmente las prácticas de maestros y alumnos en relación a la matemática escolar, aun cuando ni maestros ni alumnos utilicen los entornos tecnológicos de aprendizaje. A este respecto, esta investigadora señala que, además de lo que revelan los estudios de Gueudet y Trouche (2010) sobre la multiplicidad de los recursos en línea, actualmente en Francia, el uso riguroso y efectivo de estos materiales para la enseñanza de las matemáticas es una de las competencias que les son requeridas oficialmente a los docentes. Lo anterior nos hace reflexionar sobre el impacto tecnológico en una dirección muy diferente a la que se pronosticaba antes de la masificación de la conectividad y de las formas de interacción social que *di facto* emergen por el uso cotidiano de la tecnología, lo cual, a su vez, obliga a concebir nuevas avenidas y nuevas temáticas para investigaciones futuras, que distan mucho de aquellas que por décadas han sido el foco de atención de los investigadores de la educación matemática. Puede decirse que ahora nos encontramos ante una inversión de roles entre la investigación y sus aplicaciones, pues las prácticas sociales del uso de las TD empiezan a marcar el rumbo de la investigación y no como hasta hace muy poco tiempo, cuando a partir de la investigación se inició un movimiento para introducir la tecnología en la escuela.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (2002), "Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 7, pp. 245-274.
- (2007a), "Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental", *Historia y perspectiva de la educación matemática. Memoria de la XII CIAEM*, Querétaro, pp. 9-21.
- (2007b), "L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique", ponencia presentada en XII CIAEM, Querétaro, México.
- Assude, T., C. Buteau y H. Forgasz (2010), "Factors influencing implementation of technology-rich mathematics curriculum and practices", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 405-419.
- Bartolini Bussi, M. y A. Mariotti (2008), "Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective", en L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 2a. ed., Nueva York, Routledge, pp. 746-783.
- Chevallard, Y. (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique" [The analysis of teaching practices in the anthropological theory of the didactic], *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, pp. 221-266.
- Drijvers, P., C. Kieran y M. Mariotti (2010), "Integrating technology into mathematics education", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 81-87.
- Drijvers, P. y L. Trouche (2008), "From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor", en M. K. Heid y G. W. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives*, vol. 2, Greenwich, Information Age Publishing, pp. 363-391.
- Fey, J. T. y M. K. Heid (con R. A. Good, C. Sheets, G. Blume y R. M. Zbiek) (1991/1999), *Concepts in Algebra: A Technological Approach*, Dedham, Janson (reimpreso en 1999, Chicago, Everyday Learning Corporation).
- Gueudet, G. y L. Trouche (eds.) (2010), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes.
- Harel, I. y S. Papert (eds.) (1991), *Constructionism*, Norwood, Ablex Publishing Corporation.
- Hoyles, C. y J.-B. Lagrange (eds.) (2010), *Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer.
- Hoyles, C. y R. Noss (1992), *Learning Mathematics and Logo*, Cambridge, MIT Press.
- Hoyles, C. y R. Sutherland (1992), *Logo Mathematics in the Classroom*, edición revisada, Londres, Routledge.
- Jones, K., K. Mackrell y I. Stevenson (2010), "Designing digital technologies and learning

- activities for different geometries", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 47-60.
- Julie, C., A. Leung, N. Chi Thanh, L. S. Posadas, A. I. Sacristán y A. Semenov (2010), "Some regional developments in access and implementation of digital technologies and ICT", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 361-383.
- Kennewell, S. (2009), "Reflections on the interactive whiteboard phenomenon: a synthesis of research from the UK", KEN06138: www.ore.org.pt/filesobservatorio/pdf/KENNEWELL.pdf
- Kaput, J. (1994), "Democratizing access to calculus: New routes using old roots", en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Hillsdale, Erlbaum.
- Kieran, C. (2007), "Research on the learning and teaching of school algebra at the middle, secondary, and college level: Building meaning for symbols and their manipulation", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Publishing, pp. 707-762.
- Lagrange, J.-B. (2003), "Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection", en J. T. Fey (ed.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*, Reston, NCTM, pp. 269-283.
- Lerman, S. (ed.) (2012), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Nueva York, Springer, [www.springerreference.com]
- Molyneux, S., T. Rojano, R. Sutherland y S. Ursini (1999), "Mathematical modelling: the interaction of culture and practice", *Educational Studies in Mathematics*, Special Issue Teaching and Learning Mathematics in Context, P. Boero (ed.), vol. 39, pp. 61-78.
- Noss, R. y C. Hoyles (1996), *Windows on Mathematical Meanings*, Dordrecht, Kluwer.
- Noss, R., C. Hoyles, M. Mavrikis, E. Geraniou, S. Gutierrez-Santos y D. Pearce (2009), "Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalization", en *Special Issue of ZDM – The International Journal on Mathematics Education: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies*, vol. 41, núm. 4, pp. 493-503.
- Papert, S. (1980), *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Nueva York, Basic Books.
- Rojano, T. y J.-L. Abreu (2012), "Dialogues with Prometheus: Intelligent support for teaching mathematics", en C. Kynigos, J.-E. Clayson y N. Yiannoutsou (eds.), *Proceedings of the Constructionism 2012 Conference*, Atenas, pp. 544-548.
- Sinclair, N., F. Arzarello, M. Trigueros y M. Lozano (2010), "Implementing digital technologies at a national scale", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 61-78.
- Sutherland, R. (2007), *Teaching for Learning Mathematics*, Maidenhead, Open University Press.

- Sutherland, R., S. Robertson y P. John (2009), *Improving Classroom Learning with ICT*, Londres y Nueva York, Routledge.
- Sutherland, R. y T. Rojano (1993), "A spreadsheet approach to solving algebra problems", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 12, pp. 353-383.
- (2012), "Technology and curricula in mathematics education", en S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Nueva York, Springer. [www.springer-reference.com]
- Trigueros, M., M. Lozano, I. Sandoval, A. Lage, E. Jinich, H. García y E. Tovilla (2006), "Developing resources for teaching and learning mathematics with digital technologies in Enciclomedia, a national project", en C. Hoyles, J.-B. Lagrange, L. H. Son y N. Sinclair (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*, Hanoi Institute of Technology y DIDIREM - Université Paris 7, pp. 556-563.
- Trouche, L. (2004), "Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 9, pp. 281-307.
- Yerushalmy, M. y B. Shternberg (2001), "Charting a visual course to the concept of function", en A. A. Cuoco y F. R. Curcio (eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, NCTM, pp. 251-268.

REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

Autograph: www.autograph-math.com

SimCalc: www.kaputcenter.umassd.edu/products/software

Diálogos Inteligentes: <http://arquimedes.matem.unam.mx/Dialogos/>

DATOS DE LA AUTORA

Teresa Rojano

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México

trojano@cinvestav.mx

www.teresarojano.net