CARACTERIZACIÓN DE LAS RELACIONES ENTRE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y ONTOLÓGICOS SOBRE EL CONCEPTO DE MEDIDA EN ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO.

HENRY EDILSON OSORIO GUTIERREZ

2017

UNIVERSIDAD DE CALDAS

DEPARTAMENTO DE EDUCACION

MAESTRIA EN EDUCACION

CARACTERIZACIÓN DE LAS RELACIONES ENTRE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y ONTOLÓGICOS SOBRE EL CONCEPTO DE MEDIDA EN ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO.

Presentado por

HENRY EDILSON OSORIO GUTIERREZ

Dirigido por

Mgr. ANDREA MILENA OSORIO CARDENAS

2017

A Daniel y Jerónimo

Le doy gracias a Dios porque ellos son y serán el apoyo moral e incondicional para mí, y que a pesar de todos los problemas y el dolor tan intenso por el que pasamos, nada ni nadie nos derrumbó y fuimos capaz de sortearlos con la frente en alto y el corazón erguido. Los amo demasiado mis hijos lindos.

Andrea Milena

Gracias por su apoyo incondicional, eres una persona admirable, inteligente y muy integra. Siempre te recordaré. Gracias….

TABLA DE CONTENIDO

Índice de tablas

Índice de gráficas

INTRODUCCION

El objetivo de esta investigación ha sido caracterizar las relaciones entre los obstáculos epistemológicos y ontológicos sobre el concepto de medida en estudiantes de grado décimo. En consecuencia, el efecto es identificar la naturaleza (o el origen) que se dan en los obstáculos y analizar las posibles relaciones que se presentan entre ellos.

El presente informe de investigación se estructura de la siguiente manera: En la primera parte encontramos cuatro componentes: el planteamiento del problema, la formulación, la justificación y los objetivos que se pretenden lograr. Todo esto permite comprender el fenómeno a investigar como también la justificación de dicha investigación.

El quinto componente se encuentra el referente conceptual para este estudio, el cual está integrado por los antecedentes de la enseñanza y aprendizaje de la medida, como también por sus aspectos históricos y epistemológicos. Todo lo anterior nos permite comprender el fenómeno en estudio.

En el sexto componente se expone el diseño metodológico que se tuvo en cuenta para adelantar este estudio. Allí se puede observar las técnicas e instrumentos utilizados, el tipo de estudio, el plan de análisis y el procedimiento a seguir.

En el séptimo componente se encuentra los análisis de datos, en el cual se estudian y se hace una interpretación de los mismos, donde se detallan de acuerdo con los objetivos propuestos. Por último se encuentran las conclusiones y recomendaciones del estudio, donde se puede evidenciar el resultado de la investigación, así como algunas recomendaciones necesarias a tener en cuenta en el estudio.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.Descripción del problema.

A través de la historia, las matemáticas han sido un campo en construcción continuo, donde el proceso enseñanza-aprendizaje ha sido mediado por la didáctica, necesaria para el desarrollo y comprensión conceptual de las matemáticas. Pero hablar de apropiación del concepto matemático no es hablar de aprendizaje del mismo, y es aquí donde posiblemente se encuentran las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse al aprendizaje de las matemáticas y en especial del proceso de medida.

Podemos partir de lo que Bishop (citado en Lordoguin y Pollio, 2013) se pregunta: *"¿sabemos realmente en qué razones se basa la actividad matemática que se desarrolla en la escuela?, ¿realmente tenemos confianza en nuestros criterios para juzgar, qué es importante y qué no? (p.2)*. Y es a partir de estas dos preguntas donde debe comenzar la reflexión acerca de las deficiencias que se presentan en la enseñanza de las matemáticas y en especial lo referido al proceso de medición.

Aunque hace más de 18 años los lineamientos curriculares en matemáticas han expresado que se deben realizar procesos de medición que permitan al estudiante comprender el verdadero sentido del proceso de medir, hoy los currículos, las escuelas siguen desarrollando contenidos donde no le permiten al estudiante explorar ni construir conceptos que lo apropien del conocimiento ni del proceso, y que finalmente no le proporcionan las habilidades necesarias para tomar decisiones y para afrontar su aprendizaje en profundidad. Al respecto Bishop (citado en Osorio, 2009) afirma:

Haciendo un diagnóstico a los procesos de enseñanza de las matemáticas, sostiene que su estado actual presenta algunas áreas de interés: el currículo dirigido al desarrollo de técnicas, el aprendizaje *impersonal, la enseñanza basada en los textos, entre otras. El autor describe estas áreas donde se puede concluir que un currículo dirigido al desarrollo de técnicas no pueden ayudar a comprender, no puede desarrollar significados, no puede capacitar al alumno para que adopte una postura crítica dentro y fuera de las matemáticas.(p. 10).*

En lo referido al currículo dirigido al desarrollo de técnicas, en el caso del proceso de medición, se puede inferir que este provoca en los estudiantes incomprensiones, dificultades (obstáculos), que finalmente no le permiten comprender que significa medir y como llevar a cabo el proceso de medición. Al respecto Chamorro (citado en Osorio, 2009) explica:

Los deficientes procesos de enseñanza alrededor de la medida han provocado que cada día los estudiantes estén menos alfabetizados matemáticamente, provocando con ello que algunos utilicen las medidas más como un conjunto de técnicas, conversiones y algoritmos a seguir y no como un objeto matemático que les permitirá tomar decisiones y participar críticamente en situaciones de medida.(p. 11)

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, existen innumerables investigaciones acerca de las dificultades (obstáculos) que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, y es así como la teoría sobre obstáculos epistemológicos de Bachelard y obstáculos ontológicos de Pozo y Carretero y Pozo y Gómez nos permite comprender ¿Cómo se producen esos obstáculos?, y de esta manera permite preguntar: ¿Qué relaciones se dan entre los obstáculos epistemológico y ontológico que en el aprendizaje de la medida poseen los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Rural San Rafael sede Quebradanegra del municipio de Calarcá (Quindío)?

1.2.Formulación Del Problema.

¿Qué relaciones se dan entre los obstáculos epistemológico y ontológico que en el aprendizaje de la medida poseen los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Rural San Rafael sede Quebradanegra del municipio de Calarcá (Quindío)?

1.3. **Justificación**

A través de la historia de la humanidad el hombre ha necesitado comparar o cuantificar todo lo que lo rodeaba para poder realizar intercambios, necesarios para poder sobrevivir en su medio familiar y social, y todo esto es posible gracias a la medida, por lo tanto ésta se convierte en un instrumento fundamental que transversaliza todas las áreas del currículo en la escuela.

La importancia que tiene la medida así como su conocimiento es fundamental para que el individuo pueda descifrar todo el mundo que lo rodea, por lo tanto es necesario explorar que aspectos del proceso de la medición comprendan y cuáles del mismo se deben mejorar. Es así como esta situación permite tanto a docentes como estudiantes mostrar las dificultades u obstáculos de tipo ontológicos y epistemológico, y como desde su propio contexto construyen los elementos necesarios para apropiarse del proceso de medición.

Para caracterizar los diferentes obstáculos tanto de tipo ontológicos como epistemológico se toma como fundamento teórico los obstáculos epistemológicos definidos por Bachelard (1999), y en cuanto a los ontológicos se fundamenta en la teoría de Pozo y Carretero (1987), Contreras (1998) y Pozo y Gómez (1998).

La identificación de estos obstáculos ayuda a contribuir al currículo escolar para que no se repitan estas dificultades y por consiguiente se mejore el proceso enseñanza-aprendizaje de la medida, a través de nuevas técnicas y procedimientos que permitan al estudiante acercarse de manera efectiva al concepto de la misma, tal como lo proponen los lineamientos curriculares (1998).

2. Objetivos

2.1. Objetivo General.

Caracterizar las relaciones entre los obstáculos epistemológicos y ontológicos sobre el concepto de medida en estudiantes de grado décimo.

2.2.Objetivos Específicos

2.2.1. Identificar los obstáculos de tipo epistemológico sobre el concepto de medida en estudiantes de grado décimo.

2.2.2. Identificar los obstáculos de tipo ontológico sobre el concepto de medida en estudiantes de grado décimo.

3. Referente Teórico.

3.1. Obstáculos epistemológicos y ontológicos

Se define obstáculo epistemológico de acuerdo con Neira (2009):

El término obstáculo epistemológico fue inventado por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard, La naturaleza no nos es dada –nuestras mentes nunca son vírgenes en frente de la realidad- : sea lo que sea que veamos, digamos u observemos está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver. Algunos de estos pensamientos, creencias y conocimientos pueden funcionar como un obstáculo a nuestra comprensión de los fenómenos. (p.2).

También Neira (2009) expone:

Ninguno de los ejemplos de obstáculo epistemológico dado por Bachelard se aplica a las matemáticas, como él mismo lo advirtió. Sin embargo, los educadores matemáticos creían que sí tenía sentido hablar de obstáculos epistemológicos en matemáticas, porque todos los días se detectaba algo que funcionaba como un obstáculo epistemológico en la mente de los estudiantes. (p. 2).

De acuerdo con Bachelard (en Leal et al., 2012)

los obstáculos de tipo de conocimiento general es donde el ser humano tiende a generalizar los conceptos, llegando a aplicarlos a situaciones generales que se salen del ámbito del concepto; por esto al dar una explicación se debe tener mucho cuidado porque en ocasiones lejos de construir un concepto científico, se vuelve una hipótesis errónea.

Otra definición de obstáculo del conocimiento general, Bachelard (citado por Mora, 2002) "*Nada ha retardado más el progreso del conocimiento científico que la falsa doctrina de lo general* *que ha reinado desde Aristóteles a Bacon inclusive, y que aún permanece, para tantos espíritus como una doctrina fundamental del saber*" (p. 81).

El conocimiento sobre obstáculo epistemológico tomado de Bachelard, apareció en didáctica de las matemáticas en el año 1976 introducida por Brousseau, y específicamente en la didáctica francesa. Barrantes (2006) expone: "*Brousseau menciona a Bachelard quien identifica los siguientes obstáculos en la ciencias físicas: de la experiencia anterior, del conocimiento general, verbal, uso abusivo de imágenes familiares, conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo substancialista, realista, animista, y del conocimiento cuantitativo*". (p. 3).

En cuanto a la definición de obstáculo, Brousseau (citado por Cid, s.f) expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstáculo en diferentes artículos (1980, 1981, 1983, 1988, 1989a, 1989b). Entre ellas figura una clasificación de los obstáculos atendiendo a que su origen se sitúe en uno u otro de los polos del sistema didáctico -alumno, profesor y saber- o en la sociedad en general, lo que le permite distinguir entre un obstáculo ontogenético, didáctico, epistemológico o cultural. En particular, califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual.

Afirma Cid:

Duroux (1982) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción. Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau, es la siguiente:

a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.

b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.

c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.

d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brousseau, 1989a, p. 43)

También afirma Cid (s.f):

Como podemos ver, en la teoría de situaciones la noción de obstáculo epistemológico queda englobada en una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Además, la definición de obstáculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber trasmitido. Esto induce a extender el concepto de concepción utilizándolo también como significante del estado de conocimiento propio de los matemáticos de otras épocas.

Aparece así el término concepción histórica para referirse a la concepción que determinado matemático de otra época ha podido tener de una cierta noción matemática, siempre que esa *concepción sea relevante, es decir, que represente la forma de pensar de una parte significativa de la comunidad de matemáticos de su tiempo. La determinación de estas concepciones históricas se hace a partir de la lectura de la obra escrita del matemático considerado".* (p. 3).

Durox y Brousseau (citado en Barrantes, 2006) precisaron las condiciones que debería satisfacer un conocimiento para poder ser declarado un "obstáculo" en el sentido de Bachelard y explican el interés de este concepto, que conviene distinguirlo del de "dificultad":

• Un obstáculo es un conocimiento.

• Un obstáculo tiene un dominio de "validez".

• Un obstáculo resiste y reaparece.

• Un obstáculo es constitutivo del saber.

Brousseau (citado por Cid, s.f) califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual.

Y en cuanto al obstáculo ontológico, Pozo y Carretero (1987): Afirman: *que las concepciones espontáneas* "*surgen de un modo natural en la mente del alumno, sin que exista ninguna instrucción ni actividad educativa específicamente diseñada para producirlas. Generalmente, se producen en la interacción cotidiana de los niños y adolescentes con el mundo que les rodea*" (p. 43).

También Pozo (1987) se refieren a "*las concepciones espontaneas las cuales son construcciones más bien personales del alumno, es decir, proceden de su propia actividad intelectual y no son una adquisición que proceda directamente de su medio cultural o educativo*" (p.43). De acuerdo con Orrego, Tamayo y López (2012) "*espontáneamente se tienen como sinónimos obstáculos y dificultades, lo cual está de acuerdo con la etimología de la palabra obstáculo*" (p.6).

También explica Contreras (citado por Restrepo, 2008) "*las concepciones consisten en un marco organizativo –implícito en el pensamiento del sujeto– de naturaleza metacognitiva y difícilmente observables, que inciden en sus creencias y determinan su toma de decisiones*" (p. 93).

Ahora bien en cuanto al origen de las concepciones alternativas, Pozo y Gómez (citado por López, Orrego y Tamayo, 2016) explican que se diferencian en su origen y se pueden describir de la siguiente manera:

1. Concepciones espontáneas: Se forman en el intento de dar significado a las actividades cotidianas.

2. Concepciones inducidas: Son creencias inducidas debido a procesos de socialización. Pueden ser influenciadas por la escuela o por la cultura.

3. Concepciones analógicas: Se derivan de las comparaciones que se realizan con hechos de la vida cotidiana.

4. Es así como a través de las vías sensoriales, culturales o escolares, los estudiantes adquieren concepciones alternativas tan resistentes al cambio. Pozo, et al. 1991, no pretenden establecer que estas concepciones se dan por separado, sino que están íntimamente ligadas, pues las analogías deben formarse a partir de concepciones

existentes y las concepciones socialmente inducidas deben asimilarse en función de los conocimientos previos, donde influyen indudablemente las concepciones espontáneas.(p. 1051).

De acuerdo con la definición de concepciones alternativas de Pozo y Gómez (1998), el estudiante en esta investigación se ubica en concepciones espontaneas, concepciones inducidas y a través de las vías sensoriales, culturales o escolares.

3.2. Antecedentes de la enseñanza de la medida y su aprendizaje.

Para comprender que pasa alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la medida, es importante buscar en la historia que ha pasado con este proceso y con las dificultades que ha presentado a través de la misma. Autores como Chamorro (1991, 2000, 2001, 2003), Brousseau (1991, 1992). En cuanto a los obstáculos epistemológicos se consideran autores como Bachelard (1999) y en los obstáculos ontológicos encontramos autores como Pozo y Carretero (1987), Contreras (citado por Restrepo, 2008) y Pozo y Gómez (1998). También se rastrearon artículos científicos que evidencian los obstáculos en cuanto al aprendizaje de la medida.

A continuación se relacionan los artículos sobre obstáculos en el proceso de medición, todos con un enfoque distinto a partir de su objeto de investigación.

De acuerdo al análisis de Philippa Bragg y Lynne Outhred los datos recogidos a través de pruebas regulares aplicadas a gran escala por La Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP: National Assessment of Educational Progress) muestran que mientras que los estudiantes han mostrado una mejora global constante de habilidades y conceptos de medición básicos desde 1990, parece haber lagunas importantes en la comprensión del estudiante de cómo usar las escalas en las herramientas de medición formal de trabajo (Strutchens, Martin y Kenney, 2003). Esto se hace evidente cuando se pide a los estudiantes medir longitudes no alineadas a cero, o cuando la escala a utilizar está sin marcar. Los estudiantes no parecen haber construido comprensiones adecuadas de la propiedad de longitud (Wilson y Rowland, 1993) y de la naturaleza lineal de unidades de medida (Bragg y Outhred, 2001). También es evidente que, si bien la mayoría de los estudiantes de grado 5to parecen ser competentes con la medición básica de papel y lápiz y con la construcción de tareas, muchos estudiantes son también incapaces de indicar lo que está siendo contado en el proceso de medición (Bragg y Outhred, 2000).

Bragg y Outhred (2001) mostraron que un número significativo de estudiantes de los grados tercero a quinto no tenían claro lo que se contaba cuando utilizan cubos de un centímetro para medir la longitud, a pesar de que fueron capaces de alinearlas y contarlas correctamente. Esto es importante porque los estudiantes de grado tercero usan los mismos cubos para medir área, perímetro y luego volumen. Esta confusión es también evidente cuando se pide a los estudiantes indicar que características de la escala en una regla se cuenta al medir una longitud. Demostraron que los jóvenes estudiantes tenían más probabilidades de acertar la medición cuando se coloreaban los espacios entre los marcadores de unidad, mientras los estudiantes de más edad, tenían más probabilidades de contar con los marcadores de la unidad (marcas de control) propias.

El proceso de iteración es un concepto fundamental que debe ser aprendido temprano en el currículum sobre medición (Barrett, Jones, Thornton, y Dickson, 2003). Una vez que una unidad ha sido seleccionada, la medida obtenida por el conteo que indica el número de estas unidades, colocado de un extremo a otro, se utilizan para cubrir la longitud del objeto. La tendencia a contar marcadores de la unidad, cuando la escala es poco familiar parecen indicar que los estudiantes pueden haber conectado la iteración de unidades informales con la característica más prominente sobre la regla, la unidad de marcador, a pesar de que los marcadores de la unidad están en ángulo recto con el longitud del objeto o de la línea que se está midiendo. Esto indica que algunos estudiantes pueden comprender la medición de la longitud usando unidades informales y la aplicación de una regla para ser dos habilidades distintas. La primera habilidad implica el uso correcto de una 'cuenta-el objeto o - proceso de acción' para determinar una longitud, mientras que la segunda habilidad, utiliza reglas sobre la alineación correcta y la lectura para obtener una medida con una regla. Por ello, ha sido sugerido que los maestros no deben basarse en pruebas de medición de papel y lápiz como indicación de que los estudiantes han adquirido un profundo conocimiento de las unidades y escalas (Bragg y Outhred, 2000b).

Corberan (1996) muestra como las dificultades en la comprensión de la medida en lo referido al hallar el área de figuras es generalizado aunque se realizó en varias partes del mundo. También afirma que la incomprensión del concepto se debe a la forma como se enseña, limitada comúnmente al uso de la unidad cuadrada, a la presentación de fórmulas para cálculo de áreas y a la introducción de unidades con múltiplos y submúltiplos.

En los estudios realizados por Chamorro (2001), con respecto al aprendizaje de la de la medida en la escuela, demuestra como este proceso presenta dificultades a través del tiempo:

- ✓ El concepto de magnitud está ausente de los currículos, sin que permita desarrollar habilidades sobre métodos de comparación entre magnitudes en los estudiantes, lo que resulta ser más complejos en magnitudes como el área y el volumen.
- ✓ Los docentes centran la enseñanza de la medida al cambio de unidades de forma algorítmica, el cual es un procedimiento que presenta las mayores dificultades, porque es tema abstracto y poco práctico para el aprendizaje por parte de los estudiantes. Se deja de

lado procesos como la estimación y la comparación que son muy útiles en la vida diaria para la comprensión de cualquier fenómeno susceptible de medir.

- ✓ El proceso enseñanza aprendizaje sobre medición queda limitado a los espacios escolares, pues prácticamente no le encuentran sentido fuera de esta. Es decir está muy distante epistemológicamente hablando del saber matemático en cuanto a medida se refiere.

Otro autor que muestra dificultades en la enseñanza aprendizaje de la medida es Brousseau (1991,1992) (citado en Osorio, 2009), en su artículo "El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM", concluye:

- ❖ La necesidad del dominio de los objetos matemáticos no se tiene en cuenta, ya que los alumnos están inmersos en situaciones y entornos institucionales en las que ni ellos, ni los maestros , pueden siempre fácilmente aprender o controlar el desfase con relación a las diferentes exigencias: conocimientos teóricos sabios, conocimientos escolares.
- ❖ Las relaciones entre el saber y lo concreto, entre la práctica y la teoría, no son tratadas como objetos de enseñanza ni explícitos, ni implícitos.
- ❖ Los alumnos siguen utilizando el modelo de medida natural sin plantearse ninguna cuestión, ni sobre el problema a resolver, ni sobre la estructura matemática construida, ni sobre las desviaciones que podrían subsistir por otras razones.

Situaciones como las anteriormente expuestas permiten evidenciar los diferentes obstáculos en la construcción de la medida, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje; así como también la evidencia que la medida es tratada con procedimientos superficiales e instrumentales. Y también contribuyeron para la elaboración de los instrumentos.

3.3. Aspectos históricos y epistemológicos de la medida.

A través de la historia de la humanidad el hombre ha necesitado comparar o cuantificar todo lo que lo rodeaba para poder realizar intercambios, necesarios para poder sobrevivir en su medio familiar y social. Esa comparación necesariamente se asocia al principio de los albores de la humanidad a la forma como realizaban dicha actividad; pues no se contaba con una unidad patrón que permitiera realizar sus actividades económicas.

En el siguiente cuadro se relacionan los aspectos históricos de la medida, de acuerdo a Kula (1999).

Evolucionismo	*Desde el punto de vista evolucionista, podemos afirmar que el primer periodo evolutivo de las nociones metrológicas del hombre es el antropométrico, en el que las unidades básicas de las medidas son parte del cuerpo humano*". *El periodo siguiente busca sus unidades de medición en las condiciones, objetos y resultados de la labor humana". (p. 5).*
Antropométrica	En cuanto a la medida antropométrica encontramos que se relaciona con la parte social de cada país, por ejemplo los griegos utilizaron el cuerpo para comenzar a medir, y

	en especial con el pie y los dedos (se infiere que todas medidas eran diferentes). También encontramos a los egipcios que utilizaron el codo como unidad de longitud, y cuya dimensión afirma Kula era la distancia que hay desde el codo hasta la punta del dedo corazón de la mano.
Sedentarismo	El hombre primitivo en su etapa sedentaria se vio obligado a buscar como contar su ganado, sus arrmas y también porque necesitaba saber cuánto median los terrenos había conquistado o que había dedicado a los diferentes sembrados. Y también porque necesitaba comercializar sus productos y necesitaba conocer el contenido para poder intercambiarlos y darles un valor de referencia.
Medidas antiguas	*Es generalmente sabido que las medidas antiguas, incluso cuando llevan las mismas denominaciones, responden a muy diferentes tamaños, dependiendo del lugar, época y objeto de medición. No basta conocerlas, no basta inclusive saber convertirlas*

	en cada caso en sus correspondencias métricas: hay que comprender también el contenido social que se esconde tras esas diferencias.
Condiciones de vida y de trabajo	El sistema metrológico se desarrolló de acuerdo a las condiciones de vida y de trabajo. La actividad económica definía el tipo de medición que necesitaba cada país. Por ejemplo los ashanti (Ghana) desarrollaron el sistema de pesas para poder medir la cantidad de oro que explotaban. Otro ejemplo es el de los nómadas del Sahara que necesitaban calcular la distancia entre un pozo y otro, y esto representaba vida para ellos, por lo tanto desarrollaron las medidas de longitud.
Trasfondo social	*El trasfondo social de cada sistema de medición ha sido el origen de su inercia. Al tomar de los romanos el arte de medir y la institución del catastro, los galos conservaron su unidad tradicional: el arepennis, unidad de terreno arable por un hombre y un* arado. (p.

	6).
Actividad agrícola	Pero estas relaciones no se quedan solo en la agricultura afirma Kula también se extienden hacia la industria textil, y hacia el transporte, pues la cantidad de carga de un vehículo determinaba la unidad de medida. Afirma Kula: "*Es sorprendente la diversidad de las medidas significativas, en diversos países y a lo largo de muchas épocas". (p. 9).*
Medida justa	Otro aspecto importante en los albores de la medición, son los distintos simbolismos y creencias que alrededor de la misma crearon las diferentes sociedades. Afirma Kula, la honestidad en cuanto al uso de pesas y medidas. También Expone Kula: *Ya en los albores de la antigüedad vemos como la "medida justa" se convierte en símbolo de justicia en general. Los fenómenos inherentes a la relación del hombre con las medidas se convierten en expresión simbólica de muchos elementos de la "filosofía social" de los pueblos. (p. 11).*

Tabla 1 **Aspectos históricos de la medida**

Pero, ¿qué ha significado medir? Al respecto, Osorio (2009) afirma que:

Para hablar de lo que ha significado medir para las diferentes culturas, hay que remontarse a la edad antigua, para comprender los significados, las dificultades que ha tenido para consolidarse en lo que hoy día desde aspectos epistemológicos de las matemáticas significa medir. En el siguiente cuadro se pueden observar diversas definiciones de la medida desde diferentes puntos de vista: filosofía de las ciencias, sociología, etnomatemáticas y didáctica de las matemáticas. (p. 19)

Especialidad	Autor	Definición de medida
Filósofos de la ciencia	Campbell (1956)	Es la atribución de números a propiedades, para representarlas
	Moulines y Diez(1999)	Es asignar números a las cosas de modo que aquellos expresen ciertas propiedades que estas exhiben.
Sociología	Kula (1999)	Es la abstracción de una característica cuantitativa del objeto, sin tener en cuenta su calidad. Pero para la mentalidad primitiva la medida debe ser una cualitativa o por lo menos va muy íntimamente ligada a la calidad, por ello cada objeto debe ser medido con una medida diferente y ninguna de ellas es reducible a las demás.
Etnomatemáticas	Bishop(1999, 2005)	Se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia.
Didáctica de las matemáticas	Godino, Batanero y Roa(2005)	Es asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un

		objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro o ser incidente en dos o más objetos. Con esta descripción no sólo se tiene en cuenta la medida habitual de las características cuantitativas y continuas, sino que también se considera “medir” a asignar una categoría a rasgos cualitativos como el color, el grado de dolor, de placer, etc. Cada modalidad es un valor de la variable que representa el rasgo correspondiente.

Tabla 2 (tomado de Osorio, 2009). **Aspectos epistemológicos de la medida**

4. Metodología.

En esta investigación se pretendió caracterizar las relaciones entre los obstáculos epistemológicos y ontológicos sobre el concepto de medida en estudiantes de grado décimo. Por lo tanto tiene una intencionalidad descriptiva de tipo cualitativa, es un estudio de caso colectivo. De acuerdo con (Goetz, J.P.; LeCompte, M.D.;, 1988) se parte de teoría previas que permiten definir algunas categorías iniciales del estudio, pero se deja emerger otras categorías que dan cuenta los obstáculos que poseen los estudiantes en torno al concepto de medida.

Las categorías analizadas en el presente estudio fueron: el obstáculo epistemológico de conocimiento general y los obstáculos ontológicos inducidos por la enseñanza y los obstáculos ontológicos espontáneos y a partir de estos surgen unas subcategorías: en los obstáculos de tipo epistemológico de conocimiento general encontrados se caracterizaron entre: la relación entre lo continuo y lo discreto, cambio de unidad, selección de unidad, la utilización de la medida natural, procesos de asignación numérica y cálculo de área. Y en cuanto a los ontológicos se encontraron tres subcategorías: Obstáculo ontológico inducido por la enseñanza referidos a: medición de figuras regulares, uso frecuente de instrumentos estandarizados y la linealidad; y en cuanto a los obstáculos ontológicos espontáneos se obtuvieron las siguientes subcategorías: obstáculo ontológico referido a: la facilidad, exactitud en la medición y a las características de la unidad.

De acuerdo con la respuesta de los estudiantes, se ven emerger categorías y las subcategorías como las anteriormente descritas. Las categorías iniciales de análisis fueron el obstáculo epistemológico de conocimiento general y los obstáculos ontológicos, y de allí surgieron los demás en el desarrollo de la investigación.

Siguiendo a (Godino, 2003) este enfoque metodológico hace referencia a la complejidad del fenómeno que hace necesario un estudio holístico y de casos, así como de disponer de múltiples técnicas de recogida de datos, la especificidad respecto al saber matemático que hace posible la generación de hipótesis previas, a partir del estudio de dicho saber y de su génesis epistemológica, así como el uso de técnicas de análisis de datos cualitativos.

En cuanto a la lógica seguida en la investigación, se parte inicialmente de las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan al proceso de medición (en procesos de longitud y área). Al respecto se rastrean antecedentes que permiten mostrar como esas dificultades se han presentado de generación en generación, por lo tanto surge la inquietud por indagar por las dificultades u obstáculos que presentan los estudiantes de grado décimo en cuanto a la enseñanza aprendizaje del proceso de medición. Se elaboran 12 cuestionarios (o tareas) semiestructurados que permitieran indagar por los obstáculos.

La tareas diseñadas se aplicaron a estudiantes de grado octavo y noveno como prueba piloto para revisar que dificultades presentaban dichas tareas y si había necesidad de modificarlas o cambiarlas. Luego de aplicar estas 12 tareas referidas a procesos de medición en longitud y área, se realizó el respectivo análisis que permitió caracterizar los diferentes obstáculos presentes en los estudiantes a través del análisis de contenido.

4.1 Diseño Metodológico

La población para adelantar este estudio fueron los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Rural San Rafael sede Quebradanegra del municipio de Calarcá (Quindío), la muestra seleccionada son seis estudiantes de desempeño académico alto, medio y bajo (esta clasificación se hizo de acuerdo a su rendimiento académico). En cuanto al desarrollo de la investigación, esta se llevó a cabo dentro y fuera del aula. En el siguiente cuadro se relacionan las características de los seis estudiantes que participaron en el trabajo:

PARTICIPANTES	EDAD (AÑOS)	GENERO	GRADO
ESTUDIANTE (E1)	17	FEMENINO	10
ESTUDIANTE (E2)	17	MASCULINO	10
ESTUDIANTE (E3)	17	FEMENINO	10
ESTUDIANTE (E4)	14	FEMENINO	10
ESTUDIANTE (E5)	18	FEMENINO	10
ESTUDIANTE (E6)	17	FEMENINO	10

Tabla 3. Caracterización de la unidad de trabajo

Las seis unidades de trabajo se seleccionaron de un total de 13 estudiantes, 10 estudiantes son mujeres y 3 hombres; de los tres hombres se seleccionó el estudiante E2, porque los otros dos son estudiantes con necesidades educativas especiales. Este grupo décimo es el primero que ofrece la Institución Educativa en la Sede Quebradanegra. La Institución Educativa cuenta con 17 sedes todas rurales, solo en dos sedes hay básica secundaria, y de las dos sedes, Quebradanegra cuenta con educación media.

4.2 Técnicas e instrumentos

Para caracterizar las relaciones entre los obstáculos epistemológicos y ontológicos sobre el concepto de medida que poseen los estudiantes sobre medida se elaboraron 12 tareas con cuestionarios semiestructurados (cada tarea tiene una cantidad diferente de ítems, que van desde A hasta la H) (ver anexo B, página 103). A continuación se realiza una breve explicación del propósito de las doce tareas.

La tarea 1 tenía como objetivo las cualidades medibles de la figura propuesta. Aquí los estudiantes se les pide que escojan que parte de la figura se puede medir, los rectángulo, el semicírculo y el cuadrado. En la tarea 2 el objetivo de la tarea es medir la cancha del colegio. En esta tarea se les pide a los estudiantes que determinen el largo y el ancho de la misma, y que comparen esas medidas con las medidas estándar para saber si el colegio puede prestar la cancha para un torneo de microfútbol. Se infiere que deben calcular el área de la cancha.

En la tarea 3 se les presenta 3 figuras amorfas, se les pide a los estudiantes que la midan de la forma más exacta posible. Se les pide que escoja la unidad de medida adecuada. En la tarea 4 el objetivo es medir el área que existe entre el baño y el restaurante del colegio para techarlo y ubicar las motos de los profesores. Se les pide medir el largo y el ancho, y se les solicita de manera explícita medir el área del espacio, y que escojan la unidad de medida adecuada.

En la tarea 5 se les presentan tres cuadriculas con figuras amorfas que sirven de cubierta para unas mesas de café internet, se les pide que lo hagan de la manera más exacta posible, y que escojan la unidad de medida que crean sea la más conveniente. En la tarea 6 el objetivo es medir dos figuras amorfas que representan huecos en la capa de ozono, y se les pide comparar las superficies y responder cuál de las dos tienen mayor y menor área. Se le pregunta de manera explícita por el área de las superficies y también que elijan la unidad de medida correspondiente.

En la tarea 7 el objetivo es medir la rampa de acceso al colegio, se le pide calcular las dimensiones de la misma (largo y ancho). Implícitamente el estudiante debe calcular el área, como también seleccionar la unidad de medida que crea que es más conveniente para hacerlo. En la tarea 8 se les pide a los estudiantes medir la malla de cerramiento alrededor del colegio, y de manera explícita se les pide medir toda el área, y que elija la unidad de medida adecuada para adelantar esta actividad.

En la tarea 9 se le pide medir el cerramiento del jardín, proponer el procedimiento para hacerlo y calcular la cantidad de cuerda necesaria para hacerlo y también se le pide que escoja la unidad de medida para adelantar dicho trabajo. En la tarea 10 a los estudiantes se les presenta cinco figuras diferentes formadas con el tangram. El objetivo de esta tarea es averiguar por el área de todas figuras, se les pregunta si tienen la misma área, como podrían ellos determinar el área de las mismas, la unidad de medida que escogería para adelantar esta actividad, por la estrategia para desarrollar esta actividad y si creen que debería escoger una unidad de medida diferente.

En la tarea 11 se les pide a los estudiantes que modifiquen la superficie de la figura propuesta, de tal forma que se obtenga una superficie con mayor área y otra superficie con menor área. Se le pide que explique cómo medirían esa área, que unidad de medida seleccionarían para adelantar la actividad y que si creen que hay varias formas de medir esta superficie. En la tarea 12 se les solicita a los estudiantes que mida el área de las cuatro figuras propuestas, y que establezcan la relación entre las áreas, en cuanto a cuál de las figuras tiene mayor área y cual tiene menor área. También se les pide escoger la unidad de medida adecuada para adelantar esta actividad.

El método de recolección de datos es a través de cuestionarios, y el instrumento para adelantar este trabajo es a través de las tareas. La recolección de datos se efectúa mediante la aplicación de los instrumentos (cuestionario semiestructurado). El procedimiento para la recolección de los datos se obtiene a partir de la aplicación de los cuestionarios a los seis estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Rural San Rafael sede Quebradanegra. Por último la tabulación de los datos se realiza a través de unidades de análisis. Es de aclarar que una unidad de análisis es considerada para este estudio como una respuesta en su globalidad de un estudiante y en esta investigación se obtuvieron 347 unidades de análisis.

4.3 Plan de análisis

El tipo de análisis que se realizará es el análisis de contenido en las respuestas de los estudiantes. En este estudio fue preciso analizar los elementos de los obstáculos ontológicos y el obstáculo epistemológico a través de las respuestas de ellos; pues es una de las formas que permiten explorar las respuestas de los estudiantes ante las tareas propuestas. El análisis de contenido como método de investigación nos permite indagar por las respuestas de los estudiantes, pues en este método es de suma importancia la inferencia, el cual nos permitirá identificar o relacionar los diferentes obstáculos presentes en los seis estudiantes. Al respecto Bardin (citado por López, 2002) afirma:

El análisis de contenido es un conjunto de instrumentos metodológicos, aplicados a lo que él denomina como «discursos» (contenidos y continentes) extremadamente diversificados. El factor común de estas técnicas múltiples y multiplicadas -desde el cálculo de frecuencias suministradoras de datos cifrados hasta la extracción de estructuras que se traducen en modelos- es una hermenéutica controlada, basada en la deducción: «la inferencia». (p. 173).

También López (2002) expresa:

Esta metodología pretende sustituir las dimensiones interpretacionistas y subjetivas del estudio de documentos o de comunicaciones por unos procedimientos cada vez más estandarizados que intentan objetivar y convertir en datos los contenidos de determinados documentos o comunicaciones para que puedan ser analizados y tratados de forma mecánica.(p. 173).

5. Análisis de la Información

En el desarrollo de este trabajo de investigación se caracterizan las relaciones entre los obstáculos epistemológicos y ontológicos sobre el concepto de medida al resolver situaciones problemas relacionadas con la medida del espacio, específicamente longitud y área. Las categorías de análisis que se tuvieron en cuenta fueron los obstáculos epistemológicos de tipo de conocimiento general. En cuanto a los obstáculos ontológicos las categorías de análisis que se tuvieron en cuenta fueron las concepciones inducidas por la enseñanza y las concepciones espontáneas.

A continuación haremos un análisis detallado de los obstáculos que se caracterizaron en el análisis.

5.1 Obstáculos de tipo ontológicos.

En cuanto a los obstáculos de tipo ontológicos se encontró lo siguiente: de las 347 unidades de análisis (una unidad de análisis es una respuesta en su globalidad del estudiante), 49 corresponden a obstáculos ontológicos inducidos por la enseñanza, 122 corresponden a obstáculos ontológicos espontáneos.

A continuación se presentan los obstáculos de tipo ontológico caracterizados:

5.1.1 Obstáculo ontológico inducido por la enseñanza.

En las tareas resueltas por los estudiantes identificaron 49 unidades de análisis de las 347 analizadas (una unidad de análisis es una respuesta en su globalidad del estudiante) que corresponden los obstáculos de tipo ontológicos inducidos por la enseñanza se identifican los siguientes: Referida a la medición de figuras regulares, el uso frecuente de instrumentos estandarizados y referidos a la linealidad.

5.1.1.1 Obstáculo ontológico inducido por la enseñanza referida a la medición de figuras regulares.

En la tarea 1A solucionada por los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5 y E6 se enfocaron específicamente en el cuadrado, eso significa que quizás la enseñanza de la medición se ha enfocado en el empleo de figuras regulares en el proceso de medición.

En la tarea 1C ninguno de los seis estudiantes escogen medir los sectores circulares. Aquí podemos evidenciar como los estudiantes les parecen complicados y difíciles de medir sectores circulares. El estudiante E2 expone: "*no los escogí porque se me hizo un poco complejo medirlos*", el estudiante E3 expresa: "*porque eran superficies más complicadas para hallar una medida ya que no formaban bien figuras*", el estudiante E4 explica: "*porque si escogía círculos sobraría muchos o tendría que buscar otra unidad de medida*", el estudiante E5 explica: "*pienso que tendría dificultad al medirlos porque son figuras no rectas y que no acostumbro a medir, y creo que si empiezo a medir daría una medida no valida y tampoco sabría cómo ni con qué medirlas*".

En la tarea 3C los estudiantes E1, E2 y E4 expresan en sus respuestas que la mayor dificultad que hacían con los pedazos sobrantes y como medirlos, Los estudiantes E3 y E6 explican que la mayor dificultad fue tomarle medidas a una figura amorfa. El estudiante E5 afirma:

"*las mayores dificultades que tuve al medir estas figuras fue al medir no sabía calcular exactamente y sumando todos porque era representado por decimales y no sabría encontrar la fracción que lo representara pero me parece que con el circulo es la manera más sencilla para hallar el área de estas figuras*".

Esta situación se puede considerar como un obstáculo inducido por la enseñanza pues ante lo explicado por los estudiantes se observa que no encuentran el procedimiento matemático, aunque en el proceso de aprendizaje de medición les hayan brindado elementos para realizar dichos cálculos pero ellos no encuentran la solución al problema planteado; pues los procesos matemáticos se enfocan más a la enseñanza de la medición de figuras regulares, y buscar soluciones a figuras estandarizadas que nos presentan los libros.

En la tarea 9A se presenta el siguiente obstáculo ontológico relacionado con la medición de figuras regulares, identificado en la respuesta del estudiante E2 el cual explica: "*como el jardín es cuadrado se halla el ancho y el largo y después hallamos el área*". Es de aclarar que el jardín no es cuadrado.

Los datos anteriores señalan lo que expresan los estudiantes sobre la tendencia que existe en el proceso de enseñanza de la medición a enfocarse en figuras regulas, pues prácticamente en la enseñanza de la medición en la escuela se omiten procedimientos para hallar la medida de objetos no comunes (o no abordados en el proceso de aprendizaje de la medida); al respecto Chamorro y Belmonte (2000) afirman que de manera habitual se le enseñan a los alumnos medir superficies y volúmenes de sólidos regulares. (Horak & Horak, 1982; Hughes, Bell & Rogers, 1975) citados por Corberan (1996) afirman: "*Es importante que los estudiantes de primaria* *realicen actividades que les proporcionen técnicas para encontrar áreas de figuras irregulares." (p. 33).*

5.1.1.2 Obstáculo ontológico inducido por la enseñanza referida al uso frecuente de instrumentos estandarizados.

En la tarea 1A otro elemento identificado en el obstáculo inducido por la enseñanza fue la insistencia de los estudiantes por usar la regla, el estudiante E3 explica: "*yo lo mediría muy bien con una regla o escuadra porque tiene los cm marcados*", el estudiante E4 explica: " *yo lo mediría con una regla, porque la regla tiene los centímetros marcados y así se ubicaría uno mejor*" y el estudiante E5 expone: *" mediría este rectángulo con una regla porque tiene medidas exactas lo cual sería una medida concreta*". La regla es un instrumento que el estudiante conoce y emplea de manera continua en todo su proceso escolar. Al respecto Chamorro y Belmonte (2000) afirman:

Parece ser que la desconfianza del niño en las medidas perceptivas que realiza, le lleva, en cierta forma, a aproximar materialmente los objetos antes de imaginar el desplazamiento de un objeto a lo largo del otro, si se miden, por ejemplo, longitudes. Por ello el adoptar un instrumento de medida (eso si, después de una construcción bastante laboriosa y larga), traduce ciertamente ese desplazamiento real y efectivo de un objeto en contraposición con el desplazamiento perceptivo que implica la estimación visual (p. 18).

En la tarea 1C se evidencian obstáculos espontáneos en las respuestas de los estudiantes al preguntarles ¿Porque ninguno de los seis midió los sectores circulares de la figura? En el siguiente cuadro se relacionan las respuestas:

ESTUDIANTE	RESPUESTA

E3	*"Porque eran superficies más complicadas para hallar una medida, ya que no formaban bien figuras y porque en las esquinas de la figura era muy complicado a la hora de darle una medida".*
E5	*Pienso que tendría dificultad al medirlos porque son figuras no rectas, que son las que acostumbro a medir y creo que si empiezo a medir daría una medida no valida y tampoco sabría cómo ni con qué medirlas.*

Tabla 4. Respuestas estudiantes tarea 1C

En la tarea 7G el estudiante E2 explica: "*No, mi medida no fue exacta porque me sobro un pedazo de cabuya la cual calcule suponiendo que la cabuya tuviera 1 m*". En la tarea 8D se identifica el obstáculo ontológico inducido por la enseñanza referida al uso de la regla en la respuesta del estudiante cuando se le pregunta ¿Cómo lo medirías? El estudiante E1 explica: "*yo lo mediría con una regla ya que ella trae los cm marcados*", otro obstáculo inducido por la enseñanza se referencia en la siguiente respuesta del E5: "*y una quinta parte de una que lo descubrí dobla la cabuya por la parte que faltaba y salieron 5 pedacitos de ese tamaño*"

En la tarea 9A se presenta el siguiente obstáculo ontológico relacionado con el uso de unidades estandarizadas como el metro, identificado en la respuesta del estudiante E4, el cual afirma: "*para conocer la cantidad de cuerda necesitaríamos medir la cuerda con un metro para conocer bien la medida del jardín*".

En la tarea 9B se evidencian los siguientes obstáculos espontáneos en las respuestas de los estudiantes, el estudiante E1 expresa "el *metro porque trae los metros y los cm marcados*", el estudiante E4 afirma: "*yo buscaría un palo que midiera 1metro".* En esta respuesta del estudiante se evidencia que este obstáculo ontológico está relacionado con el uso de instrumentos estandarizados.

En la tarea 9C se le pregunta al estudiante que si la unidad de medida fue la adecuada para llevar a cabo la medición, el estudiante E1 explica: "*pues fue un poquito incomodo porque se movía pero utilizaría un metro para medir porque es más sencillo de medir porque tiene los m, cm marcados*" .

5.1.1.3 Obstáculo ontológico inducido por la enseñanza referida a la linealidad.

En la tarea 2A se evidencian en las respuestas de los estudiantes obstáculo ontológico inducido por la enseñanza, pues no calculan el área de la figura refiriéndose a la linealidad y solo expresan el largo y el ancho de la figura.

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	*Largo = 16 cabuyas y un pedazo* *Ancho = 12 cabuyas y un pedazo*
E2	*Largo = 15 1/3* *Ancho = 12 1/4*
E3	*Largo= 15 cabuyas con 30 cm.* *Ancho = 12 cabuyas con 10 cm.*
E4	*Largo = 15 cabuyas y un pedazo* *Ancho = 12 cabuyas y un pedazo*
E5	*Largo = 15 1/3* *Ancho = 12 1/9*

E6	*Largo = 15 cabuyas y 1/3* *Ancho = 12 cabuyas y 1/4*

Tabla 5. Respuestas estudiantes tarea 2A

En la tarea 7G los estudiantes E1, E3, E4, E5, E6, expresan en sus medidas solo el largo y el ancho del objeto medible, expresando linealidad en sus respuestas. Por ejemplo el estudiante E1 afirma: "*el ancho fue 2cabuyas y un pedacito y el largo 34 cabuyas y un pedazo*", el estudiante E3 explica: "*No, ya que mi medida fue: largo 31 cabuyas y 12 cm y de ancho 2 cabuyas y 16 cm*", el estudiante E4 afirma: "*No, mi medida fue: largo 32 cabuyas y 60 cm y ancho: 2 cabuyas y 5 cm*", el estudiante E5 explica: "*largo 32 cabuyas y 1/4 de cabuya y ancho 2 cabuyas y 1/3 de cabuya*" , el estudiante E6 expone: "*largo 32 cabuyas y 1/3 ancho 2 cabuyas y 1/4*"

En la tarea 8C se les pide a los estudiantes medir toda el área del cerramiento del colegio, pero solo se enfocan más en un proceso de largo por ancho que de medir el área. En las respuestas de los estudiantes podemos evidenciar lo anteriormente dicho: los estudiantes E1 y E3 explican: "*largo: 25 cabuyas y un pedazo, ancho: 61 cabuyas y un pedacito*", los estudiantes E2 y E5 explican: "*ancho = 25 pedazos y una quinta parte de ella. Largo = 61 pedazos y un tercio de ella*", los estudiantes E4 y E6 afirman: "*ancho: 62 cabuyas y un pedazo, largo: 26 cabuyas y un pedazo"*

Otro aspecto interesante a tener en cuenta en las respuestas de los estudiantes es que no expresan de manera adecuada el resultado de la medición. Al respecto Chamorro (2003) explica:

Entre los errores más frecuentes que cometen los alumnos en el ámbito de la medida está precisamente el olvido, a la hora de expresar el resultado de una medición, de la o las unidades; es decir, de aquello que es básico para la determinación de la aplicación de la medida. (p. 234)

De igual manera Chamorro y Belmonte (2000) expresan:

Si un alumno no ha medido longitudes, ¿encontrará alguna diferencia entre el metro y el metro cuadrado? ¿Podrá medir superficies sino las distingue de las longitudes? En este contexto no son de extrañar muchos de los errores que el alumno comete, y muchas palabras tales como «metro», «hectómetro», etc., pasan a engrosar el vocabulario de las palabras sin sentido que el alumno escucha en clase" (p. 42).

Así mismo Vergnaud citado por Chamorro (2003) explica que:

Agrupa en un mismo campo conceptual las magnitudes espaciales, longitud, superficie y volumen, argumentando que su tratamiento requiere, en los tres casos, conceptualizaciones tanto de orden geométrico como de las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas, lo que no ocurre en el caso de las magnitudes. Y son justamente el aspecto geométrico y el carácter multilineal los que están en el origen de muchos de los obstáculos y conflictos que el alumno encuentra constantemente cuando se enfrenta al aprendizaje de estas magnitudes. (p. 246).

5.1.2 Obstáculo ontológicos espontáneos.

En esta categoría se pudieron evidenciar obstáculos ontológicos espontáneos relacionados con la facilidad, con la exactitud en la medición y con las características de la unidad.

A continuación se relacionan cada uno de ellos.

5.1.2.1 Obstáculo ontológicos espontáneos referidos a la facilidad

En la tarea 1A en las respuestas se puede evidenciar como de manera espontánea los estudiantes expresan que lo medible de la figura es el rectángulo (o cuadrado, los estudiantes en algunas ocasiones no diferencian el rectángulo del cuadrado), en el siguiente cuadro se relacionan las respuestas de los estudiantes:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	*Porque tengo la capacidad de medir ese cuadrado y es más eficaz para sacar una medida.*
E2	*Yo mido el rectángulo pequeño del fondo porque daría más fácil a la hora de medirlo.*
E3	*Yo mediría el rectángulo que se ve menos complicada a la de tomar una medida*
E4	*Yo mediría el cuadrado porque es la forma más fácil de medir o yo diría que es lo único que se puede medir.*
E5	*Mediría ese rectángulo porque es una figura fácil de medir. Porque las demás tienen una forma muy extraña a la hora medir y no sabría cómo medirlas.*
E6	*Mediría el rectángulo del fondo porque tiene una forma más precisa y fácil, y es una forma conocida para mí, además los sectores circulares no los encuentro mucho en mi entorno por eso escogí el rectángulo.*

Tabla 6. Respuestas estudiantes tarea 1A

En estas respuestas de los seis estudiantes hacen referencia a lo más fácil en cuanto a lo medible de la figura. Los estudiantes se centran en el cuadrado(o algunos de los estudiantes lo llaman rectángulo), pues se infiere que los estudiantes de manera espontánea creen que las figuras circulares son más complicadas en su tratamiento matemático. Esta percepción del estudiante se presenta porque quizás ellos han aprendido que las formas diferentes a las observadas en el entorno, tales como, el rectángulo, el cuadrado, son difíciles de resolver matemáticamente.

En la tarea 1B el estudiante expresa facilidad en la respuesta al escoger como unidad de medida el cuadrado pues afirma: "yo medí el rectángulo pequeño del fondo porque daría más fácil la medición a la hora de medirlo"

En la tarea 3A los estudiantes se le pide medir figuras amorfas, el E1 y el E4 escogen el cuadrado, los estudiantes E2, E5 y E6 escogen el circulo y el estudiante E3 escoge como unidad de medida el listón. Lo expresado por los estudiantes fue: El estudiante E1 explica: " *que escogió el cuadrado porque le pareció más fácil de medir*", el estudiante E2 expresa: "*que escogió el circulo porque es más fácil de medir y mejor para dar la medida"*, el estudiante E3 afirma que: "*escogió el listón porque era una manera más fácil de medir para hallar las medidas de las figuras*", el estudiante E4 explica que:" *la unidad que escogí fue el cuadrado porque fue la única unidad que encontré más fácil para poder medir las figuras y porque se puede rellenar bien la figura*", El estudiante E5 explica que: " *escogí el circulo porque como son figuras amorfas me pareció una manera sencilla de medir*" y el estudiante E6 afirma que: "*escogí los círculos porque es más fácil de medir y los escogí porque son grandes y así iba a necesitar menos círculos*".

En las respuestas anteriores se demuestra en cada estudiante diferentes maneras de elegir la unidad de medida solo inducidos o guiados en la percepción sensorial del mundo que los circunda.

En términos de Pozo y Gómez (citado por López, Orrego y Tamayo, 2016):

Es así como a través de las vías sensoriales, culturales o escolares, los estudiantes adquieren concepciones alternativas tan resistentes al cambio. Pozo, et al. 1991, no pretenden establecer que estas concepciones se dan por separado, sino que están íntimamente ligadas, pues las analogías deben formarse a partir de concepciones existentes y las concepciones socialmente inducidas deben asimilarse en función de los conocimientos previos, donde influyen indudablemente las concepciones espontáneas.(p. 1051).

Así mismo, los seis estudiantes expresan facilidad a la hora de medir las figuras amorfas con las unidades escogidas, en este caso podemos inferir como ellos de manera intuitiva piensan que con la unidad escogida les facilita el proceso de medición de dichas figuras.

En la tarea 4B se evidencia obstáculos espontáneos por ejemplo cuando el estudiante E1 afirma: "*porque era más sencillo para medir el área y se adaptaba fácilmente al área*", el estudiante E2 afirma "*porque me parecía más fácil ya que la unidad de medida es recta la cual en el momento de medir no están complejo ya que es fácil de manipular porque no se dobla*". El estudiante E4 explica *"porque es una unidad con la que se puede medir fácil las partes que nos piden medir*". El estudiante E5 comenta "*porque es flexible y se presta para medir más fácil*". Y por último el estudiante E6 expresa: "*porque es una unidad flexible y se adapta fácilmente a la superficie que deseaba medir*".

En la tarea 4E se les pregunta a los estudiantes ¿Qué dificultad tuvo con la unidad escogida? ¿Escogería otra o no? ¿Por qué? Tres afirman que escogería otra (E2, E3, E5). El estudiante E1 explica "*no tuve ninguna dificultad con la unidad escogida y que no cambiaría la unidad de medida porque le parece más eficaz para medir el área y sacar la medida exacta*". El estudiante E2 opina "si tuve un poco de dificultad, si escogería otra unidad (la pita) porque sería más flexible". También expresa el estudiante E4 "*que no cambiaría la unidad de medida (la cabuya) porque se mueve por todas partes es flexible y fácil de medir y se adapta a todas las curvas*". Explica el estudiante E5 que: *"escogería otra que le diera una medida exacta porque le daría más facilidad para saber la medida completa*".

En la tarea 5A los seis estudiantes escogen cuadrados de diferentes medidas, cada uno de ellos piensan que la unidad escogida es la óptima para medir. Por ejemplo el estudiante E1explica: "*la unidad que escogí fue un cuadrado que era de 2x2, escogí esta unidad porque me pareció más sencilla para medir las figuras*", el estudiante E2 expresa: "*la unidad que escogí fue un cuadrado de 5x4 ya que me pareció mejor unidad de medida grande porque es más fácil para uno no enredarse a la hora de contarlos*", el estudiante E5 explica: "*escogí el cuadrado de 9 cuadros porque es más fácil calcular las partes que sobran y además gasta menos tiempo calcular su medida completa*" y el estudiante E6 expresa: "*yo escogí el cuadrado 3x3 porque no es tan grande y no se me dificulta tanto medirla*".

En la tarea 7F expresan las siguientes respuestas donde se identifica el obstáculo ontológico espontaneo, por ejemplo el estudiante E1 al preguntarle por la unidad de medida que escogió explica: "*porque una forma más sencilla de medir aunque no sabía cuánto medía la unidad*", el estudiante E2 expresa "*yo escogí esa unidad porque es más fácil y flexible y mejor para adaptarla a cualquier superficie*", el estudiante E3 expone "*porque se acomoda más fácil a las* *esquinas o rincones*", el estudiante E4 explica *" porque me pareció una unidad de medida adecuada para medir las superficies*", el estudiante E5 explica: "*yo escogí esa unidad de medida, porque se acomoda a la manipulación que uno la ponga y además se presta para doblarse como uno la manipule*" y el estudiante E6 expone "*porque es una unidad adecuada, porque era corta y lo mediamos más fácilmente sin enredarnos*"

En la tarea 8B encontramos las siguientes respuestas en los seis estudiantes: los estudiantes E1 y E3 afirman: "*porque es una manera más fácil de hallar las medidas, ya que la cabuya se acomoda bien en la superficie*", en esta respuesta encontramos que los estudiantes de manera espontánea expresan facilidad con la unidad de medida escogida. Los estudiantes E2 y E5 explican: "*la escogimos porque es más flexible y más fácil ponerla a la forma que escogiéramos*". Los estudiantes E4 y E6 exponen: "*escogimos la cabuya porque se adapta a la superficie que queríamos medir*".

En la tarea 9B se evidencian los siguientes obstáculos espontáneos en las respuestas de los estudiantes, el estudiante E1 expresa "el *metro porque es una forma más sencilla de medir*", el estudiante E2 explica: "*la cabuya, porque es más fácil de manipular a la hora de medir"*

En la tarea 9C se identifican los siguientes obstáculos espontáneos en las respuestas de los estudiantes: el estudiante E2 explica: "*creo que si por lo que es más fácil de manipular*", el estudiante E3 expone: "*me pareció muy adecuada y fácil*", el estudiante E4 afirma: "*pues por una parte la cabuya es una unidad de medida fácil porque con esa podemos medir las superficies*" , el estudiante E5 explica: "*pues creo que sea adecuado pero me parece bueno aprender*" y la estudiante E6 expresa: "*si fue adecuada porque nos permitió medir el jardín sin dificultad*"

En la tarea 10F se les pregunta a los estudiantes ¿Crees que debería modificar tu unidad de medida?, el estudiante E1 expresa "creo *que no debería cambiarla porque para mí es más fácil de manipular el circulo para medir las figuras*", el estudiante E2 explica: "*creo que no porque con la unidad de medida que he escogido ha sido mucho más fácil a la hora de medir dichas figuras".*

En la tarea 11H se les pregunta a los estudiantes ¿cómo medirían los pedazos que sobran de la unidad de medida?, el estudiante E1 explica: "*mirar el pedazo que sobró y calcular si es 1/2 o 1/3"* y el estudiante E5 afirma: "*calcularía cuanto hace parte ese pedazo que sobro dentro de la unidad de medida completa y lo representaría con fraccionarios*".

5.1.2.2 Obstáculo ontológicos espontáneos referidos a la exactitud en la medición

En la tarea 1A el estudiante E2 afirma que midiendo el cuadrado pequeño de la figura puede obtener una medida exacta y eficaz; él explica "*yo mediría el cuadrado porque es más sencillo de encontrar algo para poder medirlo y porque tengo la capacidad de medir ese cuadrado y es más eficaz para sacar una medida exacta*"

En la tarea 1C se evidencian obstáculos espontáneos en las respuestas de los estudiantes al preguntarles ¿Porque ninguno de los seis midió los sectores circulares de la figura? En el siguiente cuadro se relacionan las respuestas:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	*Porque no me llamó tanto la atención los sectores circulares y para mí era un poco más difícil medir los*

	sectores circulares, creo que no hubiera podido sacar una medida exacta.
E4	*Porque si escogía los círculos sobraría mucho, o tendría que buscar otra unidad de medida*

Tabla 7. Respuestas estudiantes tarea 1C

En la tarea 2B expresan que tuvieron dificultad al calcular la medida de la unidad sobrante (del pedazo de la unidad de medida utilizada para medir las dimensiones de la cancha del colegio), por ejemplo el estudiante E2 explica: "*la dificultad que tuve fue saber cuánto media el pedazo de cuerda que sobró*" y el estudiante E5 Expone: "*que al sobrar un pedazo es difícil calcular cuánto hacia parte de la unidad de medida*"

En la tarea 2C se les pregunta a los estudiantes ¿el pedazo que sobro de la unidad de medida si es importante en la medida? El estudiante E1 explica: "*si es importante porque se necesita para hallar la medida del área*", el estudiante E2 expresa: "*yo creo que si porque sin el pedazo no habría como lógica a la hora de la medida*", el estudiante E3 expone: "*si, ya que es un pedazo que de igual manera nos dará una medida*", el estudiante E5 explica: "*el pedazo que sobró es importante en la medida porque creo que si no se mide, la medida no estaría bien definida*" y el estudiante E6 expresa: "*si, es importante porque también hace parte de la medida y debemos calcularlo para saber la medida exacta*"

En la tarea 3D podemos identificar esas concepciones espontaneas cuando por ejemplo el estudiante E1 explica:" *que los pedazos sobrantes de la unidad de medida si son importantes porque se necesitan para hallar la medida de la figura completa*". Esta concepción espontánea identificada en la tarea 3D se demuestra como el valor real de la medida de las figuras depende también del pedazo de la unidad de medida que queda en las fronteras de las figuras.

Otra concepción espontanea que encontramos en la respuesta del estudiante E6 es cuando afirma "*que también hace parte de la medida*", pues el reconoce o intuye que el pedazo de la unidad de medida es importante y necesario para darle la medida total a la figura y también en esta respuesta el estudiante se refiere a tener en cuenta los pedazos de unidad medida que están en la frontera de las figuras y que se deben medir.

Continuando con la tarea 3D el estudiante E3 explica: "que *el pedazo que sobra en la medida si son importantes porque de alguna manera nos dan una medida*". En esta respuesta se puede inferir que la estudiante sabe que debe tener en cuenta toda la unidad de medida para poder obtener un valor acertado en la medición de las figuras. El estudiante E5 afirma: "*si, los pedazos sobrantes son importantes en la medida porque si no, la medida no sería completa*". Aquí podemos observar que la estudiante infiere que se debe medir toda la figura para obtener un valor real de la medición de las figuras, así no encuentre el procedimiento para realizarla.

En la tarea 4E el estudiante E5 explica que: "escogería *otra que le diera una medida exacta porque le daría más facilidad para saber la medida completa*".

En la tarea 8C se les pregunta a los estudiantes que si ¿el pedazo que sobra es importante en la medida?, el estudiante E3 explica: "*que si es importante el pedazo sobrante ya que de igual manera nos da una medida*", el estudiante E4 explica: "el pedazo que sobro no es importante en la medida porque no se cuenta" y el estudiante E5 expone: "*el pedazo que sobra es importante en la medida porque si no, pues sería incompleta*"

En la tarea 8F podemos evidenciar que el estudiante E4 de manera espontánea afirma: "*que la cabuya se movía mucho entonces no nos daba la medida exacta de la malla*"

En la tarea 9B observamos el siguiente obstáculos ontológicos espontaneo al solicitarle al estudiante ¿Qué unidad de medida utilizarías y por qué? El estudiante E6 expone: "*yo utilizaría la cabuya porque se ajusta la superficie que quiero medir y así obtendría una medida más exacta*"

En la tarea 9C se les pregunta a los estudiantes ¿crees que la unidad de medida fue la adecuada?, la estudiante E5 explica: "*escogería otro, porque creo que sería más exacto el resultado*"

En la tarea 10F se le pregunta al estudiante ¿crees que debería modificar tu unidad de medida? Y el estudiante E5 explica: "*sí, creo que debería cambiar la unidad porque no es la más apta y tampoco tiene exactitud*"

En la tarea 10G se les pregunta a los estudiantes ¿encontraste alguna dificultad?, el estudiante E2 afirma: "*si, la cual fue haber medido las figuras, ya que para medirlas tocaba recortar los cuadros más pequeños*", el estudiante E3 expresa: "*si, al tratar de dar una medida a la figura*".

En la tarea 10H se les pregunta a los estudiantes ¿Cómo mediste los pedazos sobrantes?, el estudiante E1 explica: "*mirando la cantidad de unidad que tiene por fuera y por dentro para así darle una medida*"

En la tarea 11B los estudiantes expresan las siguientes respuestas de tipo ontológico inducido por la enseñanza, por ejemplo el estudiante E1 explica: "*cubriendo toda el área de la figura y después contar los círculos con los que se cubrió el área y luego definir el área de la figura* *según la cantidad de círculos que haya obtenido*", el estudiante E2 afirma: "*pues yo con los círculos los pondría encima de la figura que tenga medida para haber que tanta área ocupa lo cual pienso que me daría más área*", el estudiante E3 expone: " *contando cuantos cuadrados me dieron y los que quedaron por fuera sacarle una medida*", el estudiante E4 explica: "*yo mediría poniendo los cuadrados y los voy marcando para que no se me pierda la medida y con los pedazos que sobren los divido*", el estudiante E5 afirma: "*pondría la forma de la figura y sumaria los espacios que sobraron con otros*" y el estudiante E6 explica: "*Rellenando cada parte de la figura con la unidad que escogí*".

En la tarea 11D se le pregunta a los estudiantes si encontraron alguna dificultad para llevar a cabo la tarea propuesta, el estudiante E3 expresa: "*es complicado ya que hay que tratar de darle un resultado a su medida y no sé cómo podría calcularlo*" y el estudiante E5 explica: "*si, encontré dificultad para saber la medida total con los pedazos que sobraban*"

En la tarea 11E se le propone que discutan y comparen los instrumentos de medida y las medidas, el estudiante E1 afirma: "*los instrumentos fueron diferentes y por eso las medidas no fueron exactas*".

En la tarea 11G se le pregunta los seis estudiantes ¿crees que los pedazos que sobraron son importantes en la medida? El estudiante E1 explica: "*si son importantes porque se necesitan para hallar la medida del área*", el estudiante E2 expone: "*creo que los pedazos son importantes*", el estudiante E3 explica "*si, ya que de alguna manera tienen que dar una medida*", el estudiante E4 explica: "si *son importantes en la medida porque con ello se puede dar un resultado acertado de la figura*", el estudiante E5expone: "*sí, creo que son importantes que si no diéramos el valor de esos pedazos seria incompleta e incorrecta*" y el estudiante E6 explica: "*si,* *porque forman parte de la medida y equivalen a una parte de la unidad con la que estamos midiendo*"

En la tarea 11H se les pide que expliquen ¿cómo harían para medir los pedazos sobrantes de la unidad de medida?, el estudiante E2 explica: "*yo separo la unidad de medida en varias partes y de ahí saco mis medidas si está más afuera o adentro*" y el estudiante E6 expresa: *"calcularía a que pedazo de la unidad de medida equivale y le daría un valor a ese pedazo sobrante*".

En la tarea 11I se les pregunta a los estudiantes ¿Qué pasa con el pedazo que sobra? El estudiante E1 afirma: "*después de que ya lo haya utilizado para sacar la medida del área olvido los pedazos que sobran"*, el estudiante E2 expresa: "*con el pedazo que sobra se mide y se calcula para saber cuántos cuadros me sobraron*", el estudiante E3 expresa: "*los medí igual, les di un valor ya que de igual manera nos da una medida*", el estudiante E5 afirma: "*los sumo con otros pedazos que hayan sobrado para haber si me completa uno sino lo represento en el fraccionario que representaría*" y el estudiante E6 expresa: "*ya después de haberlo medido simplemente sabría a qué pedazo de la unidad de medida equivale y tendría un valor exacto del pedazo que queda dentro de la figura*"

En la tarea 12D se encuentran las siguientes respuestas: el estudiante E1 afirma: "*los pedazos sobrantes si son importantes porque hacen parte de la unidad*" el estudiante E2 explica: "*yo pienso que son importantes porque con ellos se puede plantear el problema*" el estudiante E3 expone: "si porque de igual manera los pedazos nos dan una medida", el estudiante E4 explica: "*los pedazos que quedaron por fuera si son importantes en la medida*", el estudiante E5 afirma: "*si creo que son importantes porque la medida no estaría completa*" y la estudiante E6 explica: "*si porque también están midiendo la figura*"

5.1.2.3 Obstáculo ontológicos espontáneos referidos a las características de la unidad.

En la tarea 3B los seis estudiantes de forma espontánea le dan un valor a la unidad de medida que queda en el borde o en el límite de las figuras, sin realizar un proceso matemático adecuado. Ellos utilizan un procedimiento acomodado a su condición cognitiva y también de acuerdo a su percepción sensorial el cual les dificulta la medición del pedazo sobrante de la unidad de medida, como lo afirma Pozo y Carretero (1987) "las concepciones espontaneas son construcciones más bien personales del alumno, es decir, proceden de su propia actividad intelectual" (p. 43).

Ahora bien en cuanto al origen de las concepciones alternativas, Pozo y Gómez (citado por López, Orrego y Tamayo, 2016) explican que se diferencian en su origen y se pueden describir de la siguiente manera:

> *Es así como a través de las vías sensoriales, culturales o escolares, los estudiantes adquieren concepciones alternativas tan resistentes al cambio. Pozo, et al. 1991, no pretenden establecer que estas concepciones se dan por separado, sino que están íntimamente ligadas, pues las analogías deben formarse a partir de concepciones existentes y las concepciones socialmente inducidas deben asimilarse en función de los conocimientos previos, donde influyen indudablemente las concepciones espontáneas*.(p. 1051).

En la tarea 5A los estudiantes utilizan el cuadrado para medir las figuras. En las respuestas de los seis estudiantes se evidencian los siguientes obstáculos espontáneos: el estudiante E1 explica: "*que escogió el cuadrado de 2x2 porque era más sencillo para medir las figuras*", el E2 expresa: "*facilidad de medir con el rectángulo de 5x4*". El estudiante E3 explica que: "*escogió el cuadrado de 3x3 para que los cuadrados quedaran de una buena manera*". El estudiante E4 afirma: "*utilizó el cuadrado de 5x5 porque es grande y se mide bien la figura*". El estudiante E5 expone: "*escogió un cuadrado de 9 cuadros porque es más fácil para calcular las partes que sobran y que gasta menos tiempo para calcular sus medidas completas*" y la E6 explica: "escogió *el cuadrado de 3x3 porque no es tan grande y no se me dificulta tanto medirlo"*.

En las respuestas anteriores podemos inferir, que los estudiantes no son capaces de resolver matemáticamente el pedazo de unidad de medida que queda en el borde de las figuras, también podemos ver como los estudiantes no muestran un proceso de selección objetiva para elegir la unidad de medida que les permita realizar un proceso iterativo de la medición de las figuras, más bien acuden a su percepción sensorial. En términos de Pozo y Carretero (1987):

Las concepciones espontáneas suelen ser además implícitas, esto es, constituyen en lo que se ha dado en llamar teorías-en-acción (Driver y Erickson, 1983; Karmiloff- Smith e Inhelder, 1975) de las que muchas veces el alumno ni siquiera es plenamente consciente, siendo en consecuencia incapaz de verbalizarlas correctamente. En otras palabras, el alumno puede predecir correctamente un suceso pero es incapaz de decirnos por qué ocurre precisamente así. Ello no indica que carezca necesariamente de ideas con respecto al fenómeno sino posiblemente que no es capaz de reflexionar sobre ellas. (p.43).

En la tarea 7B podemos evidenciar los obstáculos ontológico espontáneo relacionado con las características de la unidad, por ejemplo el E1explica "*depende si la unidad es más corta o más larga de la que teníamos si va a ser diferente"*. El estudiante E2 expone: "*no, porque si uno tiene en la cabuya 1m y coge un palo de 1m daría lo mismo*" el estudiante E3 explica: "*no, porque lo que depende es de nuestra forma de medir con dicha unidad de medida"*, por otro lado el estudiante E4 explica: "si *porque si la otra unidad de medida tiene diferente medición, nos daría diferente la medida*", el estudiante E5 afirma: " *sí, creo que podría tener una medida diferente* *porque no se perderían algunos pedacitos*" y la estudiante E6 afirma que: "*sí porque otra unidad podría medir más o menos*"

En la tarea 7D se pueden identificar los siguientes obstáculos ontológicos espontáneos, de acuerdo con las respuestas de los estudiantes, por ejemplo el estudiante E2 afirma que: "porque *me dio la impresión que las cuerdas no median lo mismo*", en esta respuesta podemos inferir que él piensa que las diferencias en las medidas de los compañeros tiene que ver con la longitud de la unidad de medida. Otra respuesta que nos permite evidenciar las concepciones espontaneas, es la que nos brinda el estudiante E3 afirma "*que la unidad no tenían igual medida*".

En la tarea 10G se le pregunta a los estudiantes ¿encontraste alguna dificultad?, el estudiante E5 afirma: "*si, porque las figuras no concuerdan muy bien con la unidad de medida*" y la estudiante E6 expresa: "si *porque la unidad de medida que escogí era más grande que las figuras y me sobraron muchos pedazos*".

5.2 Obstáculo de tipo epistemológico.

Se encontró lo siguiente: de las 347 unidades de análisis, (una unidad de análisis es una respuesta en su globalidad del estudiante) 176 corresponden a obstáculo epistemológico de conocimiento general.

A continuación se caracterizará el obstáculo de tipo epistemológico:

5.2.1 Obstáculo epistemológico de conocimiento general.

Los obstáculos de tipo epistemológico de conocimiento general encontrados se caracterizaron entre: la relación entre lo continuo y lo discreto, cambio de unidad, selección de unidad, la utilización de la medida natural, procesos de asignación numérica y cálculo de área.

5.2.1.1 Obstáculo epistemológico de conocimiento general referido a la relación entre lo continuo y lo discreto.

En la tarea 2A se puede observar como cinco de los seis estudiantes no expresan el resultado de la medición en términos de cantidades continuas, por ejemplo el estudiante E1 explica que la medida obtenida fue: “*largo = 16 cabuyas y 1 pedazo, ancho = 12 cabuyas y 1 pedazo*”, el estudiante E2 explica: “*largo 15 1/3, ancho = 12 1/4"*, el estudiante E4 expresa: “*largo = 15 cabuyas y un pedazo, ancho = 12 cabuyas y un pedazo”*, el estudiante E5: “*largo 15 y 1/3, ancho = 12y 1/9*” y el estudiante E6 expresa: “*largo = 15 cabuyas 1/3, ancho = 12 cabuyas 1/4”*.

En la tarea 2B se les pide a los estudiantes medir las dimensiones de la cancha del colegio, el estudiante E3 explica: “*la dificultad que tuve fue al calcular la medida de los pedazos sobrantes*”, es decir aquí podemos inferir que no conoce el paso de la unidad discreta a unidad continua. De acuerdo con los lineamientos curriculares (1998):

Aunque las magnitudes que nos ocupan son de naturaleza continua, en los primeros ensayos tendientes a encontrar una estimación de sus medidas, la repetición reiterada de patrones susceptibles de ser contados mediante los números naturales parece ocultar el carácter continuo de dichas magnitudes. Podríamos decir que, en este caso, hay un esfuerzo por capturar lo continuo (magnitudes) con lo discreto (números naturales) (p. 44).

En la tarea 2C se le pregunta al estudiante ¿el pedazo que sobro de la unidad de medida si es importante en la medida? Y el estudiante E4 explica: “*si es importante en la medida porque se puede dividir en tercios y así daría una medida aceptable*”.

En la tarea 3B en la respuesta del estudiante se evidencia el obstáculo epistemológico de conocimiento general, donde se desea capturar lo continuo con lo discreto, es decir se relaciona con proceso de conteo y no de medición. Otras respuestas de los estudiantes también permiten ver como ellos no encuentran la manera de medir los pedazos sobrantes de la unidad de medida, y expresan sus respuestas con fraccionarios, obviamente estos fraccionarios no representan el valor real del mismo.

E n el siguiente cuadro podemos evidenciar lo anteriormente expuesto con la respuesta de los estudiantes:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E2	*Figura A: 90 círculos y 1/30.* *Figura B: 20 círculos con 1/20.* *Figura C: 23círculos con 1/26.*
E4	*Figura A: 81 cuadros y 27 por fuera.* *Figura B: 74 cuadros y 30 por fuera.* *Figura C: 72 cuadros y 29 por fuera.*
E5	*Figura A: 106 círculos y 1/6.* *Figura B: 91 círculos con 1/2.* *Figura C: 87círculos con 1/2.*
E6	*Figura A: 60 círculos y 4/2.* *Figura B: 31 círculos con 3/3.* *Figura C: 41 círculos con 8/2.*

Tabla 8. Respuestas estudiantes tarea 3B

En las respuestas de los estudiantes podemos también evidenciar procesos de conteo y no de medición.

En la tarea 3C los estudiantes E1, E2 y E4 expresan en sus respuestas que la mayor dificultad que hacían con los pedazos sobrantes y como medirlos, Los estudiantes E3 y E6 explican que la mayor dificultad fue tomarle medidas a una figura amorfa. El estudiante E5 afirma:

"*las mayores dificultades que tuve al medir estas figuras fue al medir no sabía calcular exactamente y sumando todos porque era representado por decimales y no sabría encontrar la fracción que lo representara pero me parece que con el circulo es la manera más sencilla para hallar el área de estas figuras*"

En la tarea 3D el estudiante E4 afirma: "*si son importantes en la medida porque esos pedacitos que sobran los puedo dividir en tercios, entonces así daría una medida aceptable*", En esta respuesta podemos observar como el estudiante hace referencia a hacer una estimación del valor del pedazo de unidad de medida que queda en la frontera de las figuras.

En la tarea 3D el estudiante E3 explica que:" *el pedazo que sobra en la medida si son importantes porque de alguna manera nos dan una medida*". En esta respuesta se puede inferir que la estudiante sabe que debe tener en cuenta toda la unidad de medida para poder obtener un valor acertado en la medición de las figuras. El estudiante E5 afirma:

"*si, los pedazos sobrantes son importantes en la medida porque si no, la medida no sería completa*"

Aquí podemos observar que la estudiante infiere que se debe medir toda la figura para obtener un valor real de la medición de las figuras, así no encuentre el procedimiento para realizarla. El estudiante E6 expresa que si son importantes en la medida porque también hacen parte de la medida. Aquí en esta respuesta el estudiante se refiere a tener en cuenta los pedazos de unidad medida que están en la frontera de las figuras y que se deben medir.

En la tarea 4C los seis estudiantes expresan que la medida no fue exacta, pero realizan procesos de estimación en la medición, el estudiante E2, E3 y E5 realizan procesos de estimación, expresa la respuesta en fraccionarios, estos fraccionarios no corresponden realmente a un proceso matemático lógico. El estudiante E4 y E6 expresan la respuesta de la medición en pedacitos, pedazotes y pedazos (se infiere que desconoce el proceso de medición para determinar la medida del pedazo de la unidad de medida sobrante). A continuación se relacionan las respuestas de los estudiantes:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E2	*Largo: 6 palos con 1/8 aproximadamente* *Ancho: 3, 1/5*
E3	*Largo: 6 palos con 1/8 aproximadamente* *Ancho: 3, 1/5*
E4	*Largo: 5 cabuyas y 1 pedacito* *Ancho: 3cabuyas y un pedazote*
E5	*Largo: 5 cabuyas y 1/5 de cabuya* *Ancho: 3 cabuyas y 1/3 de cabuya*
E6	*Largo: 5 cabuyas y un pedazo* *Ancho: 3cabuyas y un pedazo*

Tabla 9. Respuestas estudiantes tarea 4C

El estudiante E2 expone: "*para calcular lo que me sobro imaginé que la unidad de medida tenía 1 mt por lo cual calcule que me había sobrado 1/8*", El estudiante E3 explica: "*el pedazo que sobraba yo le di una medida en lo largo de 1/8 y de ancho 1/5, y los medí calculando ya que los pedazos sobrantes eran muy cortos*"

En la tarea 4E Tres estudiantes (E2, E3, E5) afirman haber tenido dificultades con la unidad de medida escogida, el estudiante E2 explica: *"que la unidad de medida era muy larga*", el estudiante E3 afirma que le causó dificultad cuadrar el palo en las esquinas y el estudiante E5 no refiere su respuesta a la unidad de medida, sino al hecho que sabía qué hacer con el pedazo que sobraba en cuanto a escoger otra unidad de medida.

En la tarea 5B los seis estudiantes no expresan en sus respuestas procesos matemáticos para la medición del área de las figuras, solo expresan la forma operativa de hacerlo, esta situación se evidencia en las respuestas de los estudiantes, por ejemplo el estudiante E1 explica "contando todos los cuadritos que hay dentro de la figura, el estudiante E2 explica: "con *un cuadro lo suficientemente grande para no confundirme a la hora de contar los completos*" , el estudiante E3 afirma que "*con cuadrados de 3x3 y luego contaría los cuadrados y los pedazos que queden por fuera de las figuras*", el estudiante E4 expone: "*rellenado con los cuadros 5x5*" y la estudiante E5 afirma "*la unidad de medida la pongo en una parte de la figura y del mismo tamaño coloco en toda la figura así sobren partes de la unidad y calcularía cuanta parte ocupa esa parte en la figura completa*", y el estudiante E6 afirma: "*rellenado la figura completamente y analizando posteriormente cada pedazo de cuadrado que quede por fuera* "En las respuestas de los estudiantes se infiere que no hay un proceso de medición sino de conteo.

En la tarea 5C Las cinco medidas expresadas por los estudiantes son diferentes, cuatro de ellos utilizaron diferente unidad de medida (cuadrados y rectángulos de diferente tamaño) y uno de ellos utilizó cuadrados del mismo tamaño. Se puede evidenciar que el uso de unidades diferentes no es la causa para producir medidas diferentes pues dos estudiantes utilizaron la misma unidad de medida y no coinciden en las respuestas de la medida, este es un obstáculo epistemológico donde se muestra un resultado en la medición que no es acorde a un proceso matemático adecuado. Ahora observemos las respuestas de los estudiantes en el siguiente cuadro:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	*Figura A: 184 cuadritos y 37 pedacitos de cuadro sobrante* *Figura B: 96 cuadritos y 54 pedacitos de cuadro sobrante* *Figura C: 86 cuadritos y 35 pedacitos de cuadro sobrante*
E2	*Figura A: 38 con 8/9.* *Figura B: 25 con 3/8.* *Figura C: 29 con 5/6.*
E4	*Figura A: 39 y 21/3.* *Figura B: 21 con 8/2.* *Figura C: 25 con 16/5*
E5	*Figura A: 59 y 2/18 cuadros.* *Figura B: 45 y 1/3 cuadros.* *Figura C: 37 y 1/36 cuadros.*

E6	*Figura A: 50 cuadros y 31 medios.* *Figura B: 19 cuadros y 11/3.* *Figura C: 45 cuadros y 17/4.*

Tabla 10. Respuestas estudiantes tarea 5C

En la tarea 5D encontramos los siguientes obstáculos epistemológicos en las respuestas de los estudiantes: El estudiante E1 explica que: "la *mayor dificultad fue saber la medida de los pedazos que sobraban*". El estudiante E2 expresa: que "*la mayor dificultad fue contar los cuadros y la medida de los cuadros que quedaban por fuera*". El estudiante E3 expresa: "*medir los pedazos de los cuadrados que quedaban en la frontera de la figura".* El estudiante E4 manifiesta: "porque *la unidad de medida que escogió cubrió bien por dentro de la figura y no sobraron muchos cuadrados*". El estudiante E5 expresa: "las *partes de la unidad de medida que sobraban tenia dificultad para medirlos y la cuenta se pierde fácil*". En las respuestas anteriores podemos inferir que los cinco estudiantes no recuerdan o no saben el procedimiento matemático para medir las figuras y también se puede inferir que presentan dificultad para pasar de la unidad discreta a la unidad continua.

En la tarea 5E Los seis estudiantes expresan que la medida no fue exacta, El estudiante E1 no muestra procedimiento para hallar la medida del área de la figura, pues expresa que: "*para poder sacar la medida de los pedacitos que sobraban fue mirando que la mayoría tenía menos de la mitad por fuera y entonces esos pedacitos que sobraban los conté*" y el estudiante E2 explica que la medida no fue exacta, y expresa: "*mi medida fue 38 cuadros con 8/9 porque calcule cuando conté todos los cuadros los que me habían quedado por fuera*". Los estudiantes E3 y E4 comentan que la medida no fue exacta porque le quedaron cuadrados por fuera. El estudiante E5 afirma "*que la medida no fue exacta, todas las medidas son diferentes, con* *diferencias muy altas y con muchos espacios sobrantes*" y el estudiante E6 explica que la medida no fue exacta por que le quedaron cuadros por fuera.

En la tarea 7F el estudiante E1 afirma: "*No fue exacta porque sobraba un pedazo, ancho fue 2 cabuyas y un pedacito y de largo 34 cabuyas y un pedazo*", el estudiante E5 expone: "*No, mi medida no fue exacta me sobro un pedazo que medí doblando la cabuya en el pedazo que sobró para saber cuánto ocupa de la cabuya*", el estudiante E6 explica: "No*, mi medida fue largo = 32 cabuyas y un pedazo, ancho = 2 cabuyas y un pedazo*"

En la tarea 8C se les pregunta a los estudiantes ¿la medida fue exacta? los estudiantes E1 y E3 explican que: "*la medida no nos dio exacta ya que a la hora de medir nos sobraron pedazos de la cabuya, largo: 25 cabuyas y un pedazo, ancho: 61 cabuyas y un pedacito*", los estudiantes E2 y E5 explican: "*la medida no fue exacta, ancho = 25 pedazos y una quinta parte de ella. Largo = 61 pedazos y un tercio de ella*", los estudiantes E4 y E6 afirman: "*la medida no fue exacta porque en cada medida sobro un pedazo, ancho: 62 cabuyas y un pedazo, largo: 26 cabuyas y un pedazo"*

En la tarea 8D se les pregunta ¿Cuánta área de malla se necesita para hacer el cerramiento del colegio? Se identifica el obstáculo en la respuesta de los estudiantes, por ejemplo los estudiantes E1 y E3 exponen: "*largo 25 cabuyas y un pedazo y ancho: 61 cabuyas y un pedacito*", el estudiante E4 y E6 explican: "*ancho 62 cabuyas y 1/4, largo 26 cabuyas y 1/2*" "los estudiantes E2 y E5 explican: "*ancho = 25 cabuyas y una quinta parte de una, largo = 65 cabuyas y una tercera parte*".

En la tarea 8F podemos evidenciar que el estudiante E1 explica "*poder saber la medida que obtenía el pedazo que sobra*" y el estudiante E3 explica "*al tratar de medir el pedazo sobrante*"

En la tarea 9D se les pregunta a los estudiantes ¿tú medida fue exacta? El estudiante E1 responde: "*no fue exacta y no supe resolver la situación muy bien porque no podía medir el pedazo que sobraba*", el estudiante E2 explica: "*la medida que yo obtuve no fue exacta me dio un poco de dificultad resolver la situación porque sobraba una parte de la cabuya y no sabía cuánto media*", el estudiante E5 expresa: "*mi medida fue 35 cabuyas y 1/5 de cabuya*" y los estudiantes E4 y E6 dicen: " *no fue exacta porque nos sobro un pedazo*"

En la tarea 10H se le pregunta al estudiante ¿Cómo midió los pedazos sobrantes?, el estudiante E4 responde: "*pues yo observe bien los pedacitos que sobraron, y sobraron muy poquitos entonces yo le pongo que sobro 3 tercios de cada uno*"

En la tarea 11D se le pregunta al estudiante si encontró alguna dificultad para medir la figura propuesta, el estudiante E3 expresa: "*si, al tratar de calcular los pedazos que sobraban*"

En la tarea 11F al preguntarles por la medida de la figura a los estudiantes, el estudiante E1 afirma: "*18 círculos y 10 pedacitos de círculos sobrantes*", el estudiante E2 expresa: *"13 con 1/5*", el estudiante E3 afirma: *"18 cuadrados y 11 por fuera*", el estudiante E4 expresa: "*me dio 6 cuadrados y 4/3*", el estudiante E5 explica: "*11 círculos y 1/5 de circulo*" y el estudiante E6 expresa: "*3 cuadrados 3/2*".

En la tarea 12C se les pregunta ¿Cuál es la medida tuya? El estudiante E1 expresa: "*superficie1 = 35 círculos y 29 pedacitos de círculos sobrantes, superficie2 = 36 círculos y 26 pedacitos de círculos sobrantes, superficie3 = 31 círculos y 22 pedacitos de círculos sobrantes y superficie4 = 51 círculos y 32 pedacitos de círculos sobrantes*"? El estudiante E2 expresa: "*superficie1 = 28 con 1/8, superficie2 = 15 cuadros con 1/20, superficie3 = 13con 1/19 y superficie4 = 35 cuadros con 1/22*", el estudiante E4 explica: "*superficie1 = 42cuadrados y de* *los 41 cuadrados por fuera me quedaron 16, superficie2 = 45cuadrados y de los 45 cuadrados por fuera me quedaron 16, superficie3 = 41cuadrados y de los 41 cuadrados por fuera me quedaron 21 y superficie4 =51cuadrados y de los 51 cuadrados por fuera me quedaron 15*", el estudiante E5 afirma: "*superficie1 = 14 círculos y 1/4 de círculo , superficie 2 = 13 círculos y 1/4 de círculo, superficie3 = 7 círculos y 2/9 de círculo y superficie 4 = 26 círculos y 1/6 de círculo,* el estudiante E6 expresa: : "*superficie1 medida 17 listones total 5 listones y 12 pedazos , superficie 2 medida 15 listones total 4listones y 9 pedazos superficie3 medida 14 listones total 3 listones y 11 pedazos y superficie 4 medida 26 listones total 7 listones y 19 pedazos*

Cuando hablamos de estas tensiones, Vasco (2014) expresa que la tensión entre lo continuo y lo discreto siempre ha existido y que no ha sido tan sencillo, ni tampoco tan fácil. Y demuestra cómo esta tensión ha sido tan fuerte que ha conllevado a fracasos matemáticos:

Esta tensión entre lo continuo y lo discreto no es ni mucho menos trivial. El alcance teórico de esta tensión se vive aun cuando se leen las disputas eleáticas entre parmenidianos y heraclitianos, especialmente las paradojas de Zenón, y se nos recuerda repetidamente a lo largo de la historia de las matemáticas con el fracaso de las sucesivas aritmetizaciones del continuo: el fracaso de los fraccionarios cuando se probó la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado; el fracaso de la geometrización del plano con la regla y el compás cuando se probó la imposibilidad de la duplicación del cubo; el fracaso de la algebrización del plano complejo cuando se demostró la trascendentalidad de los números de Liouville, de e y de π; el fracaso de la enumeración de los puntos del intervalo unidad cuando se probó por medio del proceso diagonal de Cantor la no enumerabilidad de las sucesiones infinitas de dígitos en cualquier base finita; el fracaso de la extradición de los infinitesimales con la prueba lógica de su inocencia por Abraham Robinson; el fracaso de la unicidad y la categoricidad de los reales con la *construcción de modelos por ultraproductos y sucesiones y por la construcción de reales semi-continuos y de Dedekind en los topos elementales; y aun el fracaso de ponerle cotas superiores al cardinal del continuo con la demostración de la indecidibilidad de la hipótesis del continuo por Gödel y Cohen. Después de dos mil quinientos años de investigaciones matemáticas, aún no podemos, y tal vez nunca podamos dominar lo continuo con lo discreto.*

Todos estos deslumbrantes análisis matemáticos y muchos más: todo el análisis intuicionista de Brouwer y Heyting, todo el análisis constructivista de Bishop, y todo el análisis numérico de la mal llamada "matemática aplicada" y la informática, están esperando a ser construidos y reconstruidos sin necesidad de los reales por los que logren familiarizarse tanto con los abstractos sistemas conceptuales de números fraccionarios, que se les conviertan en concretos. (p. 24-25)

Otro aspecto bastante interesante en la investigación es la expresión que hacen en el resultado de la medición, pues la mayoría de los estudiantes realizan un juicio cualitativo de ésta, al expresar el resultado de la medición con expresiones tales como: veinte cabuyas y un pedazo, pedacito, pedazote. Aquí podemos inferir como los estudiantes no encuentran como resolver o dar valor, o reconocer a que parte de la unidad de medida corresponde el pedazo sobrante.

La dificultad anteriormente mencionada ha persistido por generaciones. En palabras de Vasco (2014):

Debo empezar recordando que prácticamente para ningún alumno de secundaria, y me atrevo a decir que para ninguno de primaria, existe el conjunto de los números fraccionarios. Solo existen para él algunos sistemas de fraccionarios, con algunas operaciones y relaciones, sistemas que permanecen por mucho tiempo incompletos y desconectados, bastante alejados del *cuerpo usual de los fraccionarios (Q, +, •). Y aun el más elemental de ellos existe para ese alumno solo después de haber sido construido por él mismo con su actividad inteligente de elaboración de nuevos sistemas conceptuales a partir de sistemas concretos. (p. 23).*

5.2.1.2 Obstáculo epistemológico de conocimiento general referido con el cambio de unidad

En la tarea 2A el estudiante E3 expresa su respuesta en la medida cambiando la unidad de medida sin tener un proceso matemático lógico, cambia la cabuya por cm (explica el estudiante que el pedazo que sobra de la unidad de medida lo mide con los dedos y explica que el dedo mide un centímetro de ancho). El estudiante E3 explica que la medida obtenida fue: "15 = cabuyas con 30 cm y el ancho = 12 cabuyas con 10 cm".

En la tarea 3B el estudiante 3 expresa la respuesta en la medición de las figuras haciendo cambio de unidad, el estudiante afirma que el pedazo que sobra lo mide con el dedo índice y que su dedo índice tiene un centímetro de ancho. En el siguiente cuadro se relaciona la respuesta del estudiante:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E3	*Figura A: 28 listones y 10 cm.* *Figura B: 25 listones con 19 cm.* *Figura C: 27 listones con 19 cm.*

Tabla 11. Respuestas estudiantes tarea 3B

En la tarea 4C los seis estudiantes expresan que la medida no fue exacta, pero realizan procesos de estimación en la medición, como también cambio de unidad. El estudiante E1 hace cambio de unidad (cabuya por cm) cuando expresa: "*ancho: 3 cabuyas y 4 cm de la cabuya que sobro*, *largo: 7 cabuyas y 7 cm de la cabuya*"

En la tarea 5C Se puede evidenciar el cambio de unidad en la respuesta del estudiante:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E3	*Figura A: 88 cuadros y 23 cm.* *Figura B: 40 cuadros y 32 cm.* *Figura C: 54 cuadros y 20 cm.*

Tabla 12. Respuestas estudiantes tarea 5C

El estudiante explica que el cambio de unidad se dio porque "*los cm los hallé midiéndolo con mis dedos ya que 1 dedo de ancho mide 1cm y luego los sume y así obtuve el resultado de lo cm*"

En la tarea 7G se identifica en las respuestas de los estudiantes el obstáculo epistemológico referido al cambio de unidad, cuando se les pregunta que si la medida que obtuvieron fue exacta por ejemplo el estudiante E3 explica: "*No, ya que mi medida fue: largo 31 cabuyas y 12 cm y de ancho 2 cabuyas y 16 cm*", el estudiante E4 afirma: "*No, mi medida fue: largo 32 cabuyas y 60 cm y ancho: 2 cabuyas y 5 cm*"

En la tarea 8C expresa cambio de unidad cuando se le pide que calcule la medida del pedazo de unidad sobrante, el estudiante E5 explica "*yo lo mediría con los dedos ya que un dedo mide 1cm de ancho y así podemos saber cuántos cm tiene ese pedazo*"

En la tarea 8D en la respuesta del estudiante E3 se evidencia cambio de unidad cuando él expresa: "*largo: 25 cabuyas y 20 cm, ancho: 61 cabuyas y 16 cm*"

En la tarea 9A se presenta el siguiente obstáculo epistemológico relacionado con el cambio de unidades, identificado en la respuesta del estudiante E6 el cual explica: "*35 cabuyas y 20 cm, yo calcule los 20 cm porque sobro un pedacito de cabuya y mirándolo o sea calculándolo bien daría 20 cm*"

En la tarea 9D se le pregunta al estudiante ¿tu medida fue exacta?, el estudiante E3 explica: "*no fue exacta ya que me dio 35 cabuyas con 35 cm*"

En la tarea 10D se evidencia el siguiente obstáculo epistemológico en la respuesta del estudiante E6 explica: "*cambiar el tipo de unidad y utilizar uno más pequeño*".

En la tarea 11H se le pide que explica cómo harían para medir los pedazos sobrantes de la unidad de medida, el estudiante E3 explica: "*calculando entre lo que queda por fuera y por dentro, sumando los pedazos por fuera y así nos dará la cantidad o los cm que se encuentran por fuera de la superficie*".

En la tarea 12D se le pregunta al estudiante ¿Cuál fue la medida tuya? El estudiante E2 responde: "*de la primera figura 43 cuadrados 28 cm, la segunda figura 45 cuadrados 30 cm, la tercera 40 cuadrados 20 cm y la cuarta 71 cuadrados 60 cm*"

Aquí podemos deducir como los estudiantes de manera insistente hacen referencia a la medida antropométrica como solución al resultado de su medición. La necesidad de medir o comparar es muy antigua, y cada pueblo buscaba una unidad de medida(o una forma de relacionar cantidades) de tal forma que la utilizaba de acuerdo a sus necesidades. El primer vislumbre de medición aparece con las partes del cuerpo humano (medida antropométrica), y después se buscan otra forma de tratar de medir y buscan unidades de medida en sus necesidades básicas y en relaciones tales como: comerciales, transporte, creencias. Acerca de la medida antropométrica, Kula (1999) Afirma: "*el hombre primitivo mide el mundo con su propio cuerpo. Para aprehender objetos independientes de sí mismo se sirve de los miembros de su cuerpo: pie, brazo, dedo, mano, brazos abiertos, paso.*" (p. 31). También afirma que:

Las medidas tales como el codo, puño, pie –en la órbita de nuestra civilización- han sido utilizadas hasta hace poco, hasta la plena hegemonía del sistema métrico, siendo ya nociones abstractas. Ya se trataba de la generalización de "el pie" y no de "mi pie" o "tu pie". Ya su longitud era fija y atemporal (aunque evolucionable en el transcurso de los siglos) y no mayor o menor según cada caso particular." (p. 31).

5.2.1.3 Obstáculo epistemológico de conocimiento general referido a la selección de la unidad

El enfoque de la selección de la unidad de acuerdo a las respuestas de los estudiantes se basó en procesos visuales sin ningún tipo de estrategia, apoyados en elementos geométricos que están relacionados con la medición. En cuanto a la selección de unidad, los lineamientos curriculares (1998) plantean:

La apreciación del rango de las magnitudes y la selección de unidades, son habilidades poco desarrolladas en los niños y aún en las personas adultas debido al tratamiento libresco y descontextualizado que le da a la medición dentro de las matemáticas escolares. Antes de seleccionar una unidad o un patrón de medida es necesario hacer una estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta, por ejemplo, la altura de una puerta, la longitud de un camino, el peso de un objeto, la duración de un evento, etc. (p. 44).

En la tarea 1B 4 estudiantes (E1, E2, E3, E4) escogen como unidad de medida el cuadrado, el estudiante E5 escoge el círculo y el estudiante E6 escoge el listón. Aquí los estudiantes refieren la unidad de medida con el objeto a medir y no tienen en cuenta todas las características medibles del objeto; y aunque el estudiante E5 escoge el círculo no mide los sectores circulares de la figura, pues él afirma que no es capaz de medirlos.

En la tarea 9C encontramos respuestas tales como la que expresa el estudiante E1 explica: "*pues fue un poquito incomodo porque se movía*", el estudiante E2 explica: "*pero parecería* *mejor con algún palo porque sería más recto y fácil de medir*", el estudiante E3 expone: "*no creo que haya otra unidad de medida que se acomode a la superficie*", el estudiante E4 afirma: "*utilizaría un palo de 1 metro para que me rinda más la medición*" , el estudiante E5 explica: "*escogería otro porque creo que sería más exacto el resultado*" y la estudiante E6 expresa: "*es una unidad flexible y nos permitía doblarla en las curvas que tenía el jardín*".

En la tarea 10D se evidencian el siguiente obstáculo epistemológico en las respuestas de los estudiantes E2, E3, E4 y E5 afirman: "*sería mejor medir cada uno con la misma unidad de medida".*

En la tarea 10E los estudiantes expresan las siguientes respuestas, el estudiante E1 afirma: "*si porque todas las medidas son diferente porque todos utilizamos diferente unidad*", El estudiante E2 afirma: "*si varían las medidas porque cada uno escogieron diferentes figuras y con diferentes tamaños cada figura*", el estudiante E3 explica: "*si, ya que todos tenemos medidas diferentes porque no todos tomamos a misma unidad de medida*", El estudiante E4 expone: "*si porque a todos mis compañeros nos dieron diferentes, yo digo que a todos no nos da la misma medida porque algunos escogieron diferente unidad de medida y tienen diferentes maneras para medir la figura*", el estudiante E5 afirma: " *si, estas diferencias se presentaron porque cada uno escogimos unidades diferentes y además de diferentes tamaños*" y el estudiante E6 explica que: " *si, porque utilizamos unidades de medida diferentes y de tamaños distintos*".

En la tarea 11D se le pregunta al estudiante si encontró alguna dificultad para llevar a cabo esta actividad, el estudiante E6 explica: "*si porque la unidad de medida era más grande que la figura de menor área y se me salía mucho de la forma*".

En la tarea 11E se le propone que discutan y comparen los instrumentos de medida y las medidas, el estudiante E3 afirma: "si ya que con la diferencia de unidades ya que algunas son más grandes y otras más pequeñas", el estudiante E4 afirma: "*creo que si porque por ejemplo yo lo hice con los cuadrados y los cuadrados tienen diferentes medidas que los círculos que los listones, por eso nos dio diferente medida"* y el estudiante E6 afirma: "*si porque el tamaño de las unidades variaba por consiguiente las medidas eran diferentes*"

En la tarea 12D se encuentran las siguientes respuestas: el estudiante E1 afirma: "*los pedazos sobrantes si son importantes porque hacen parte de la unidad*" el estudiante E2 explica: "*yo pienso que son importantes porque con ellos se puede plantear el problema*" el estudiante E3 expone: "si porque de igual manera los pedazos nos dan una medida", el estudiante E4 explica: "*los pedazos que quedaron por fuera si son importantes en la medida*", el estudiante E5 afirma: "*si creo que son importantes porque la medida no estaría completa*" y la estudiante E6 explica: "*si porque también están midiendo la figura*"

5.2.1.4 Obstáculo epistemológico de conocimiento general referido a la utilización de la medida natural

En la tarea 3B el estudiante E1 no expresa el valor numérico de la medida de la figura, en el siguiente cuadro se relaciona la respuesta del estudiante:

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	*Figura A: 99 cuadrados y 24 pedacitos sobrantes.* *Figura B: 85 cuadrados y 34 pedacitos sobrantes.* *Figura C: 88 cuadrados y 38 pedacitos sobrantes.*

Tabla 13. Respuestas estudiantes tarea 3B

En la tarea 10H se le pregunta al estudiante ¿Cómo mediste los pedazos sobrantes? Y el estudiante E2 explica: "*para medir esas figuras yo partí los cuadros en varias partes y de ahí saque mis medidas*"

En las anteriores respuestas podemos observar como los estudiantes dividen la unidad de medida, sin buscar una solución lógico matemático. Al respecto Vasco (2014) explica:

En la cardinalidad hay una unidad natural de medición, que por eso llamamos "la unidad", pero en las magnitudes continuas no la hay. En una primera etapa, se tratará pues de forzar los resultados a acomodarse a la estructura discreta de los números naturales, despreciando los sobrantes o faltantes, o particionando las unidades en unidades más pequeñas, o inventando otras más pequeñas, para que el número de unidades en el resultado de una medición resulte ser natural. (p. 14).

5.2.1.5 Obstáculo epistemológico de conocimiento general referido al proceso de asignación numérica.

En la tarea 3D podemos identificar obstáculo epistemológico cuando por ejemplo el estudiante E3 expone: "*si, ya que de alguna manera nos dan una medida*".

En la tarea 4F encontramos obstáculos epistemológicos en las respuestas de los estudiantes: el estudiante E1 explica: " *que todas las medidas son diferentes porque no todos medimos igual*", El estudiante E2 explica: "*porque cada uno tenía una unidad de medida diferente*", el estudiante E3 afirma "*porque no todos medimos de la misma manera*", el estudiante E4 informa "*porque cada uno tenemos diferentes formas de medir o tal vez porque escogieron diferente unidad de medida*" el estudiante E5 explica: *" todas las medidas son diferentes porque no todos medimos igual*" y el estudiante E6 afirma "*porque todos teníamos diferentes unidades de medida*".

En la tarea 5B se encontraron los siguientes obstáculos epistemológicos en las respuestas de los estudiantes cuando se les pregunta ¿Cómo medirías el área de las figuras?

ESTUDIANTE	RESPUESTA
E1	*Contando todos los cuadritos que hay dentro de la figura*
E2	*Con un cuadro lo suficientemente grande para no confundirme a la hora de contar los completos*
E3	*Con cuadrados de 3x3 y luego contaría los cuadrados y los pedazos que queden fuera de la figura*
E4	*Rellenando los cuadros de 5x5*
E5	*La unidad de medida la pongo en una parte de la figura y del mismo tamaño coloco en toda la figura así sobren parte de la unidad y calcularía cuanta parte ocupa esa parte en la figura completa.*
E6	*Rellenando la figura completamente y analizando posteriormente cada pedazo de cuadrado que queda por fuera*

Tabla 14. Respuestas estudiantes tarea 5B

En la tarea 10B se evidencian los siguientes obstáculos en las respuestas de los estudiantes: el estudiante E1 afirma: "*pues yo creo que podríamos determinar el área mirando que las figuras tengan las siete piezas del tangram*", el estudiante E2 explica: *yo pienso que la forma de determinar el área es sabiendo a la hora de hacer el tangram ya que al hacerlo en cuadro de*

8x8 se sacan las medidas de las figuras”, el estudiante E3 afirma: “ *la podría determinar a la hora de tomar primero las medidas para luego calcular el área*”, el estudiante E4 expresa: “*podríamos determinar mirando que este completa las figuras del tangram*”, el estudiante E5 afirma: “*midiendo la figura solo con una ficha de ellas*” y el estudiante E6 explica: “*midiendo cada una de las figuras que la conforman*”.

En la tarea 11E se le propone que discutan y comparen los instrumentos de medida y las medidas, el estudiante E2 afirma: *“no porque unos utilizamos los mismos instrumentos y nos dio diferentes medidas*”

5.2.1.6 Obstáculo epistemológico de conocimiento general referido al cálculo de área.

En la tarea 8D se les pide a los estudiantes ¿Cuánta área de malla se necesita para hacer el cerramiento del colegio?, el estudiante E1, E2 y E4 explican “No sé calcular el área”

En la tarea 12C se les pide a los 6 estudiantes que midan las cuatro superficies propuestas en el ejercicio, pero ninguno de ellos lo hace, solo expresan una medida general (ejemplo 35circulos y 29 pedacitos de círculos sobrantes).

Con lo anteriormente expuesto, a los seis estudiantes se les dificulta calcular el área de cualquier figura. Corberan (1996) recoge una serie de investigaciones sobre obstáculos que presentan los estudiantes al calcular el área y que permiten demostrar que la aplicación de una formula ha llevado a cometer muchos errores y en consecuencia a la falta de comprensión del proceso por parte de los estudiantes.

También ésta recoge una serie de obstáculos que diferentes investigadores han hallado con respecto al cálculo de área, pues sólo se han limitado a enseñar área a los estudiantes a través de una simple fórmula (Corberan, 1996). Al respecto se recogen una serie de recomendaciones de varios investigadores que podrían mejorar el aprendizaje del área, Corberan (1996) explica que: "*Es peligroso que los niños se familiaricen solo con único modo de medida de áreas, ya que su limitada comprensión del concepto de área no les permitirá desarrollar un adecuado método de medida" (p.32).*

Así mismo Maher & Beattys (citados por Corberan, 1996) afirman "*No es adecuado el momento en el que se presenta a los alumnos las fórmulas, ya que normalmente se produce mucho antes de que éstos hayan tenido la oportunidad de construir el concepto de área" (p. 33).* Al igual, Figueras & waldegg (citados por Corberan, 1996) explican: *"Este hecho provoca que en la mayorías de las ocasiones los alumnos se limiten a memorizarlas sin comprenderlas, por lo que al recordarlas son habituales los errores" (p. 33).*

También afirma Corberan (1996):

> *El hecho de que tanto el momento cómo el modo de introducir las formulas a los alumnos no es el adecuado, no sólo provoca en los alumnos un uso inadecuado o erróneo de ellas, sino que además Freudenthal (1983) y Hughes, Bell y Rogers (1975) han observado que con la enseñanza de las formulas se origina un proceso de empobrecimiento en los alumnos, en tanto que estos abandonan otras técnicas de medida que utilizan con éxito en favor de las fórmulas antes que la comprensión real de su uso haya sido alcanzada.* (p. 33)

En este mismo sentido afirma Corberan:

> *No es adecuado el modo en el que los libros de texto y los profesores de matemáticas acometen a menudo el estudio de las fórmulas para el cálculo de áreas, ya que los ejercicios que plantean se reducen a simples cálculos aritméticos (Hirstein, 1981)(p. 33)*

Por ultimo Héraud (citado por Corberan, 1996) afirma que "advierte de la complejidad de las formulas y del nivel cognitivo que se requiere para su comprensión" (p. 33).

5.3. Discusión de los resultados.

Se aplicaron 12 tareas a seis estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Rural San Rafael, sede Quebradanegra; estos talleres se aplicaron con el objetivo de caracterizar los obstáculos ontológicos y epistemológicos en el aprendizaje de los conceptos de longitud y área, resultado que se logró con éxito. En cuanto al obstáculo de tipo epistemológico, se encontró el obstáculo de conocimiento general relacionado con: la relación entre lo continuo y lo discreto, el cambio de unidad, selección de unidad, la utilización de la medida natural, relacionados con los proceso de asignación numérica y obstáculos de conocimiento general relacionados con el cálculo de área. Y dentro de los obstáculos ontológicos se encontraron: concepciones inducidas por la enseñanza, y dentro de estas se caracterizaron las siguientes: medición de figuras regulares, uso frecuente de instrumentos estandarizados y la linealidad; y obstáculos ontológicos espontáneos, y dentro de estos se caracterizaron: facilidad, exactitud en la medición y características de la unidad.

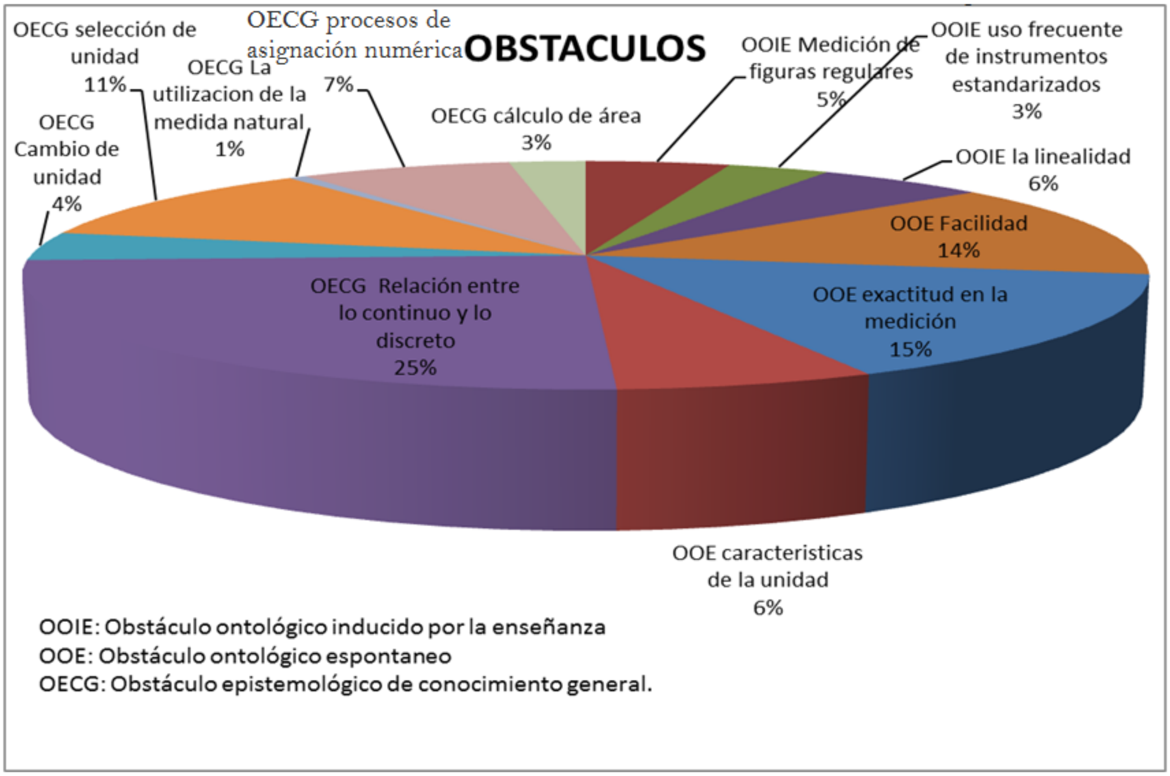
Otro aspecto a resaltar en la investigación es la relación que se evidenció entre obstáculos, por ejemplo el obstáculo ontológico espontaneo referido con la exactitud de la medición está relacionado con el obstáculo epistemológico de conocimiento general relacionado entre lo continuo y lo discreto. Las respuestas de los estudiantes muestran como estos dos obstáculos tiene factores comunes en su esencia, pues para ellos exactitud tiene que ver con números enteros.

Otra relación que se puede evidenciar es la relación entre obstáculo ontológico espontaneo referido con la exactitud de la medición el cual está relacionado con el obstáculo epistemológico de conocimiento general relacionado con la utilización de la medida natural. En esta relación se puede inferir como lo exacto lo relacionan con los números naturales, relacionando la exactitud con unidad de medida entera.

Otra relación que se evidencia entre el obstáculo ontológico inducido por la enseñanza referida a la linealidad con el obstáculo epistemológico de conocimiento general referido entre lo continuo y lo discreto. También se puede evidenciar la relación que se presenta entre la medida exacta, la relación continuo-discreta y la medida natural las cuales están implícitamente ligadas.

La ultima relación que se puede inferir el obstáculo ontológico espontaneo referido con la características de la unidad está relacionado con el obstáculo con el obstáculo ontológico espontaneo referido con la facilidad.

Dentro de las 12 tareas se obtuvieron 347 unidades de análisis (una unidad de análisis es una respuesta en su globalidad del estudiante) donde se identificaron los siguientes obstáculos:



Gráfica 1 ***Caracterización de obstáculos***

En el gráfico anterior podemos observar la distribución en porcentajes del obstáculo de tipo ontológico y epistemológico caracterizado en las doce tareas desarrolladas por los seis estudiantes. Dentro de los obstáculos ontológicos se caracterizaron dos tipos, el primero: obstáculos ontológicos inducidos por la enseñanza con un porcentaje total del 14%, y dentro de éstos se caracterizaron tres tipos: obstáculo ontológico inducido por la enseñanza (OOIE): referido a la medición de figuras regulares (5%), referido al uso de instrumentos estandarizados (3%) y referidos a la linealidad (6%) y el segundo: obstáculos ontológicos espontáneos con un porcentaje del 35%, y dentro de estos se caracterizaron los siguientes: obstáculo ontológico espontáneo (OOE) referido a la facilidad (14%), referido a la exactitud (15%) y referido a la características de la unidad (6%). El otro tipo de obstáculo caracterizado es el obstáculo epistemológico de conocimiento general (OECG) con un porcentaje del 51% y dentro de éste se caracterizaron los siguientes: Relación entre lo continuo y lo discreto (25%), relacionados con el cambio de unidad (4%), relacionados con la selección de la unidad (11%), relacionados con utilización de la medida natural (1%), relacionado con procesos de asignación numérica (7%) y relacionados con el cálculo del área (3%).

Del gráfico anterior podemos ver como las frecuencias de las categorías ontológica y la categoría epistemológica son casi iguales en porcentajes, lo que significa que ambas categorías están al mismo nivel de importancia, o igual de influyentes en el resultado de esta investigación. Por ejemplo dentro de la categoría ontológica cabe resaltar la frecuencia con que se presentan dos subcategorías: los obstáculos ontológicos referidos a la facilidad y el obstáculo ontológico espontaneo referido a la exactitud.

Una tercera parte de los obstáculos encontrados en la investigación hacen referencia al obstáculo epistemológico de conocimiento general (25%) identificado en las respuestas de los estudiantes, se refiere a la relación entre lo continuo y lo discreto, aquí se pudo inferir que los estudiantes reiteradamente no fueron capaces de darle un valor matemático lógico (o matemáticamente realizado) al pedazo de la unidad de medida que no es completo al realizar la medición. Con el análisis se pudo concluir lo que Vasco (2014) señala sobre este pedazo:

Las tensiones se manifiestan cuando al ensayar socialmente estos procesos se trata de negar y reprimir la aparición de trozos sobrantes o huecos faltantes. Al comienzo se trata de hacer servir a toda costa los números de contar que ya se dominan parcialmente para contar postes o para contar patrones yuxtapuestos, y así utilizar los números de contar como si fueran números de medir.(p. 24)

Este 25% del obstáculo epistemológico referido anteriormente, equivale a 87 unidades de análisis de las 347 analizadas en la investigación. Otro aspecto relevante y no menos importante hallado es el tema del obstáculo ontológico espontaneo referido a la exactitud en la medición, en este aspecto los estudiantes tienen una percepción de lo que es el resultado del proceso de medición, pues aunque espontáneamente expresan en sus respuestas que el valor del pedazo sobrante de la unidad de medida si es importante para dar una medida exacta, no tienen claro cómo realizar el procedimiento para hallar ese valor, este hallazgo lo encontramos en un porcentaje del 15% del total de las unidades analizadas y que equivalen a 53 de las 347 unidades analizadas.

Otra expresión que indica desconocimiento en el proceso de medición es el término "facilidad", pues este lo encontramos en las diferentes tareas propuestas. El 14 % de la muestra total (que equivalen a 47 unidades del total de las unidades analizadas) escogen los procedimientos de medición basados en lo fácil para ellos resolver de una manera u otra, es decir, sus explicaciones están basadas más en sus creencias sobre la facilidad y no sobre la construcción teórica del concepto. El estudiante 1 expresa: "*Yo mediría el cuadrado porque es la forma más fácil de medir o yo diría que es lo único que se puede medir*". Explicaciones similares suceden con tareas relacionadas con el proceso de medición, la selección de la unidad etc.

Nos mostró como los estudiantes expresan facilidad de manera espontánea cuando se le pide que realicen el proceso de medición, la selección de la unidad, la medición de figuras amorfas y también cuando se les pide que escojan una cualidad medible de una figura.

Seleccionar la unidad adecuada es una dificultad que emerge del análisis de los datos, porque los estudiantes expresan que el resultado de la medición depende de la unidad de medida, pues creen que cambiar de unidad les significa precisión y acierto a la hora de medir. El 11% de las unidades analizadas, que corresponden 39 unidades expresan esta circunstancia.

El proceso de asignación numérica resulta también un factor vinculante en estos resultados (aunque en un porcentaje bajo, 7% del total de la muestra, que equivalen a 25 unidades de las 347 unidades analizadas), ya que encontramos respuestas donde los estudiantes expresan que no todos miden de igual manera, que no tenían la misma unidad de medida, que todas las medidas son diferentes. De lo anterior podemos inferir que los estudiantes no tienen en cuenta el proceso de medición como tal, pues piensan que cambiando de unidad de medida (reduciéndola o dividiéndola) van a tener un resultado más preciso o exacto, en o que van a obtener todos medidas iguales. Aquí evidenciar posiblemente un conocimiento muy vago y poco acertado para llevar a cabo esta actividad.

A lo largo de esta investigación se identifica en las respuestas de los estudiantes que cuando se les pide expresar el área de las figuras propuestas, cuatro de los seis estudiantes, solo hablan de linealidad a la hora de exponer sus resultados, solo expresan el largo y el ancho de las figuras que se le pide medir; infiriendo que en el proceso de enseñanza aprendizaje sobre medición quizás no han vivenciado tal situación, por lo tanto muy probablemente no entienden la relación que se da entre el largo y el ancho de cualquier figura. Esta situación la encontramos en 20 unidades de análisis que corresponden al 6% del total de las unidades investigadas.

Con el mismo porcentaje (6%) encontramos el obstáculo ontológico espontaneo referido a la características de la unidad donde podemos apreciar que la dificultad de los estudiantes es creer que la unidad de medida está totalmente vinculada al resultado de la medición y al proceso del mismo. Dicha concepción espontánea permite inferir que cada estudiante escogió la unidad de medida solo a través de la percepción sensorial y a sus conocimientos previos, y no de acuerdo con el proceso matemático adecuado para llevar a cabo la medición.

Cuando se trata de medir figuras los estudiantes implícitamente prefieren medir las figuras que siempre les han mostrado los libros de texto y los profesores, o sea figuras regulares. Es por eso que en las respuestas de los estudiantes se evidencia dificultad para medir figuras amorfas o figuras que no tienen esa forma familiar que siempre han enfrentado en el proceso escolar. Este obstáculo ontológico inducido por la enseñanza se presentó con una frecuencia del 5% que equivale a 17 unidades de análisis.

No siempre expresar una medida resulta ser sencillo y más aún cuando se desconoce el proceso matemático lógico que permite encontrar una respuesta verdadera o acertada de un proceso de medición, y cuando no se cuenta con una unidad de medida convencional se dificultad más. Para afirmar lo anteriormente dicho el 4% del total de las unidades de análisis mostraron que los estudiantes realizan cambio de unidad al expresar en las respuestas unidades diferentes no coherentes entre sí.

Cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones de medición con unidades no estandarizadas, no encuentran la manera eficaz (o acertada) para hallar la medida de las figuras propuestas, por esta razón se les dificulta realizar tal actividad y expresan que la mejor manera de llevar a cabo una medición es utilizar instrumentos estandarizados como el metro. Resultado que se soporta en las respuestas de los estudiantes, de las cuales, el 3% de las unidades de análisis expresan tal situación.

A través del proceso de medición adelantado en este trabajo queda evidenciado que el 3% del total de las unidades de análisis (347), muestran como los estudiantes de manera explícita reconocen que no saben calcular el área de una figura.

Finalmente se evidenció que los estudiantes tienden a buscar una unidad de medida que no comprometa el fraccionamiento de la misma, pues no saben cómo expresar el valor de esos pedazos sobrantes. Esto indica que prefieren número naturales para expresar su medición. Este obstáculo epistemológico del conocimiento general referido a la utilización de la medida natural la encontramos en la investigación con un porcentaje del 1%

Los tres obstáculos con más frecuencia en la investigación son los siguientes: el primero fue el obstáculo epistemológico de conocimiento general referido a la relación entre lo continuo y lo discreto con un porcentaje del 25%, en el segundo lugar encontramos los obstáculos ontológicos espontáneos referidos con la exactitud en la medición con un porcentaje del 15% y en tercer lugar encontramos los obstáculos ontológicos espontáneos referidos a la facilidad con un porcentaje del 14%. Esta situación indica que la percepción de los estudiantes en los procesos de medición juega un papel definitivo a la hora de ejecutar estas tareas.

Ahora bien dentro de los obstáculos ontológicos inducidos por la enseñanza se evidencia que los estudiantes prefieren buscar figuras regulares para medirlas, porque en el desarrollo matemático posiblemente solo han sido tratado con más frecuencia figuras geométricas que les muestran los libros de texto.

Otro aspecto importante es la relación o semejanza que hacen los estudiantes entre unidad de medida convencional y no convencional, por ejemplo al realizar las mediciones con pedazos de cabuya, ellos expresan que les gustaría medir con otro tipo de unidad de medida como el metro.

En cuanto a la medición del área, los seis estudiantes no calculan el área del cerramiento, solo expresan largo y ancho del elemento. En términos de Vasco (2014):

“*El área es una de las magnitudes más difíciles de construir. En caso de duda, los jóvenes consistentemente confunden el área con el perímetro. Lo que ya había encontrado Wertheimer a comienzos del siglo parece permanecer lo mismo. Hart informa que prácticamente ningún joven de 14 años en Inglaterra tiene bien diferenciadas las nociones de área y perímetro. Carpenter encontró que más de la mitad de los jóvenes de 13 años de los Estados Unidos las confunden*” (p. 11).

En cuanto al proceso de percepción, Sanmartí (citado por Osorio, 2009)

Indica que éste es uno de los desencadenantes importantes de la construcción de conocimiento científico y en esa dirección se puede decir que la percepción es necesaria para la construcción de la medida y los proceso que están involucrados en ella; ésta es el comienzo de la medición (Godino D. Juan; Batanero C.; Font V., 2004).

Pero, ¿Cómo surgen las concepciones en los estudiantes*?* Al respecto Pozo y Carretero (1987):

Afirman que las concepciones espontáneas "surgen de un modo natural en la mente del alumno, sin que exista ninguna instrucción ni actividad educativa específicamente diseñada para producirlas. Generalmente, se producen en la interacción cotidiana de los niños y adolescentes con el mundo que les rodea. (p. 43).

Explica Contreras (citado por Restrepo (2008) *"las concepciones consisten en un marco organizativo –implícito en el pensamiento del sujeto– de naturaleza metacognitiva y difícilmente observables, que inciden en sus creencias y determinan su toma de decisiones" (p. 93).*

En cuanto a la precisión en el proceso de medida, Dickson, Brown & Gibson (En Corberan, 1996), afirman que "*Las matemáticas escolares se limitan con demasiada frecuencia a medidas* *donde la precisión prima de forma absoluta, dificultando a los alumnos adquirir un profundo conocimiento del proceso de medida" (p. 32).*

Un factor importante en los procesos de medición es la estimación, al respecto Pizarro (2015) explica: "*a pesar que desde hace 30 años que los directrices internacionales han hecho énfasis en la estimación de medida, y con ello se ha elevado el número de investigaciones al respecto, la enseñanza de la estimación es bastante débil" (p. 6).*

Autores citados por Pizarro (2015) tales como Hope (1986); Johnson (1979); Trafton (1986); Sowder y Wheeler (1989), revelan que el tratamiento de la estimación es limitado. Asimismo, otros académicos sostienen que este es superficial, Reys (1984); Forrester y Piké (1998); Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam (2005).

El proceso de medición transversaliza todas las áreas del currículo y de nuestro quehacer diario. El científico inglés William Thomson Kelvin (1824-1907) resumió la importancia de la medición como parte esencial del desarrollo de la ciencia, en el siguiente comentario: "*Con frecuencia digo que cuando se puede medir y expresar con números aquello sobre lo cual se está hablando, se sabe algo del tema; pero cuando no se puede medir, es decir, cuando no es posible expresarlo con números, el conocimiento es insuficiente*".

Para Bachelard (citado por Mora, 2002) "*En la formación del espíritu científico el primer obstáculo es la experiencia básica" (p. 78)*. De acuerdo con Bachelard esta situación llena de subjetividades e incomprensiones, ya que se puede caer en conceptos erróneos, pues las cosas se ven desde una perspectiva propia del individuo y no desde la óptica matemática que realmente son.

Butto (2013) expresa que las fracciones están presentes en todas las actividades diarias de los estudiantes, y que aunque estas están incluidas dentro del currículo, su aprendizaje se les dificulta a los mismos. Streefland citado por Butto (2013), explica que "*hace un análisis curricular e identifica dos problemas con las fracciones:*

El primero es no considerar la complejidad de las fracciones en la evolución del aprendizaje de los niños; y, el segundo consiste en la aproximación mecanicista que se hace de las fracciones, alejándose de la realidad y utilizando normas rígidas (p. 36).

Butto (2013) Afirma que:" *En consonancia con la perspectiva Piagetiana, Behr, Lesh, Post y Silver (1983) creen que el concepto de número racional es una de las ideas más complejas e importantes de las matemáticas" (p. 35).*

Escolano y Gairín (citado por Butto, 2013)

Mencionan que el origen del significado del concepto de fracción como relación parte-todo surge de las necesidades humanas como lo sostiene Bishop (citado en Escolano y Gairín, 2005), pues según argumentan estos autores, el origen del concepto de número racional se encuentra en la idea de medida de cantidades de magnitud y que además este significado (fracción como relación parte-todo) tampoco fue elaborado por las matemáticas" (p. 35).

Los mencionados autores creen que ese significado de fracción más bien fue creado por necesidades del proceso de enseñanza y aprendizaje, y éste provoca una serie de obstáculos didácticos. Además de acuerdo con los autores, dicho modelo, dificulta la noción de número racional y obstaculiza la formación de ideas abstractas.

6. Conclusiones.

En cuanto a la metodología de la investigación fue la adecuada pues permitió que la aplicación de las doce tareas propuestas a los seis estudiantes exteriorizaran los obstáculos como el ontológico y epistemológico que ellos poseen en cuanto a los procesos de medición se refiere.

Las tareas propuestas cumplieron con su objetivo principal pues permitieron observar como los seis estudiantes del grado décimo presentan dificultades en el proceso de medición, y que esas dificultades son comunes y persisten en otros lugares y otros escenarios escolares. Las doce tareas se aplicaron de manera grupal y también individual de tal manera que permitieron encontrar analogías y diferencias en la concepción de los estudiantes frente al proceso de medición.

Queda evidenciado que los estudiantes no tienen criterios de selección claros para seleccionar la unidad. En términos de Chamorro y Belmonte (2000) en los procesos de medición uno de los elementos necesario para su aprendizaje es la selección de la unidad o de los patrones de medición, al respecto estos autores afirman "*Elegir una unidad supone entre otras cosas una adecuación entre lo que se desea medir y el objeto elegido como unidad*" (p. 63).

En cuanto a la resolución de las tareas, queda evidenciado que los estudiantes no importa su nivel de desempeño escolar (alto, medio, bajo), presentan el mismo desconocimiento en el proceso de medición; como también el proceso para hallar el valor de la unidad de medida no entera.

El escaso conocimiento que poseen los estudiantes sobre la teoría de la medida hace que ellos seleccionen la unidad más desde su percepción o sus creencias sobre lo que es más sencillo en la solución de la tarea.

Cinco de los seis estudiantes son mujeres. Es posible que las estudiantes tenga dificultades en la medición porque el contacto físico con estos procesos son escasos, quizás esto reporte algo para la medición, porque las tareas de campo son más enfocadas en hombres. Por lo tanto la importancia del contexto en los procesos de medición son supremamente importantes, es decir el trasfondo social de la medida. Al respecto, la revista digital la voz de gálica (párrafo 8), emite una publicación donde investigadores de la universidad de Pensilvania (Estados Unidos), manifiestan como el cerebro de los hombres y las mujeres son diferentes, pues muestran diferente conectividad, y concluyen:

Las observaciones vertidas en este trabajo se corresponden con los resultados de otro trabajo sobre los comportamientos realizado por la misma universidad que dejó en evidencia las diferencias pronunciadas entre los dos sexos. Esta investigación había revelado que las mujeres son superiores a los hombres en cuanto a su capacidad de atención, la memoria de las palabras y de los rostros, además de las pruebas de inteligencia social, pero los hombres las superan en capacidad y velocidad del tratamiento de la información. (s.f)

Teniendo en cuenta el contexto donde se desarrolla la investigación (colegio Rural), se podría inferir que los estudiantes son más cercanos a los procesos de medición del espacio, pero esta situación no se observa con claridad en el desarrollo de las tareas. Pues a lo largo del desarrollo de estas se observó un desconocimiento generalizado a la hora de interpretar sus resultados.

Queda evidenciado que para cuatro de los seis estudiantes, las medidas del espacio: longitud y área no representan diferencias espaciales en el proceso de medición; por lo tanto expresiones como metro y metro cuadrado carecen de sentido en dicha situación; y en consecuencia no saben que representan cada simbolismo en su contenido geométrico ni como factor multiplicativo.

Otro aspecto importante evidenciado en el desarrollo de las tareas, se podría afirmar que los seis estudiantes no saben cómo representar con números racionales el valor de la unidad de medida incompleta, el cual permite colegir que los números naturales se convierten en un obstáculo de tipo epistemológico para los estudiantes en el proceso de construcción de la medida, ya que al expresar el resultado de una medición solo hacen referencia a cantidades continúas, limitando el proceso a un simple conteo.

Aunque No fue el caso del estudio se identificó obstáculos en procesos de estimación. Al analizar la respuesta de los seis estudiantes se pudo evidenciar como ellos no expresan una medida exacta en las tareas asignadas, ellos hacen una estimación de ese pedazo sobrante de la unidad de medida (no entera); pero dicha estimación no corresponde a un valor real de la medida, pues demuestran éstos falta de capacidad estimativa en el proceso de medición.

En las tareas adelantadas en este trabajo, quedan evidenciadas las dificultades que muestran los estudiantes para aplicar el concepto de medición y de elección de las magnitudes. También se pudo evidenciar el desconocimiento de manera generalizada del proceso para descubrir el gran valor que tiene la medición en nuestras vidas.

El común denominador de las dificultades encontradas durante la investigación al aplicar las doce tareas fue el hecho que los estudiantes no comprenden el proceso físico de medición, como tampoco el hecho de expresar la asignación numérica. Otro aspecto a resaltar dentro de estas dificultades es no considerar por parte de los estudiantes la importancia que tiene el hecho de enfrentarse a una situación de medida con una unidad de medida no entera (la mayoría de los estudiantes hacen una estimación y un juicio cualitativo del proceso de medición). Con esta situación se pudo evidenciar como los estudiantes buscan salir de la situación planteada expresando lo que primero se les ocurre, por ejemplo al expresar en sus respuestas sobre mediciones, expresiones tales como: cabuyas y centímetros, cabuyas y partes del cuerpo (dedo índice y palma de la mano); dando como resultado un cambio de unidades(cambian la unidad de medida (un pedazo de cabuya) por expresiones que de alguna manera ellos creen que les funciona, se puede inferir que acuden a su percepción de una manera inmediata, sin tener en cuenta (o por falta de conocimiento) de un proceso lógico de medida.

También se pudo concluir de la investigación que la estimación de medida fue la principal (o mayor) dificultad detectada en las tareas propuestas a los estudiantes; esto se puede inferir de las respuestas expresadas por ellos, pues ninguno expresó las respuesta de la medición de una forma correcta. A lo anterior podemos añadir que no conocen el proceso de fraccionamiento de la unidad, pues siempre expresaron un valor de fracción que no correspondía matemáticamente al valor real del pedazo sobrante. Como se pudo constatar que en todas las tareas no se realizó el paso de la unidad discreta a la unida continua; y por consiguiente no revelaran apropiación del concepto de magnitudes discretas y magnitudes continuas.

Un aspecto bastante interesante también a resaltar en la investigación es el hecho de que cuatro de los seis estudiantes expresaron de forma clara que no sabían calcular el área de las figuras de las doce tareas propuestas. En ninguna de las tareas propuestas se evidencia el procedimiento matemático lógico para hallar el área. Otros dos estudiantes realizan procedimiento para hallar el área (multiplican el largo por el ancho) pero no expresan la medición en unidades de área (o superficie). Los seis estudiantes reducen la medida a lo longitudinal (ellos no expresan unidades de área tales como cm^2, m^2), cualquier resultado expresado por ellos en el proceso de medición demuestran que no tienen capacidad espacial al determinar las unidades de área.

Queda evidenciado en las respuestas de los estudiantes que el proceso de enseñanza es un factor influyente de manera definitiva para que el estudiante se atreva a lanzar un juicio valorativo acerca de sus concepciones, creencias o percepciones o prejuicios que les permite de manera acertada o errónea entender o comprender un concepto o procedimiento matemático que para el estudiante resulta ser la solución al problema que está enfrentando.

Ahora bien otro aspecto importante en este trabajo es la percepción que tienen los estudiantes acerca del proceso de medición, pues cada uno de ellos percibe de una manera diferente la forma de afrontarlo y resolverlo; estas concepciones espontáneas de cada uno de ellos permiten observar diferentes planteamientos a las tareas propuestas de acuerdo a la percepción que tengan y al desarrollo de tareas similares en su vida cotidiana.

En el desarrollo de las tareas sobre medición queda evidenciado que los estudiantes no poseen el conocimiento necesario (o conocimiento científico) para llevar a cabo las tareas propuestas en el presente trabajo. Ese bagaje de conocimiento en cuanto a la medición no permite desarrollar una actividad cognitiva suficiente para el desarrollo de las tareas propuestas.

Otro inconveniente importante que surge en este trabajo y que se evidencia con los procedimientos y con la respuesta de los estudiantes es el Cambio de unidad, cuando se les pide a los seis estudiantes que expresen la respuesta de los ejercicios sobre medición en la unidad adecuada (unidades de área o unidades de longitud), ante el desconocimiento de las mismas realizan cambio de unidades de una manera errónea o acomodada a la percepción que tienen del proceso de medición y sus unidades.

Podemos encontrar en las respuestas que la unidad de medida utilizada la convierten(o cambian) en medidas antropométricas y éstas a su vez en centímetros, pues relacionan el ancho del dedo índice con un centímetro; como también el ancho de la mano con cuatro centímetros. Otros estudiantes expresan en las respuestas de los pedazos de la unidad de medida en pedazos, pedacitos; aquí se puede inferir que no encuentran la relación (o que no son capaces encontrar la fracción correspondiente) entre la longitud total de la unidad de medida y el pedazo de la unidad de medida; aquí podemos ver como no son capaces de realizar un cambio de unidad apropiada y matemáticamente lógico.

Otra situación evidenciada en las respuestas de los estudiantes y no menos importante es la estimación que realizan al expresar las respuestas en ejercicios de medición en forma de fraccionario, ellos creen (o estiman) que el valor sobrante de la unidad de medida (pedazo) equivale a una fracción no desarrollada matemáticamente sino que expresan sus respuestas de acuerdo a su percepción.

El error frecuente de los estudiantes en esta tarea es hacer una estimación errónea del pedazo sobrante de la unidad, pues carecen de habilidades perceptivas necesarias para estimar una medida. Aunque este problema se presenta debido a la falta de enseñanza de estimación por parte de los docentes y también posiblemente por el desconocimiento de los profesores sobre el tema y debido también a la no inclusión del tema en el currículo.

Otro aspecto importante que podemos concluir es el desconocimiento que tienen los estudiantes acerca del cálculo del área de superficies o figuras, pues de manera implícita podemos observar que limitan el cálculo del área a lo longitudinal, y también de manera explícita afirman que no saben calcular el área de superficies y figuras.

Del análisis finalmente se encuentra que los seis estudiantes evidencian tanto obstáculos ontológicos como epistemológico. Toda esta situación posiblemente se presenta por el propio desconocimiento que ellos tienen sobre medición, pues el desconocimiento del proceso les induce a ellos a que tomen decisiones no desde el campo conceptual sino desde su propio modelo de medida, y ese propio modelo de medida es muy cualitativo (tiene que ver con sus creencias, con lo que piensan), pero no desde una construcción teórica que ha adquirido desde su proceso escolar.

Otro aspecto a resaltar en la investigación es la caracterización de las relaciones entre obstáculos epistemológicos y ontológicos, por ejemplo el obstáculo ontológico espontáneo referido con la exactitud de la medición está relacionado con el obstáculo epistemológico de conocimiento general relacionado entre lo continuo y lo discreto. Las respuestas de los estudiantes muestran como estos dos obstáculos tiene factores comunes en su esencia, pues para ellos exactitud tiene que ver con números enteros.

Otra relación que se puede evidenciar es la relación entre obstáculo ontológico espontaneo referido con la exactitud de la medición el cual está relacionado con el obstáculo epistemológico de conocimiento general relacionado con la utilización de la medida natural. En esta relación se puede inferir como lo exacto lo relacionan con los números naturales, relacionando la exactitud con unidad de medida entera.

Otra relación que se evidencia entre el obstáculo ontológico inducido por la enseñanza referida a la linealidad con el obstáculo epistemológico de conocimiento general referido entre lo continuo y lo discreto. También se puede evidenciar la relación que se presenta entre la medida exacta, la relación continuo-discreta y la medida natural las cuales están implícitamente ligadas.

La ultima relación que se puede inferir el obstáculo ontológico espontaneo referido con la características de la unidad está relacionado con el obstáculo ontológico espontaneo referido con la facilidad.

Las anteriores relaciones permiten entender que en los procesos de medición, tanto las concepciones como los obstáculos guardan cierta relación, por ejemplo Durox (1982) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo una concepción, y una de ellas es: un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento (Durox, 1982). De acuerdo con Neira (2009), las mentes nunca serán vírgenes ante la realidad: sea lo que sea que veamos, digamos u observemos esta direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto la importancia de estas relaciones radica en que así los dos tipos de obstáculos tengan orígenes diferentes, tanto el obstáculo epistemológico como el ontológico guardan cierta relación, que permiten inferir que el conocimiento que trae el estudiante frente a procesos de medición, los refleja en su forma de pensar, creer o comprender el fenómeno; también en la forma como se desarrollan o enseñan los procesos de medición en la escuela, que le permitan comprender al estudiante de una forma clara como esas ideas previas que trae sobre el proceso de medición las puede incorporar de una manera clara y efectiva al introducir nuevas variables a dicho proceso de enseñanza aprendizaje.

En los procesos de enseñanza aprendizaje sobre medición, se debe implementar procesos de estimación, que permitan a los estudiantes comprender y entender que medir es algo más que aplicar una simple formula, que realizar conversión de unidades, que solo permiten anular la comprensión del proceso. Por lo tanto se hace necesario incorporar en el currículo de la institución procesos prácticos sobre medición, comparación y estimación en el proceso de medida.

Para cerrar la brecha entre lo epistemológico y lo ontológico, el proceso enseñanza aprendizaje de medición, se debe realizar desde los primeros años escolares, a través de procesos prácticos tales como el de estimación, que le permiten al estudiante comprender de una manera más efectiva, que significa medir y como debe hacerlo.

Finalmente queda evidenciado que de acuerdo a lo anteriormente analizado, se necesita intervención en el aula con respecto a los proceso de medición, para superar (o mitigar) estos obstáculos evidenciados en este proceso investigativo; pues de acuerdo a las respuestas de los estudiante los obstáculos ontológicos y epistemológicos están muy arraigados en su proceso escolar en lo referente a la medición.

7. Recomendaciones

Alrededor del proceso de medición se presentan inconvenientes en su comprensión por parte de los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje. Pero dentro de toda esta situación no hay un patrón definido o fijo que permita identificar esas dificultades en dicho proceso. Podríamos pensar que no existe un único método para buscar salvar las dificultades que se pone en manifiesto cuando estamos enfrentados a procesos de medida, en este caso de longitud y área.

Ahora bien a nivel teórico, se indagó inicialmente por los obstáculos epistemológicos de Bachelard así como los obstáculos ontológicos de Pozo y carretero. Pero la primera dificultad fue saber qué tipo de pregunta se debía elaborar para provocar en las estudiantes repuestas acordes a los referentes teóricos. Pero la mayor dificultad fue encontrar cuales de esos obstáculos epistemológicos y ontológicos podría encuadrar para analizar las respuestas de los estudiantes.

En la parte metodológica, se parten de unas categorías iniciales y emergen otras que permiten identificar esos obstáculos presentes en los estudiantes cuando se enfrentar al proceso de medición. Esas categorías emergentes resultan de las respuestas de los estudiantes, pues en ninguna parte de la bibliografía consultada se encuentra de manera explícita teoría sobre todos los obstáculos. Por lo tanto la búsqueda de la identificación de los obstáculos presentes en las respuestas de los estudiantes de grado décimo se realizó gracias a inferencias y a experiencias vividas en el aula de clase.

Por último, para futuras investigaciones en este tema, sería bueno buscar incluir nuevas concepciones que permitan identificar otros tipos de obstáculos, presentes en los estudiantes; teniendo en cuenta por supuesto el contexto y la manera de abordar el problema.

8. Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo veintiuno editores.

BARDIN, L. (1986): El análisis de contenido. Madrid, Akal.

Barrantes, Hugo (2006). Los obstáculos epistemológicos. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática 2006, Año 1, Número 2.

Bishop, A, (1999). Enculturación Matemática: *la Educación Matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidos

Brousseau, Guy; Brousseau, Nadie. (1991-92*). El peso de un recipiente*. Estudio de los problemas de la medición en CM. Traducción: Juan D. Godino. "Gran N", nº 50, 65-87.

Butto, Cristianne. (2013). *El aprendizaje de fracciones en educación primaria: un Propuesta de enseñanza en dos ambientes*. Corporación universitaria Iberoamericana. (15), p. 36

Callis i Franco, Josep; Fiol Mora, María Luisa. (2003*). Características incidentes en la estimación métrica longitudinal*. Recuperado el 4 de junio de 2007, de Dialnet: dialnet.unirioja.es/servlet/articulo? Código=2258647

Campbell, N. C. (1956). *La Medición.* Recuperado el 4 de Noviembre de 2007, de Universidad de Antioquía: ayura.udea.edu.co/~fisica/MATEFISICA/EPISTEMOLOGICA/Archivos/Medicion/medicion2.pdf

Chamorro Plaza, M. d. (1991). *El problema de la medida*: didáctica de las magnitudes lineales. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis, S.A.

Chamorro, Carmen. Belmonte, Juan M. (2000). *El problema de la medida didáctica de las magnitudes lineales.* Madrid. Editorial Síntesis, S.A.

Chamorro, M. (2000). *El problema de la medida.* Madrid. Síntesis S.A.

Chamorro Plaza, M. d. (2001). *Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria* E.S.O. En , J. M. Belmonte Gómez, J. Bolon, M. D. Chamorro Plaza, B. D´Amore, L. Ruiz Higueras, y otros, Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas (págs. 79-117). Madrid: Aulas de Verano. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Chamorro, María del Carmen (2003). D*idáctica de las matemáticas.* Madrid. Editorial Pearson Educación, S.A.

Chamorro Plaza, M. D. (2003). *El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida*. En M. d. Chamorro Plaza, Didáctica de las Matemáticas para primaria (págs. 221-243). Madrid: Pearson Prentice Hall.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación, S.A.

Cid, Eva. (s.f). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Corberán, Rosa María. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria hasta la universidad* (tesis doctoral). Universitat de Valéncia, Valéncia, España.

Duroux, A. (1982). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure, memoria de DEA, Publications de l'IREM, Burdeos.

Goetz, J.P, LeCompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Godino, J. D. (2003). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En J. D. Godino, *Investigaciones sobre fundamentos teóricos y metodológicos de la Educación Matemática* (págs. 59-74). Granda: Universidad de Granada.

Gutiérrez, Rufina. (1996). *Modelos mentales y concepciones espontáneas*. Alambique, 7, 73-86.

La Voz de Galicia S.A. Polígono de Sabón, Arteixo, A CORUÑA (ESPAÑA) Inscrita en el Registro Mercantil de A Coruña en el Tomo 2438 del Archivo, Sección General, a los folios 91 y siguientes, hoja C-2141. CIF: A-15000649. Recuperado de http://www.lavozdegalicia.es/noticia/educacion/2013/12/03/hombres-mejor-percepcion-espacial-mujeres-memoria/0003138607074099789774З.htm).

Leal, A. et. Al. (2012). Indagando los obstáculos epistemológico de Bachelard. Recuperado el 23 de febrero de 2012, de http://epistemologiauft.blogspot.com.co/2012/02/indagando-los-obstaculos-epistemologico.html

López, A.M. Orrego, M., y Tamayo, Ó.E. (2016). Modelos explicativos y su relación con las concepciones alternativas de estudiantes universitarios sobre inmunología. Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED, Memorias, Séptimo Congreso Internacional sobre formación de Profesores de Ciencias, número extraordinario, 1051.

López Noguero, Fernando. (2002*). El análisis de contenido como método de investigación*. XXI, revista de educación, 4 (2002): 167-179. Universidad de Huelva. Madrid, España.

Lordoguin F, Pollio A, (2013). *Las ideas matemáticas y su génesis cultural*. VII CIBEM. Montevideo, Uruguay.

MEN. (1998) Lineamientos curriculares. Matemáticas. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Mora Zamora, A. (2002). *Obstáculos epistemológicos que afectan el proceso de construcción de conceptos del área de ciencias en niños de edad escolar.* Inter Sedes. Vol.III. 75-89

Neira, Gloria Inés (2009). Obstáculos epistemológicos y conflictos semióticos en la educación matemática: visiones y perspectivas actuales. Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística.

Osorio, Andrea M. (2009). *Modelos mentales sobre el concepto de medida*. (tesis de maestría)

Philippa, B. Lynne O. (2004) *A measure of rulers - the importance of units in a measure*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 2 pp. 159–166

Pizarro Contreras, Ruth (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria* (tesis doctoral). Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Pozo, J. Carretero, M. (1987).*Del pensamiento formal a las concepciones espontaneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia?* Infancia y aprendizaje. (38), p. 42

Kula, W. (1999). *Las medidas y los hombres*. Madrid: Siglo veintiuno editores, S.A. de C.V.

Restrepo, Jose Joaquín. (2008). *Marco conceptual para la descripción de las concepciones sobre didáctica de las matemáticas*. Actualidades pedagógicas. (52), p. 93.

Sanmartí, Neus. (2002). *Un reto: mejorar la enseñanza de las ciencias*. En C. R. Cátal M, Las ciencias en las escuela (págs. 13-26). Barcelona: Graó.

Vasco, Carlos E. (2014). *Los Sistemas Métricos en la Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias*. Capítulo 5

Anexos

	OBSTACULOS											
	ONT. INDUCIDO POR LA ENSEÑANZA			ONTOLOGICOS ESPONTANEOS			EPISTEMOLOGICO DE CONOCIMIENTO GENERAL					
TAREA	MEDICION FIGURAS REGULARES	ISNTRUMENTOS ESTANDARIZADOS	LINEALIDAD	FACILIDAD	EXACTITUD	CARACTERISTICAS DE LA UNIDAD	REL. ENTRE LO CONTINUO Y LO DISCRETO	CAMBIO DE UNIDAD	SELECCIÓN UNIDAD	UTILIZACION MEDIDA NATURAL	PROCESOS DE MEDICIÓN	CALCULO DE ÁREA
1A	X	X		X	X							
1B			X	X			X		X			
1C	X	X		X	X				X			
2A			X				X	X				
2B					X		X					
2C					X		X					
3A				X								
3B						X	X	X		X		
3C	X						X					
3D					X		X				X	
4B				X								
4C							X	X				
4E				X	X		X					
4F											X	
5A				X		X						
5B							X				X	
5C							X	X				
5D							X					
5E							X					
7B						X						
7D						X						
7F				X			X					
7G		X	X					X				
8B				X								
8C			X		X		X	X				
8D		X					X	X				X
8F					X		X					
9A	X	X						X				
9B		X		X	X							
9C		X		X	X				X			
9D							X	X				
10B											X	
10D								X	X			
10E									X			
10F				X	X							
10G					X	X						
10H					X		X			X		
11B					X							
11D					X		X		X			
11E					X				X			
11F							X					
11G					X							
11H				X	X			X				
11I					X							
12C							X					X
12D					X			X	X			

Tabla 15.Registros de sistematización de los obstáculos

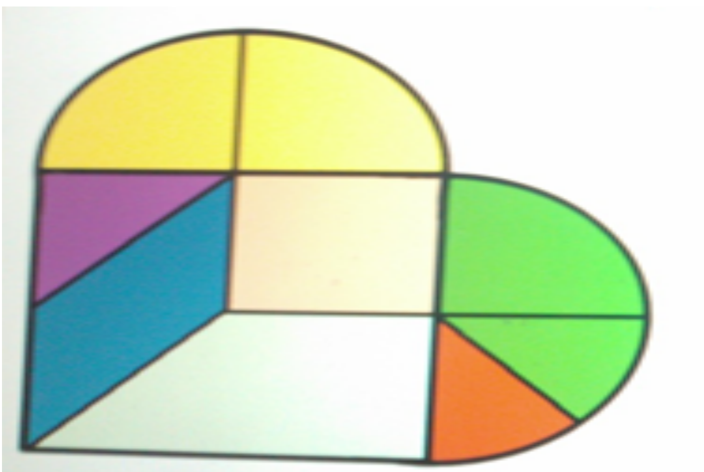
Anexos B

Tareas empleadas para la recolección de la información

Nombre: ________________________________ Grado: _____________________

TAREA 1

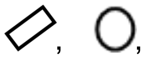
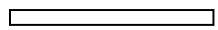
Observa la siguiente figura construida con el tangram



Si te pidiera medir alguna cualidad de la figura:

A. ¿Qué medirías? Explícalo de forma escrita y si desean emplea un dibujo para explicarlo.

B. Ya has decidido que cualidad medirías. Observa las siguientes unidades (,

Escoge la unidad de medida que te puede servir para realizar la medición. Ahora mídelo.

C. ¿Porque no midieron los sectores circulares de la figura?

TAREA 2

Nombre: ____ Grado: __________

Ahora resuelve la tarea con el grupo y seleccionen la estrategia más eficaz para resolver la situación planteada.

Un profesor de la institución desea que los estudiantes determinen la medida del largo y del ancho de la cancha de fútbol del colegio. El objetivo de la medición es saber si el colegio puede prestar la cancha para un torneo de microfútbol.

Vas a calcular las dimensiones de la cancha. Emplearás un objeto patrón sin numeración que te entregará el profesor.

A. Registra las medidas.

B. Escribe las dificultades que tuviste para resolver la situación.

____
____
____
____

C. ¿Crees que el pedazo que sobró es importante en la medida?

Tarea 3

Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

INDIVIDUAL

En una cortina aparecen unas manchas como las que ves más abajo. Su dueño quiere medirlas de la forma más exacta posible, porque el lavado de las cortinas se cobra de acuerdo con el tamaño de las manchas.

Figura A Figura B Figura C

A. Vas a calcular la medida de cada mancha empleando las unidades que te entrega el profesor. Decide cuál de las unidades emplearas para calcular. Explica por qué has escogido dicha unidad.

Nota: Puedes utilizar las siguientes figuras para medir el área (, , ,

B. Anota en el siguiente cuadro la medida de la mancha de cada figura.

Figura	Figura A	Figura B	Figura C
Medida			

C. Después de obtener el resultado. Explica ¿cuáles fueron las mayores dificultades que tuviste al resolverla?

D. ¿Los pedazos sobrantes son importantes en la medida?

TAREA 4

Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

El rector de la institución necesita cubrir el espacio entre los baños y el restaurante, pues desea techarlo para ubicar las motos de los profesores, atendiendo los requisitos de seguridad exigidos por los organismos de socorro del municipio; ese espacio es el ideal porque no obstaculiza la circulación de los docentes y estudiante en caso de evacuación por sismo o inundación. Se desea conocer el largo y el ancho del espacio, y por supuesto conocer el área del mismo. Para realizar esta actividad el rector necesita conocer sus medidas para poder comprar los materiales para techarlo, por lo tanto necesita tener una medida muy exacta porque el presupuesto es muy escaso.

Cada estudiante debe buscar una estrategia de medición para llevar a cabo dicha actividad. (Puedes medir con listones, palos, cuerdas, cabuya, pita, etc.)

A. ¿Qué unidad de medida seleccionó?

B. ¿Explica por qué escogió dicha unidad de medida?

C. ¿La medida fue exacta? (explica)

D. Describa como realizó el proceso de medición con la unidad escogida.

E. ¿Qué dificultad tuvo con la unidad escogida? ¿Escogerías otra, o no? ¿Por qué?

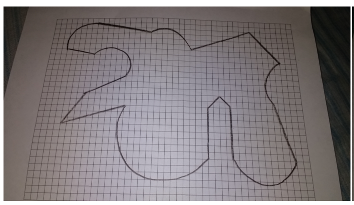
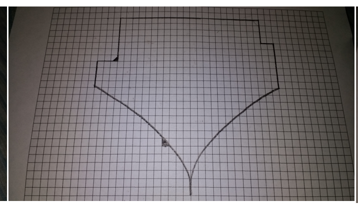
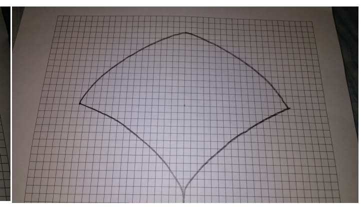
F. Escoge con tus compañeros la estrategia que creen es más eficaz para resolver la situación propuesta. Argumenten el ¿por qué de su eficacia?

Tarea 5

Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

INDIVIDUAL

En las siguientes cuadriculas aparecen unas figuras como las que ves más abajo. Su dueño quiere medirlas de la forma más exacta posible, porque dichas figuras forman cubiertas para café internet.

A. Vas a calcular el área de cada figura empleando la unidad que creas es la más apropiada para calcularla. Explica por qué has escogido dicha unidad.

B. ¿Cómo medirías el área de las figuras?

C. Ahora sí, Mídelas y anota en el siguiente cuadro la medida de cada figura.

Figura	Figura A	Figura B	Figura C
Medida			

D. Después de obtener el resultado. Explica ¿cuáles fueron las mayores dificultades que tuviste al resolverla?

E. ¿Tu medida fue exacta?

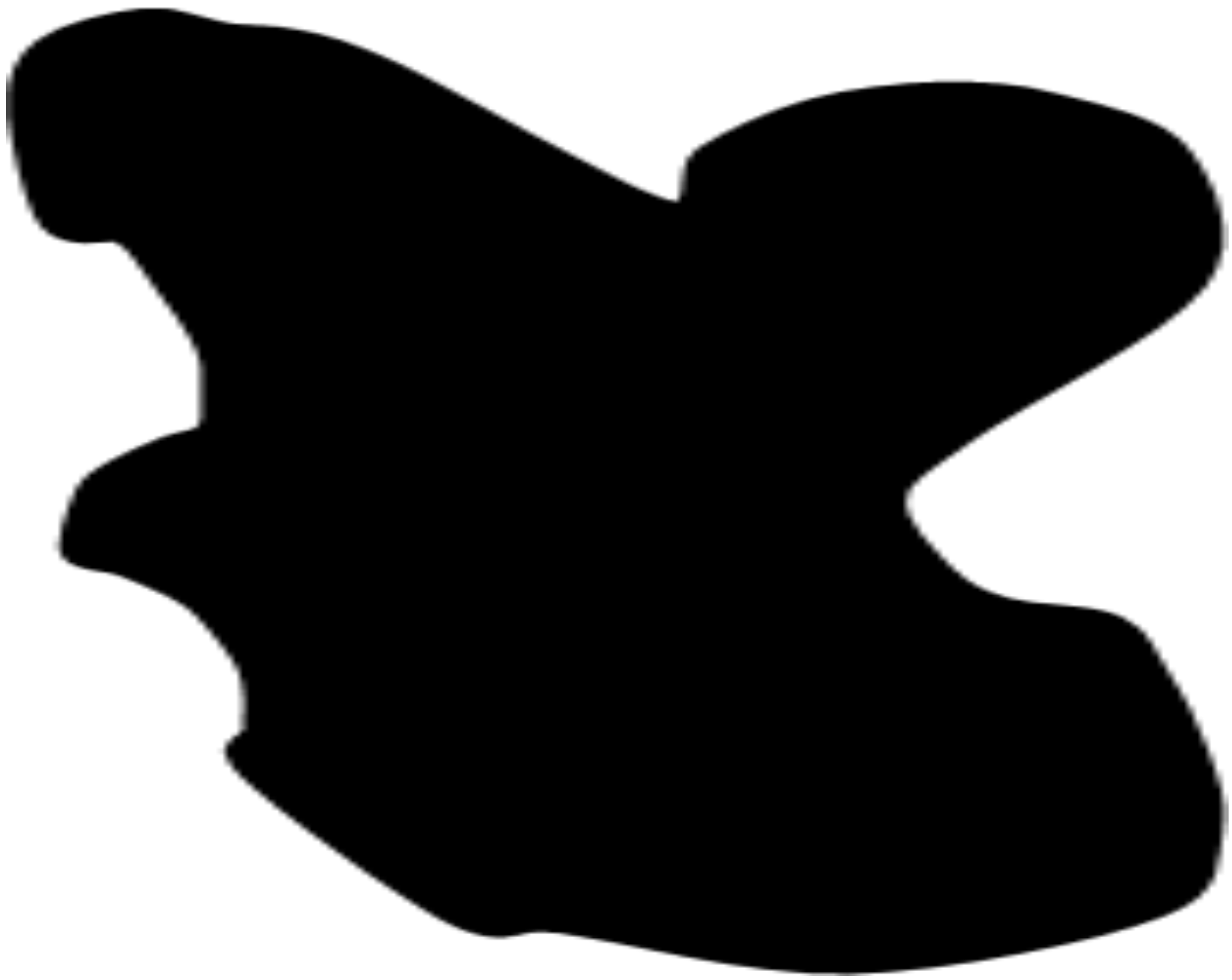
F. Compara con tus compañeros las medidas que obtuviste (¿Hay diferencias?) saca tus propias conclusiones.

TAREA 6

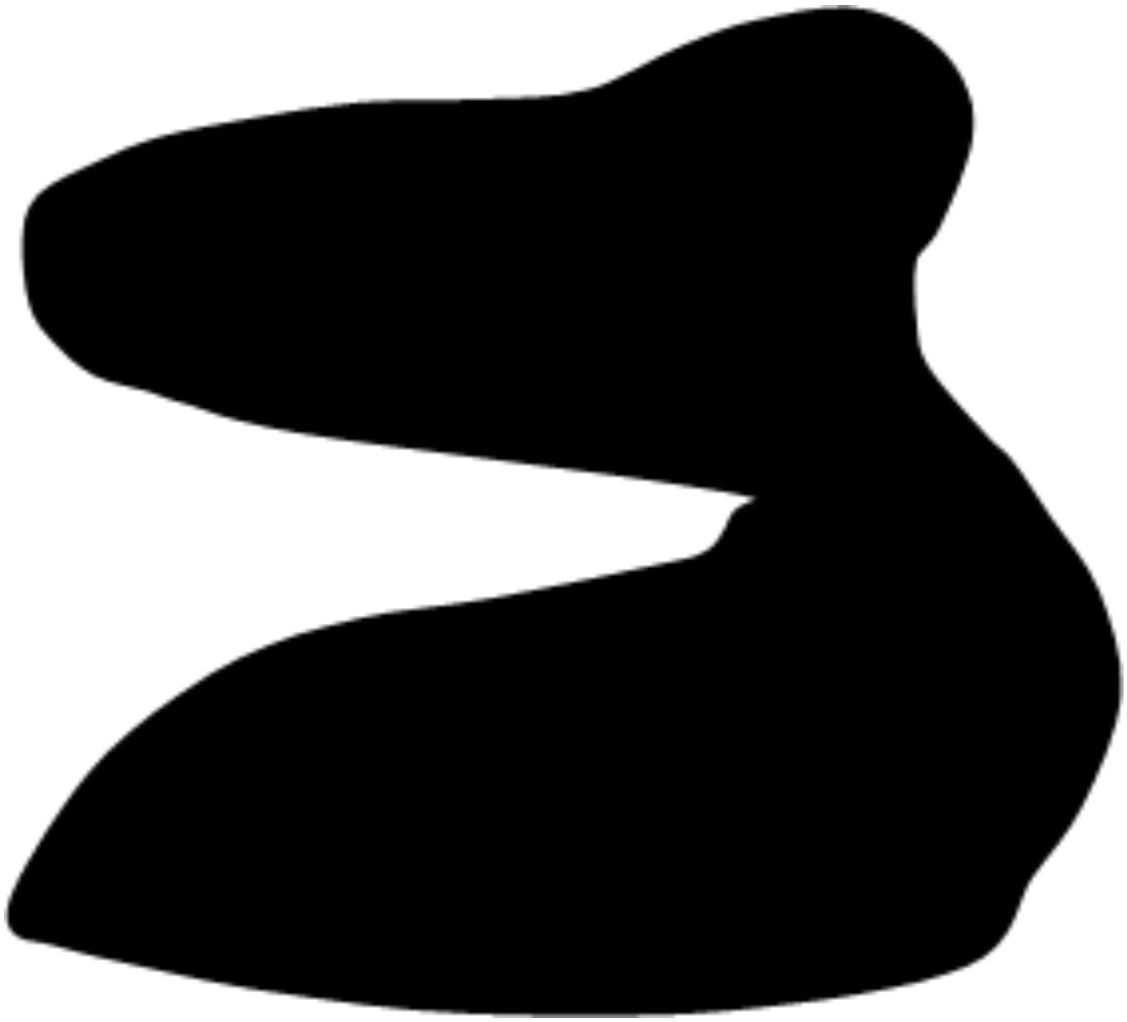
Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

Observa detenidamente las superficies que se presentan.

A.



B.



Las figuras anteriores representan huecos que presenta la capa de ozono debido al daño que le han provocado los humanos en la tierra. Se desea conocer el área de cada una de ellas para adelantar un tratamiento para evitar más daño.

A. ¿La superficie A tiene mayor área que la superficie B?

B. ¿La superficie A tiene menor área que la B?

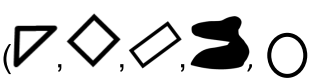
C. ¿Las superficies A y B tienen igual área?

D. ¿Puedes observar si una figura tiene mayor superficie que la otra? explica tu respuesta.

E. ¿Cuál es la medida tuya?

F. ¿Crees que los pedazos que te sobraron son importantes en la medida?

G. ¿Cómo harías para medirlos?

Nota: Puedes utilizar las siguientes figuras para medir el área (

TAREA 7

Nombre: ________________________________ Grado: _____________________

De la secretaria de Educación Departamental enviaron a un delegado del ministerio de trabajo para revisar los requerimientos de seguridad que debe tener las áreas de acceso al colegio. El delegado del ministerio de trabajo debe medir la entrada principal de la sede, pues necesita conocer las dimensiones (largo y ancho), ya que debe instalarle cinta reflectiva antideslizante, pero no se dispone de una unidad de medida para hacerlo.

¿Qué unidad de medida emplearías para realizar la medición y por qué?

(Sugerencia: realizar la medición con Lazos, listones, cintas, cabuyas).

A. ¿Qué dificultad tuviste para realizar dicha actividad?

B. ¿Crees que podrías tener una medida diferente si usas otro tipo de unidad?

C. Compara la medida que tuviste con tus compañeros,
¿Hay diferencias?

D. ¿Por qué crees que se presentaron esas diferencias?

E. ¿Qué unidad de medida seleccionó?

F. ¿Explica por qué escogió dicha unidad de medida?

G. ¿La medida fue exacta? (explica)

TAREA 8

Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

En el colegio se requiere cambiar la malla alrededor del mismo, pues la actual se encuentra muy deteriorada y no brinda seguridad. Para llevar a cabo este trabajo se necesitan hacer el cerramiento de nuevo y por lo tanto se hace necesario medir toda el área; las medidas deben ser lo más exactas posibles. De acuerdo a lo anteriormente expuesto:

A. ¿Qué unidad de medida usarías para llevar a cabo esta tarea?

B. ¿Explica por qué escogió dicha unidad de medida?

C. ¿La medida fue exacta? (explica)

D. ¿Cuánta área de malla se necesita para hacer el cerramiento?

E. ¿Compara las medidas en grupo de tres personas, y analiza si hay algún cambio en las medidas efectuadas por cada uno?

Después de medir

F. ¿Qué dificultad tuvieron para medir el área de cerramiento del colegio?

TAREA 9

Nombre: ________________________________ Grado: _____________________

A. ¿Qué propones tú para conocer la cantidad de cuerda que se empleó para el cerramiento del jardín?

B. ¿Qué unidad de medida utilizarías y por qué?

DESPUES DE MEDIR

C. ¿Crees que la unidad de medida fue el adecuado?, o ¿Escogerías otro? Explica.

D. ¿Tu medición fue exacta? o ¿No supiste como resolver esta situación?

TAREA 10

Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

El tangram es un puzzle de siete piezas que procede de China, y con el que se pueden construir más de 300 figuras diferentes.
a). Construye con las siete piezas del tangram un cuadrado. Reprodúcelo en tus apuntes indicando la posición de las piezas.
b) Construye con las siete piezas del tangram cada una de las figuras que a continuación se te presentan. Una vez construidas debes reproducirlas en tus apuntes indicando la posición de las piezas. Responde de forma razonada las siguientes preguntas:
A. ¿Tienen estas figuras la misma área? Justifica tu respuesta.

B. ¿Cómo podrías determinar el área de estas figuras?

C. ¿Qué unidad de medida utilizarías?

D. ¿Cuál crees tú que es la mejor estrategia para hallar el área de estas?

Discute en grupo esta situación, y explica a tus compañeros de la forma que más creas conveniente.

E. ¿Hay alguna diferencia con la medida del área que hallaron tus compañeros?

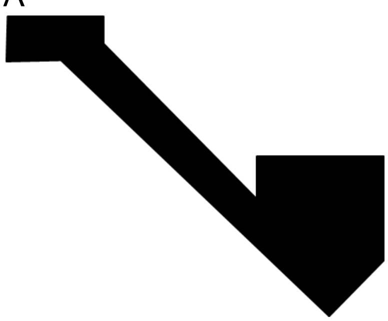
Explica

F. ¿Crees que debes modificar tu Unidad de medida elegido?

G. ¿Encontraste alguna dificultad para llevar a cabo esta actividad?

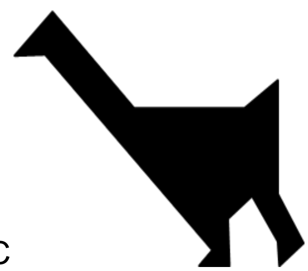
H. ¿Cómo mides los pedazos sobrantes?

A

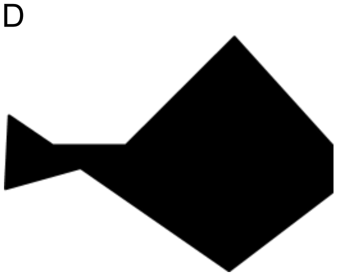


B

C



D



E

TAREA 11

Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

Modifica la superficie del dibujo de manera que se obtenga una nueva superficie con:
a) Mayor área
b) Menor área
A. ¿Con que unidad medirías el área de esta figura?

B. ¿Explica cómo medirías esta área?

C. ¿Crees que hay varias formas de medir esta figura?

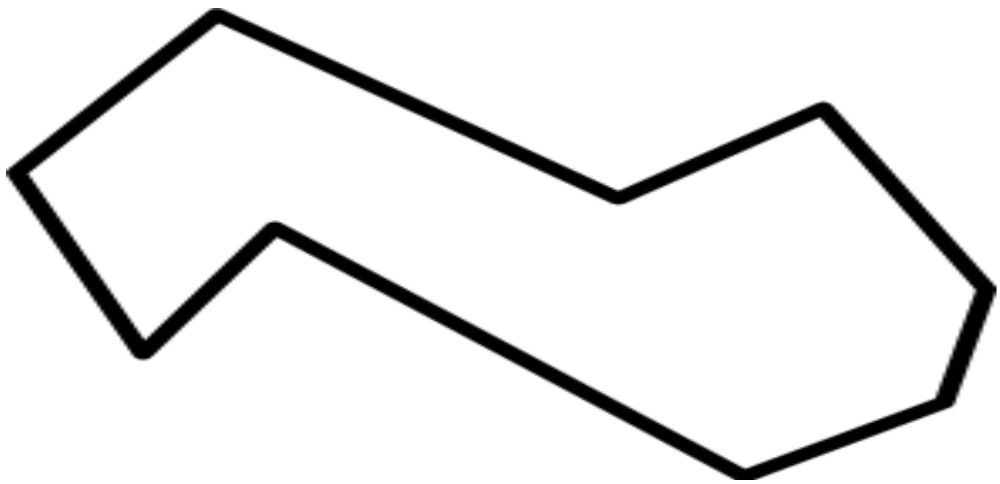
D. ¿Encontraste alguna dificultad para llevar a cabo esta actividad?

E. Discute en grupo con tus compañeros y compara los instrumentos de medición y las medidas.

F. ¿Cuál es la medida tuya?

G. ¿Crees que los pedazos que sobraron son importantes en la medida?

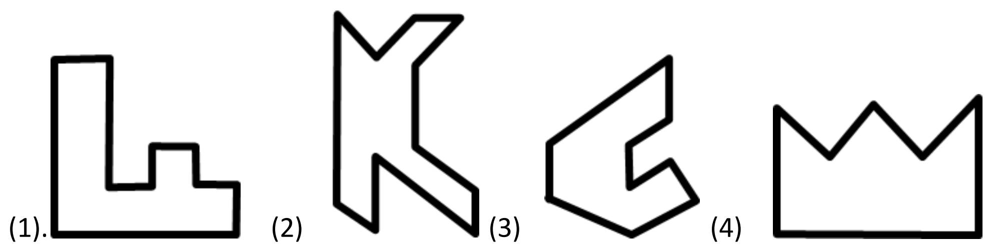
H. ¿Cómo harías para medirlos?



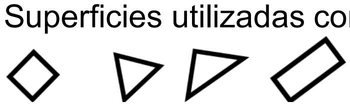
TAREA 12

Nombre: ______________________________ Grado: ____________________

Mide el área de cada una de las siguientes superficies. Para ello dispones de cuatro superficies diferentes.
Establece la relación entre las áreas de cada una de las superficies (1), (2), (3) y (4).
Polígonos cuyas áreas se desean determinar a escala reducida.
A. ¿Cuál tiene mayor área?
B. ¿Cuál tiene menor área?



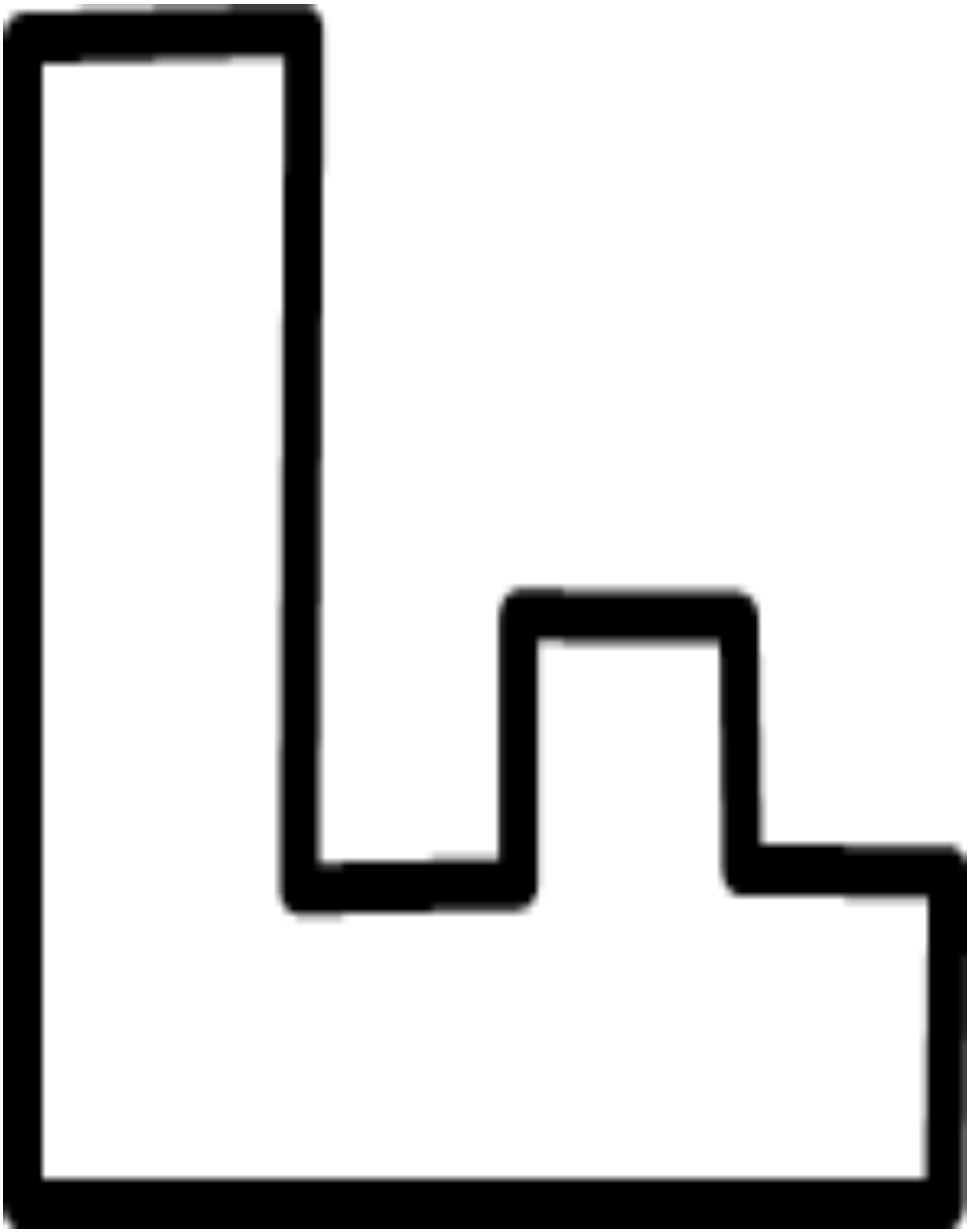
Superficies utilizadas como unidades a escalas reducidas



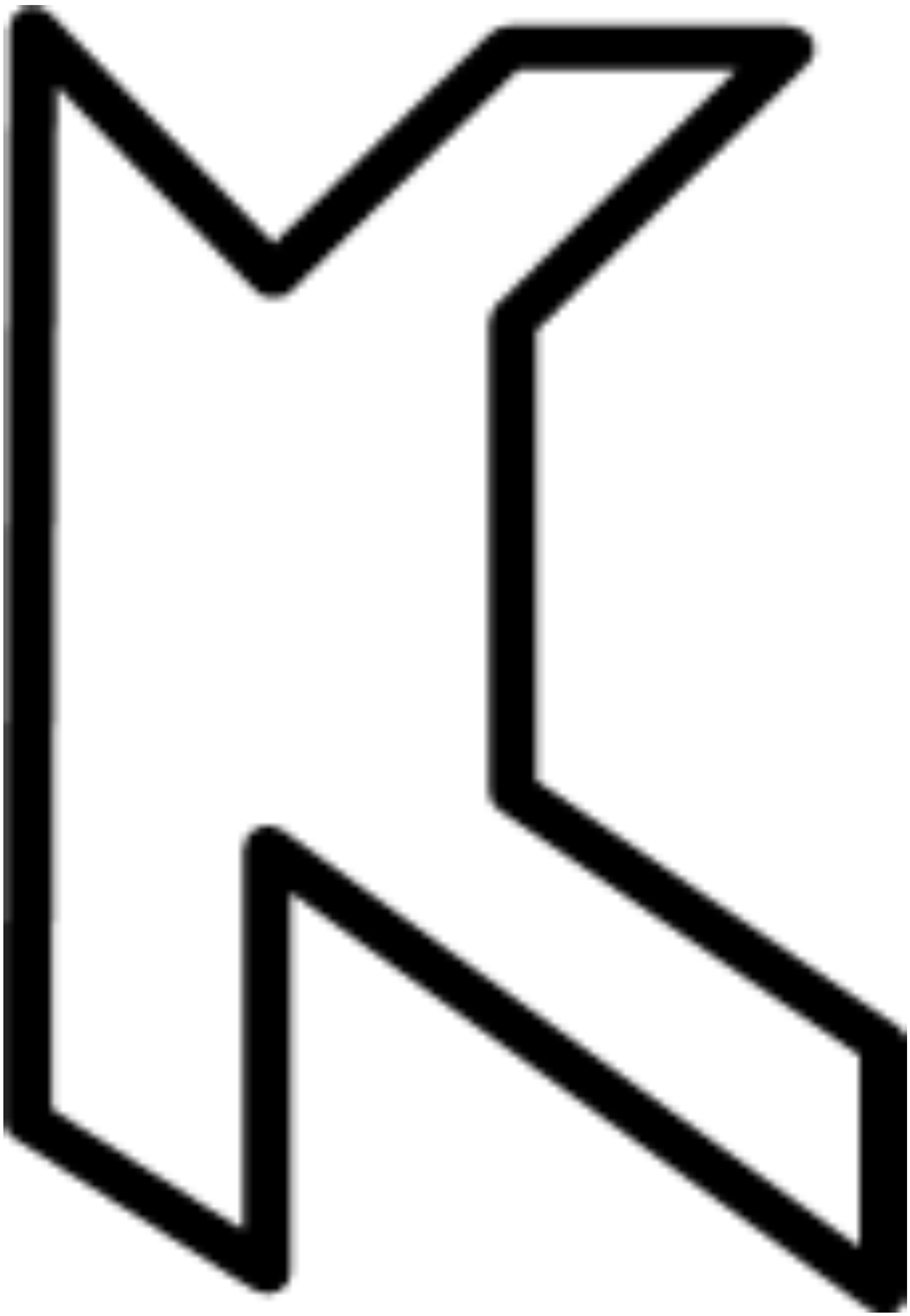
Nota: En las páginas siguientes se muestran los polígonos y las unidades a tamaño real

C. ¿Cuál es la medida tuya?
D. ¿Crees que los pedazos que te sobraron son importantes en la medida?
E. ¿Cómo harías para medirlos?

Superficie (1)



Superficie (2)



Superficie (3)

Superficie (4)

UNIDADES