Intuir y formalizar: procesos coextensivos

Luis Moreno Armella

Resumen: Hay una fuerza que atraviesa la enseñanza del cálculo: la tensión entre la intuición y el rigor. El cálculo se sigue enseñando como si fuera natural introducir el estudio de la variación y la acumulación mediante las matemáticas de ε y δ. Frecuentemente se considera un fracaso que los estudiantes conciban la noción de límite mediante metáforas del movimiento. Aquí se evidencia la tensión creada por la educación tradicional entre las intuiciones y una formalización sin brújula. Las conexiones internas intuitivas sobre acumulación y variación no se traducen correctamente en la formalización aritmetizada mediante ε y δ.

Palabras clave: intuición, formalización, infinitesimal, cognición analógica, símbolo, metáfora, conocimiento enraizado, medio digital, mediación.

Abstract: There is a force that goes through the teaching of Calculus: The tension between the intuitive and the formal. Calculus continues to be taught as if it were natural to introduce the study of change and accumulation by means of formalized concepts known as the mathematics of ε and δ. It is frequently considered as a failure that "students still seem to conceptualize limits via the imagination of motion." This kind of assertions shows the tension created by traditional teaching between students' intuitions and a misdirected formalization. The internal connections of the intuition of change and accumulation are not correctly translated into that arithmetical approach of ε and δ.

Keywords: intuition, formalization, infinitesimal, analog cognition, symbol, metaphor, embodied knowledge, digital medium, mediation.

1. INTRODUCCIÓN

Felix Klein, en un artículo publicado en 1896 en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, "The arithmetizing of mathematics", expresó su descontento frente al rumbo formalizante que estaban tomando las matemáticas en ese momento. En ese artículo, por primera vez, se introduce la expresión "aritmetización de las matemáticas". Allí, Klein recuerda que Gauss, aunque pertenecía a una generación que había introducido gradualmente un espíritu más crítico dentro del quehacer matemático, empleaba, sin duda alguna, su intuición del espacio como base de sus demostraciones. Para Klein, la intuición tenía un papel central en el pensamiento matemático y lo expresa así:

Fecha de recepción: 15 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 4 de noviembre de 2013.

> No concedo que la ciencia aritmetizada constituya la esencia de las matemáticas [...] Debo señalar del modo más enfático que no es posible tratar exhaustivamente las matemáticas mediante el método deductivo exclusivamente, sino que, aun hoy en día, la intuición conserva su provincia [...] La investigación lógica tiene su lugar sólo después que la intuición haya completado su trabajo de idealización. *La intuición matemática aparece íntimamente vinculada con las capacidades motoras y visuales* [...] (Klein, 1896)

Klein veía, en este movimiento de aritmetización, la instalación de una *falsa pedagogía y una visión distorsionada de las ciencias*. Las preocupaciones de Klein incluían la pedagogía de las matemáticas y las matemáticas mismas. ¿Estaba la pedagogía subordinada al desarrollo formal de las matemáticas? Parece que Klein, en el artículo mencionado y en otras obras (Klein, 2004), impulsa la idea de que dicha subordinación hay que cuestionarla y analizarla críticamente.

Nada de esto le impedía percibir que intuición y formalización constituían una especie de trayectoria bidireccional, dialéctica, en la producción del conocimiento, pero distinguía claramente los problemas de la enseñanza como cualitativamente distintos a los del desarrollo propio del conocimiento matemático.

Pero ésta no es una historia aislada. En 1931, Mark Vygodskii publicó en Moscú su libro *Fundamentos del cálculo infinitesimal*. En este libro, Vygodskii explicaba por qué estaba presentando un enfoque que pretendía rescatar el papel de la intuición y el razonamiento inductivo. Refiriéndose a los textos oficiales, decía:

> Todos estos libros comparten un enfoque que considero equivocado y lesivo. Específicamente, en todos ellos los conceptos fundamentales del cálculo se presentan de manera lógica. No importa cuánto se simplifiquen las pruebas para eludir el rigor formal, invariablemente los textos intentan presentar los esquemas del análisis moderno. La consecuencia es que los conceptos fundamentales no aparecen en una perspectiva evolutiva sino como un bloque de hielo.

Nikolai Luzin, cofundador de la escuela de análisis matemático de la Universidad de Moscú, hizo explícito su apoyo a Vygodskii en unas cartas escritas poco después de las polémicas que suscitó su libro. En esas cartas, Luzin explica su punto de vista sobre la aritmetización del cálculo y enfatiza que, en realidad, ese proceso de aritmetización *no corresponde a una sistematización de las ideas medulares del cálculo*. Resalta que aquel trabajo de fundamentación fue muy bueno, que se hizo como debía hacerse, pero que:

> [...] si ello se corresponde con lo que tenemos en nuestra conciencia, eso es otro asunto. Me asalta una brutal contradicción entre las fórmulas intuitivamente claras del cálculo integral con el incomparablemente artificial y complejo trabajo invertido en las *justificaciones* y *demostraciones*. (en Demidov y Shenitzer, 2000)

Estas líneas dejan ver con claridad meridiana a dónde apunta la crítica: la intuición sobre los problemas de movimiento, de variación y acumulación, propios del cálculo, ha sido desalojada y ha sido sustituida por una maquinaria formal, más precisa seguramente, pero desconectada de aquellas intuiciones.

Para Luzin, el tratamiento *intuitivo* había constituido una de las piedras de toque de su formación matemática y filosófica, tal y como explicaba extensamente en las cartas a Vygodskii.

Las siguientes líneas, tomadas de un artículo de Grabiner (1983), ilustran, a través de un diálogo, la situación de callada perplejidad que aqueja a muchos estudiantes frente a este formalismo que venimos comentando:

Estudiante: El carro lleva una velocidad de 50 km por hora. ¿Qué significa eso?
Profesor: Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $|t_2 - t_1| < \delta$, entonces:

$$\left|\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50\right| < \varepsilon$$

Estudiante: ¿Cómo es posible que alguien haya imaginado tal respuesta?

Éste es un drama que cotidianamente se presenta en muchos salones de clase. Siguiendo el hilo conductor de las reacciones de Klein, Vygodskii y Luzin, se llega a la conclusión de que la aritmetización introdujo una tensión casi insostenible entre las ideas intuitivas del cálculo y las ideas desarrolladas en el curso de dicha *aritmetización*.

Es muy claro que el análisis histórico, las investigaciones didácticas y los cambios curriculares nos están enseñando, de manera pertinaz, que no llevamos la dirección adecuada para atender el tema en cuestión; pero que, de manera igualmente pertinaz, estamos decididos a no corregirla.

Tanto Klein como Luzin escriben varias décadas *después* de que ha tenido lugar la instalación del proceso de aritmetización. Sus expresiones permiten inferir que perciben las consecuencias del desequilibrio producido entre el acercamiento intuitivo y el nuevo enfoque aritmético.

En un artículo sobre la aritmetización de las matemáticas, el matemático norteamericano James Pierpont escribió, no sin cierta inquietud, que:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo del número [...] el análisis de hoy [está] construido sobre la noción de número, y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. Sin embargo, no hay que pasar por alto que el precio que debemos pagar por ello es terrible: *la total separación del mundo de los sentidos*. (Pierpont, 1899)

Se percibía ya que el papel central del pensamiento intuitivo estaba siendo puesto de lado, o más bien, *inhibido* por el desarrollo del programa de aritmetización. La tensión entre el razonamiento intuitivo, el inductivo y el puramente deductivo sigue gravitando hoy día en el medio educativo.

2. LA EXPERIENCIA SIMBÓLICA

Cuando vemos a un pez nadar o a un pájaro surcar el aire, estamos contemplando el resultado de millones de años de "diálogo" entre una especie y el entorno físico. La forma del animal y su aparente facilidad para desplazarse en su propio medio son el resultado de un proceso de selección natural que ha producido una especie *viable* en ese entorno. A simple vista resulta difícil aceptar que el pájaro no haya sido diseñado *a priori* para volar con tanta facilidad... pero no, no ha sido así. Es, más bien, el resultado de un proceso que ha ido depositando lenta pero inexorablemente una forma de "conocimiento" en su sistema nervioso y en su morfología, que lo hace actuar como si "supiera" lo que tiene que hacer. El pájaro "sabe" volar, el pez "sabe" nadar, *pero no saben que lo saben*. Es como si el conocimiento que tuvieran no pudiesen declararlo al "cruzar una frontera", porque no saben que lo tienen: su conocimiento permanece *implícito*, encerrado en su cuerpo.

Los seres humanos, al pertenecer al mundo biológico, compartimos con las demás especies este nivel implícito de conocimiento que "vive" encerrado en el cuerpo. Sin embargo, en determinado momento de nuestra evolución, adquirimos una capacidad que marcó profundamente a nuestra especie y trazó un camino evolutivo distinto. Esa capacidad –expresada en términos generales– ha sido la *capacidad simbólica*. La posibilidad de capturar nuestra experiencia de forma simbólica nos hace más conscientes de aquello que se representa mediante símbolos. La lengua natural conforma el que, tal vez, es el sistema simbólico más importante que posee una persona. A pesar de que el significado de las palabras es compartido en gran medida por todos los hablantes de una lengua, aquéllas tienen, para cada hablante, matices personales. Los matices del significado son inseparables del intérprete.

Desde el primer día en el planeta, un recién nacido entra en contacto con su mundo social y cultural de manera que sus experiencias llevan ya la marca de la cultura. A diferencia de otras especies, para el humano se trata de una experiencia híbrida, y con el tiempo va quedando depositada casi totalmente en los sistemas simbólicos de esa cultura. Toda persona ha experimentado alguna vez un sentimiento de angustia, por ejemplo, ante una situación en la que siente que le faltan las palabras para expresar eso que tiene dentro de sí. Es como si nuestro "mundo implícito" no lograra ser *traducido* plenamente a los símbolos de la lengua, es decir, a las palabras.

Las siguientes líneas de un poema de O. Mandelstam, al que era muy afecto Vygodskii, capturan esa situación: *He olvidado la palabra que quería decir, y el pensamiento, incorpóreo, regresa al reino de las sombras*.

Las personas viven inmersas en una tensión (sutil a veces, apremiante en otras), entre el mundo de sus experiencias y el impulso de fijar esas experiencias en algún sistema simbólico, incluido, desde luego, el lenguaje natural.

Una vez que una experiencia ha sido trasladada al lenguaje o a otro sistema de representación simbólica, ésta puede ser refinada, pulida, profundizada. Como cuando una piedra preciosa está a disposición de un avezado joyero que la transforma en una pieza única. Para las personas, las relaciones entre su mundo de experiencias y su mundo simbólico constituyen un todo inseparable. Un buen narrador, mediante su oralidad o su escritura, puede lograr que vivamos los pormenores de una historia como si hubiésemos estado en el lugar y tiempo de su acontecer. Pero no pasemos por alto que al escuchar o leer esa historia, casi de manera automática la referimos a nuestras propias experiencias, que funcionan como un piso firme sobre el que se elabora el mundo de significados nuevos que vienen encarnados en la narración que escuchamos o leemos. Si la experiencia que se cuenta nos es totalmente ajena, seguramente no logrará afectarnos de manera profunda; en todo caso, la podemos entender a un nivel, digamos, formal.

Los significados de las palabras y de los otros sistemas simbólicos que empleamos en nuestra cultura no son aislados, más bien son parte sustancial de la infraestructura de la cultura a la que pertenecemos. Somos una especie híbrida, pero somos, sobre todo, una especie simbólica.

La búsqueda de razones es una pulsión más o menos permanente. Cuando se dice que algo "tiene sentido", es como si el significado hubiese llegado a través del ojo, del oído o del tacto, es decir, a través de los *sentidos*. Lo que llega mediante los símbolos resulta tan natural como lo que llega mediante la percepción humana, pues, al fin y al cabo, las percepciones siempre son un acto de interpretación o, por lo menos, un intento de interpretación.

Como una banda de Moebius, tenemos simultáneamente los colores de la biología y de la cultura. Pero, como ha expresado el antropólogo C. Geertz (*The Interpretation of Cultures*, 1983), dado que nuestro sistema nervioso se desarrolló en gran medida en interacción con la cultura, le resulta imposible organizar nuestra experiencia sin la guía que suministran los sistemas de símbolos significativos.

La experiencia humana es, en síntesis, una experiencia en un mundo social y cultural. La acción humana ha saturado el mundo en que nacemos con sus obras materiales y conceptuales. Estamos rodeados de objetos plenos de significados. Casi podríamos decir que esos objetos están *definidos* por aquellos significados. Pero también estamos inmersos en una especie de atmósfera plagada de objetos simbólicos como el lenguaje, las obras de arte, los instrumentos científicos y todas las instituciones sociales que modulan nuestra cotidianidad.

Todo lo anterior permite afirmar que la experiencia humana sobre la variación, la acumulación y demás ideas que han estado en las raíces del cálculo son experiencias en un mundo material y cultural. Experimentamos la fuerza de la gravedad que nos mantiene fijados al piso; experimentamos la aceleración al caer, y para ello pareciera que no necesitamos tener palabras o conceptos. Pero una vez que esas experiencias pasan por el tamiz de la conceptualización matemática, dejan de ser experiencias corporales y se convierten en conceptos cristalizados en símbolos. Tal es el caso, por ejemplo, de la geometría euclidiana que, aunque es una organización simbólica, puede apreciarse en ella las experiencias sobre el espacio que dieron origen a dicha organización. Decir, por ejemplo, que dos puntos definen una única recta es casi una traducción directa de la experiencia de tensar una cuerda entre las manos.

Las nociones que dieron origen al cálculo tenían y siguen teniendo una contraparte cercana en las experiencias humanas. La recta tangente y el área bajo la curva son más generales que la tangente a una circunferencia o que el área del círculo, pero no parecen necesitar, conceptualmente, una mayor elaboración. La validez de la operatividad que las acompaña sigue de cerca a las nociones originales. No es necesario entrar, digamos, a una discusión sobre la *existencia* del área bajo una curva cuando, claramente, la curva es continua en todo punto. Los pioneros del cálculo, Cavalieri, Fermat, Wallis y, desde luego, Newton y Leibniz, se mantuvieron cerca de esta posición: subordinar la validez a la interpretación de los resultados, basándose en la experiencia y el sentido intuitivo de los mismos. De esa manera mantuvieron la organización formal muy cercana a las ideas de origen. Los símbolos matemáticos desempeñaban el rol de intermediarios entre las ideas y su formalización.

Las críticas al programa de aritmetización que hemos documentado en la primera parte de este trabajo, apuntan justamente a que dicho programa se impulsó desde una epistemología de las matemáticas alejada del naturalismo que animaba a los desarrollos de la primera edad del cálculo. Más adelante podremos regresar al análisis de dicha epistemología, pero de inmediato queremos señalar que ese cambio de marco epistémico, al trasladarse a la enseñanza, generó y sigue generando desequilibrios graves en los procesos de aprendizaje.

Vale la pena traer a colación las siguientes líneas del académico S. Nóvikov (véase la introducción a la obra *Matemáticas Superiores* de Ya. Zeldóvich e I. M. Yaglom, MIR 1982), quien expresa su visión sobre cómo las investigaciones acerca de los fundamentos del análisis matemático han tenido un fuerte impacto *negativo* en el estilo de presentar las ideas centrales a los estudiantes. En palabras de Nóvikov:

> Las definiciones precisas de tales conceptos como, por ejemplo, el número real, límites, la continuidad y otros, representan el resultado de un análisis lógico prolongado y, además, nada trivial de las teorías *ya creadas e intuitivamente claras* a un nivel de rigurosidad propio de las ciencias naturales. Dichos conceptos, nada fáciles para principiantes, se empezaron a *usar de manera irracional*: en los libros de texto precedían a la exposición de la teoría substancial y de la aplicación de ésta, *complicando artificialmente la comprensión de cosas intuitivamente claras*. (Zeldóvich y Yaglom, 1982)

Por su parte, Merlin Donald, en su obra *A Mind so Rare* (2001), arroja luz sobre el problema intuición/formalización desde una perspectiva evolutiva, y concluye con la siguiente observación:

> Hemos sido capaces de construir lenguajes y símbolos, como los que encontramos en las narraciones, en el arte y en las matemáticas. Éstas tipifican el modo simbólico [...] y este lado simbólico de nuestras mentes crea un universo abstracto, finamente definido, que es en gran medida de nuestra propia invención. (Donald, 2001, pp. 154-155)

Estas reflexiones son oportunas, teniendo en cuenta que la mayor parte de la formalización aritmética clásica de la continuidad tiene lugar vía la simbolización logográfica. Ahora bien, señalando la indisociabilidad del conocimiento analógico (implícito, intuitivo) y del conocimiento simbólico, puede advertirse que si bien los símbolos tienen un impacto cristalizador profundo sobre cómo sentimos el mundo, ellos terminan generando la ilusión de ser la fuente de la experiencia misma. Sin embargo, los símbolos no son la fuente exclusiva, primordial, de la experiencia. Más bien, como en un telar, los símbolos y la experiencia son como la trama y la urdimbre de nuestros conocimientos explícitos.

3. LAS RAÍCES DE LA REFERENCIA Y LA NOTACIÓN DEL CÁLCULO

El significado primigenio del cálculo se articula alrededor de una serie de *metáforas sobre el movimiento y la variación*. Esas metáforas controlan la notación: por ejemplo, se habla que una sucesión como de una sucesión de aproximaciones que tienden a un número fijo llamado el límite de la sucesión y eso lo escribimos así: $a_n \rightarrow L$.

La flecha sugiere que los términos sucesivos de la "aproximación" cada vez se "encuentran más cerca" del número L, que transcurre un tiempo antes de que la sucesión "alcance" su límite. Se emplean, además, términos como sucesión (o función) "creciente", "constante". Visualizamos una función como una máquina que transforma el número x que introducimos en la máquina, en otro que sale de la máquina y que se denota $f(x)$. Tenemos, pues, una simbolización asociada a las metáforas de base del cálculo, cargada de sus significados originales pero –y aquí puede estar la raíz de la crítica de Luzin que se ha presentado antes– las definiciones formales que se asocian con esas notaciones son atemporales, desconectadas del movimiento. Bolzano, en su programa de formalización del cálculo, ya insistía en que el movimiento no debía tomarse como una idea matemática. Había razones para ello (como bien explica Nóvikov, entre otros), pero esas razones han sido trasladadas a la enseñanza como justificaciones de un movimiento didáctico y se produce entonces una *ruptura del significado:* las sucesiones ya no son sucesiones de aproximaciones, la sucesión ya no se acerca a su límite, etc., y que llevaron a Vygodskii a escribir que tales ideas quedaban congeladas, *como un bloque de hielo*. Metáforas que en un primer acercamiento desempeñan un papel central en el refinamiento de las ideas enraizadas en el aparato cognitivo de los estudiantes y que ayudan al proceso inicial de simbolización.

Claro, una notación como la flecha → utilizada en la idea de límite como aproximación: $a_n \rightarrow L$, puede emplearse porque ya viene "cargada" con un significado. Desde muy temprano, los estudiantes, las personas en general, viven sumergidas en un medio sociocultural donde abundan los símbolos, y lo que esos símbolos significan comunalmente, se aprende allí, en el medio sociocultural. Las personas aprendemos el significado de un símbolo al tiempo que lo asociamos a nuestras propias experiencias primigenias, que también son experiencias fusionadas, como se dijo antes, al medio sociocultural. No podemos separar, pues, el significado sociocultural y el significado "original". Vemos flechas dibujadas y flechas físicas, y todas ellas *indican* una dirección de movimiento. Ése es el significado que se sugiere al estudiante cuando se encuentra ante la notación $a_n \rightarrow L$.

Con esa raíz del significado puede elaborarse posteriormente una extensión, una profundización como la del análisis matemático. Pero no de inicio. Esto ocurre no sólo como problema didáctico, sino también entre profesionales. Nóvikov explica (en Zeldóvich y Yaglom, 1982) que, insatisfechos con la literatura matemática de enseñanza, los físicos teóricos consideran como condición *sine qua non* llevar hasta el principiante sus propias ideas sobre la manera cómo un naturalista ha de usar el aparato matemático, así como el procedimiento más sencillo mediante el cual puede apropiarse de los métodos que requiere el naturalista (el físico teórico).

4. EULER: UN MUNDO MATEMÁTICO

La obra de Euler reconcilia el carácter constructivo de las matemáticas con la necesidad de un nivel aceptable de justificación de los asertos matemáticos que se van formulando. Más que definiciones formales, se puede encontrar en su obra *descripciones* sustanciales de los objetos matemáticos, y la manera de operarlos va develando gradualmente su naturaleza.

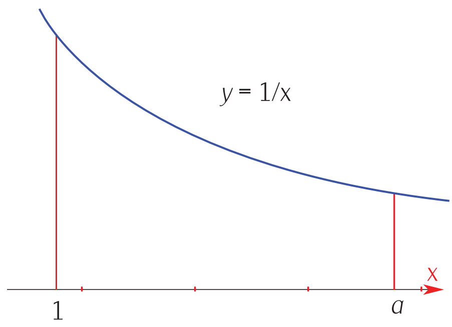
Por ejemplo, los logaritmos de base e pueden definirse como las áreas bajo la curva $1/x$. En símbolos matemáticos:

$$\log(a) = \int_1^a \frac{dx}{x}$$

Geométricamente, esto corresponde al área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = a$ (figura 1).

Ahora bien, el dominio de la función logaritmo (según Euler) incluye números infinitesimales y números infinitamente grandes. Tomando una cantidad infinitesimal w, tendremos:

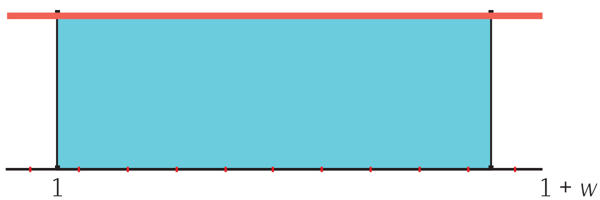
Figura 1



$$\log(1 + w) = \int_{1}^{1+w} \frac{dx}{x}$$

Geométricamente, el área sombreada (figura 2) representa a $\log(1 + w)$.

Figura 2



En efecto, como $1 + w$ se encuentra a distancia infinitesimal de 1, la gráfica de la función entre 1 y $1 + w$ es horizontal y, por lo tanto, el área de interés es un rectángulo (aquí se está aplicando el hecho que para una función continua si la variable independiente varía infinitesimalmente, entonces la variable dependiente [la altura] varía infinitesimalmente: es horizontal), de modo que:

$$\log(1 + w) = w$$

Como la función logaritmo es la inversa de la función exponencial, se tendrá:

$$e^{w} = 1 + w$$

Ahora, para cualquier número finito x, se toma el número infinitamente grande:

$$N = \frac{x}{w}$$

Entonces,

$$e^x = e^{Nw} = (e^w)^N = (1 + w)^N = (1 + \frac{x}{N})^N$$

Tomando los extremos en la expresión anterior, se tiene:

$$e^x = (1 + \frac{x}{N})^N$$

No es necesario ofrecer más ejemplos del modo de operar de Euler con las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas para captar que, si bien sus procedimientos operatorios pudiesen ser considerados hoy día como "informales", hay una verdad, una corrección profunda en ellos. Constituyen un ejemplo de esa ambigüedad entre intuición y rigor formal, en el sentido que W. Byers da al término ambigüedad (véase *How Mathematicians Think*, Princeton University Press, 2007).

Una de las metas de este trabajo es *problematizar* el aprendizaje: *las matemáticas, en el salón de clases, no pueden ser reducidas al juego de un sistema simbólico con grandes restricciones sintácticas que no parecen obedecer a ninguna base semántica enraizada en la experiencia de quien intenta aprender*. Antiguamente se decía que para enseñarle latín a Juan, había que saber latín, pero también *saber* Juan... No como algo complementario sino tan importante como saber latín. El proceso educativo no puede deslindar el conocimiento, que es el *instrumento* educativo, del ser humano cuya educación está, en gran medida, en nuestras manos.

Aclaremos que se está trabajando en un *modelo de uso* donde se es insensible a la "perturbación" de una cantidad mediante otra que, frente a la primera, es infinitesimal. Es en esa especie de *modelo de uso* donde Euler fabrica sus resultados. Los infinitesimales son como un ojo poderoso que penetra en los ámbitos más recónditos de las funciones y revelan sus secretos. Conviene recordar el punto de vista de Leibniz sobre los infinitesimales, porque deja en claro que muchas de las objeciones contemporáneas sobre estos entes son como misiles mal dirigidos:

> [...] será suficiente hacer uso de ellos *como una herramienta* que tiene ventajas para los propósitos de calcular, de la misma manera que el algebrista trabaja con raíces imaginarias con gran provecho. Lo hacemos porque en ellos [en los infinitesimales] hay a mano una herramienta para calcular, como queda verificado de modo manifiesto *con rigor* en cada caso mediante el método que ya hemos presentado. (en Ímaz y Moreno, 2010)

Estas líneas dejan ver meridianamente que no hay en Leibniz problema ontológico alguno: los infinitesimales forman parte de un método para calcular en el contexto de un *modelo de uso* cuyos propósitos son desentrañar, inventar... Euler mismo, en la introducción a su libro *Introducción al análisis de los infinitos* (en traducción espléndida al español por la Real Sociedad Matemática Española, 2000), ya lo dice: *desentraño cuestiones harto numerosas* [...] *deduzco soluciones a diversas cuestiones*... Euler asume una actitud epistémica contraria a la platónica y queda claro cuando afirma que:

> Este libro no sólo contiene mucho enteramente nuevo, sino que además señala fuentes de donde pueden extraerse aún muchas insignes *invenciones*.

Es una visión de la actividad matemática distinta a la platónica, en la que el matemático es pasivo: descubre lo que ya existe, no crea. La visión del mundo concomitante con esa época en Europa trae aparejada la historia de muchos descubrimientos: geográficos, científicos (teoría heliocéntrica de Copérnico), médicos (la circulación de la sangre), tecnológicos (la invención de la imprenta, los telescopios, los microscopios). Por lo tanto, no es de extrañar que la cultura europea hubiese asimilado la importancia del descubrimiento por encima de la justificación formal que, en ese momento, aún no constituía el otro polo de una tensión, y que surgiría en el futuro. Debe anotarse que las intuiciones que se construyen desde la práctica de las matemáticas son distintas a aquellas que provienen de nuestra relación con el mundo material. Este señalamiento resalta algo que ya hemos discutido anteriormente: la casi imposibilidad de establecer una separación entre los niveles analógico y analítico en el desarrollo de la cognición humana. Desde luego estamos ahora discurriendo por un nivel diferente, pero nada queda en el olvido: traemos con nosotros nuestra herencia filogenética, aunque hoy se encuentre profundamente transformada por la cultura simbólica.

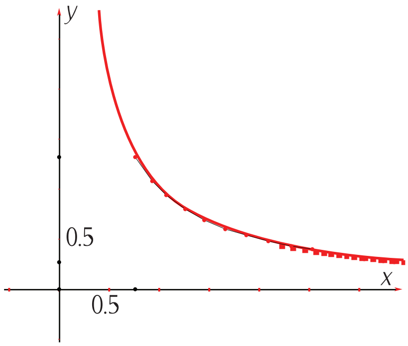
El cálculo florece mediante la continuidad, tal y como la entendemos perceptivamente. En su núcleo gravita la idea de que cada estado de un proceso es tan sólo infinitesimalmente distinto a lo que era un momento antes; como una cinta de una película de cine, en la que el personaje se mueve suavemente en la escena cuando la cinta viene acompañada de su movimiento. Pero si vemos la cinta estáticamente, hay una sucesión de lo que, cada pocos cuadros, parece la misma fotografía. Pero el movimiento revela otra cosa, revela el flujo, con cambios casi imperceptibles, que acompaña a la continuidad. En esa idea podemos encontrar la semilla de la concepción de las curvas como aparece en el texto de L'Hôpital: una curva es una trayectoria poligonal cuyos lados son infinitamente pequeños. Leibniz ya se había hecho a esta idea y lo expresó así:

> Tenemos que entender que hallar una tangente significa trazar una recta que conecta dos puntos sobre la curva que se hallan entre sí a distancia infinitesimal; ello equivale a prolongar uno de los lados del polígono que constituye la curva.

Pero las curvas se concebían además como trayectorias, como objetos que resultan del movimiento. Esa manera de entender las curvas extendía la descripción cartesiana, a saber, que una curva era tal cuando podíamos dar una descripción analítica de ella.

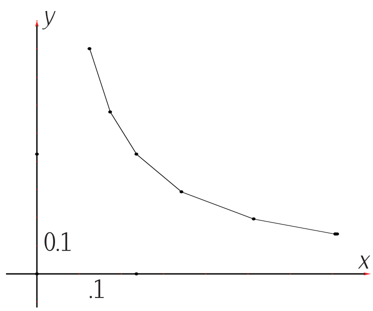
Ahora bien, cuando Leibniz miraba una curva, ¿qué veía? Podría especularse que ante la vista de una curva,

Figura 3



observando a través de su poderoso microscopio conceptual, veía esto:

Figura 4



Es decir, un polígono cuyos lados eran infinitamente pequeños.

Esa idea trasciende todos los marcos de simbolización que podamos imaginar. Ha estado a lo largo del desarrollo del cálculo, siempre presente. ¿Qué aporta entonces de especial la simbolización matemática?

J. Hadamard lo vio claramente cuando expresó:

> La creación de una palabra, o una notación para una clase de ideas puede ser, y lo es a menudo, un hecho científico de mucha importancia, ya que significa crear una conexión entre esas ideas en nuestro nuevo tren de pensamiento. (en Ímaz y Moreno, 2010, p. 22)

La notación de Leibniz/Euler lo muestra de manera elocuente. Ahora, la notación ejerce un control sobre las imágenes conceptuales y permite su exploración. Las ideas fundacionales del cálculo son *ideas enraizadas* en la experiencia del cuerpo humano, no ideas que ya existen más allá de las estrellas, como hubiese preferido Platón.

5. CAUCHY: LA INTUICIÓN GEOMÉTRICA DE LO FORMAL

Durante las primeras décadas del siglo XIX, Cauchy se proponía dejar de lado el método de razonamiento por analogía (como lo practicaba Euler) y, en su lugar, aplicar el *rigor euclidiano*.

Su *Cours d'Analyse*, de 1821, se plantea desde su introducción una meta capital:

> Con respecto a los métodos, he buscado darles todo el rigor que uno requiere en geometría, de modo que nunca haya que recurrir a razones extraídas de la generalidad del álgebra. (en Bradley y Sandifer, 2009)

Cauchy buscaba así abandonar el uso poco claro de los métodos del álgebra, tal y como los había empleado Euler, y más bien recuperar el ideal de Euclides cristalizado en su geometría. Por esta razón, su obra ha sido interpretada tradicionalmente como una introducción de la teoría *rigurosa* de límites (véase, por ejemplo, el libro de J. Grabiner, *The Origins of Cauchy Rigorous Calculus*, Dover, 1981,). Esta interpretación, sin embargo, no es totalmente satisfactoria.

Por ello, vale la pena recordar las palabras de A. Robinson en su libro *Non-Standard Analysis* (New Jersey, Princeton University Press, 1996, edición revisada), en el capítulo sobre la historia del cálculo. Robinson escribe estas líneas hacia 1965:

> Con frecuencia, la historia de cualquier tema se escribe a la luz de los acontecimientos posteriores. Durante más de medio siglo, la historia del cálculo se ha basado en la creencia de que aun cuando la idea de un sistema numérico que contiene infinitesimales pueda ser consistente, resulta inútil para el desarrollo del análisis matemático. En consecuencia, en los escritos de este periodo puede observarse un fuerte contraste entre la severidad con la que se tratan las ideas de Leibniz y sus seguidores y la manga ancha con la que se tratan los errores de quienes propusieron tempranamente una teoría de límites.

Para substanciar más esta tesis, veamos el primer tratamiento del Teorema del Valor Intermedio, dado por Cauchy:

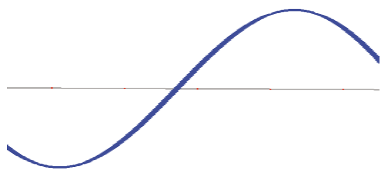
> *Si la función f(x) es continua con respecto a la variable x entre A y B, y si llamamos C a un valor intermedio entre f(A) y f(B), entonces se puede satisfacer la ecuación f(x) = C por al menos un valor de x entre A y B.*

¿Cómo prueba Cauchy este teorema? Veámoslo:

La curva que tiene por ecuación y = f(x) en el plano, y la línea y = C deben encontrarse para algún valor de x entre A y B. Esto es evidente si se satisfacen las hipótesis del teorema. QED.

El argumento es revelador pues de ninguna manera satisface el modelo de prueba rigurosa que la historia ha asociado con Cauchy. Hay que decir que Cauchy dio otras pruebas de este teorema, pero con respecto a la anterior, podría haber sugerido: "Mire la siguiente figura, interprételo y ésa es la prueba":

Figura 5



Hay que decir que la definición de función continua de Cauchy se refiere a una función continua entre A y B. Es decir, *continua en un intervalo*. Hay algo más importante que la prueba misma, y es lo que ella revela sobre la noción que Cauchy tiene de continuidad. La continuidad, para Cauchy, *es la continuidad geométrica que proporciona la intuición*. Si eso es lo que vive en la imagen conceptual de continuidad, entonces no cabe esperar algo radicalmente distinto a lo que Cauchy ofrece como prueba.

Vale la pena mencionar que para Gauss, esa prueba también era suficiente. Basta tomar la gráfica continua en el sentido de un *modelo de uso*: funciones continuas son aquellas cuyas gráficas sean continuas en el sentido que podemos trazar su gráfica sin levantar el lápiz de la hoja.

Más adelante, en un apéndice del *Cours d'Analyse*, Cauchy ofrece otra demostración que brevemente podemos describir como el método de la *bisección del intervalo* para ir produciendo dos sucesiones que van a converger al valor x tal que $f(x) = C$. Esta demostración se apoya en el hecho de que una sucesión creciente y acotada es convergente. Claro, ni Cauchy ni sus contemporáneos estaban en condiciones de demostrar este hecho, pues desde la intuición del continuo geométrico era evidente. La continuidad NO era un problema aritmético en ese entonces. Ahora bien, desde el punto de vista de un (futuro) continuo aritmético, requiere de la completez de los números reales. Citaremos a Dedekind a este respecto líneas adelante.

La labor de Cauchy puede describirse como un trabajo de sistematización basado en el *continuo euclidiano*. No se le puede atribuir "deficiencias" como las que frecuentemente se le atribuyen a Euclides cuando se le juzga *desde hoy*, es decir, desde un marco conceptual inexistente en su tiempo. Podemos cerrar esta sección afirmando que Cauchy es al cálculo, lo que Euclides es a la geometría: su sistematizador. Con ello, *objetivó* el cálculo como campo de exploración matemática. Es decir, no ya para emplearlo como una herramienta de exploración sino para explorarlo por sí mismo. Desde el punto de vista educativo, eso tendría, al día de hoy, consecuencias nefastas. No nos cabe duda de que ése es el sentido de las palabras de Luzin.

6. UNA RUPTURA EN EL SENO DE LAS MATEMÁTICAS

Durante el siglo XIX tuvieron lugar varios episodios, tanto matemáticos como epistemológicos (filosóficos), que cambiaron el rumbo de las matemáticas. Uno de esos episodios fue la creación de las geometrías no-euclidianas. Hasta ese momento, las matemáticas se fundamentaban casi exclusivamente en la convicción de que sus resultados se correspondían íntimamente con hechos del mundo físico. Era una tradición que venía desde los griegos, cuya geometría postulaba *verdades evidentes en sí mismas*. Por lo tanto, lo que se podía deducir de esos postulados eran *verdades* matemáticas. Los teoremas eran verdades sobre el mundo natural. Fourier mismo, en sus trabajos sobre las series que llevan su nombre, afirmaba que el mundo natural no solamente era una fuente de inspiración por excelencia para la creación matemática, sino que *legitimaba* sus hallazgos. Las geometrías no-euclidianas rompieron con esa convicción: los teoremas de la geometría euclidiana, ante la presencia de otros sistemas axiomáticos que parecían libres de inconsistencias –y que más tarde se demostró que, en efecto, eran tan consistentes como la propia geometría euclidiana–, fueron perdiendo esa aura de veracidad absoluta y terminaron constituyendo, como los teoremas de las otras geometrías, *modelos* del espacio. Hoy día resulta difícil imaginar el efecto tan perturbador que pudo tener una situación como ésta para los matemáticos de su momento. Por otra parte, los estudios sobre las series infinitas encendieron los focos rojos en el seno mismo del cálculo. Las series de Fourier ya habían llenado de perplejidad a muchos investigadores, quienes empezaban a ver un panorama con zonas de penumbra. Uno de ellos, N. Abel, escribía en 1826 al profesor C. Hansteen que muy pocos teoremas del análisis habían sido demostrados con apego a los principios lógicos. No hace falta añadir más testimonios para comprender que en el seno mismo de las matemáticas se había resquebrajado una convicción –que las matemáticas eran tan consistentes como la propia naturaleza– y empezaba a gestarse otra: la validez de los resultados la garantiza el rigor lógico.

Es en esa atmósfera donde adquiere naturalidad el recuento de Dedekind en la introducción de su obra *Ensayos sobre la teoría de números*, publicada en 1872 (publicado por Dover, 1963) pero cuya gestación venía de 1858, cuando Dedekind era profesor en Zurich. En ese entonces, a Dedekind le tocó impartir clases sobre cálculo, y en cierto momento tenía que emplear el hecho de que *una sucesión creciente y acotada es convergente*. Y escribe al respecto:

> Al discutir esta noción, me veía obligado a recurrir a la evidencia geométrica. Aún ahora, recurrir a la intuición geométrica en un primer curso de cálculo es muy útil desde el punto de vista didáctico, y aun indispensable si no se quiere perder mucho tiempo. Pero no se puede decir que esta presentación del cálculo sea científica, por lo que me propuse meditar en esta cuestión hasta alcanzar una solución puramente aritmética y perfectamente rigurosa para los principios del análisis infinitesimal.

En muy pocas líneas, Dedekind revela no sólo una nueva concepción de las matemáticas sino que, además, explicita que las matemáticas y su didáctica tienen necesidades diferentes. Sería de desear que hoy en día hubiese el mismo grado de sensibilidad por los problemas de la enseñanza. La didáctica de las matemáticas es una disciplina que no tiene que subordinar sus líneas de investigación a las líneas de las matemáticas.

Actualmente seguimos teniendo el mismo problema que describe Dedekind, sólo que las inercias que invaden el terreno de la enseñanza privilegian la presentación "científica" y se olvidan que para la enseñanza, como se encargó de evidenciar R. Thom en 1972, *más que el rigor es la construcción del sentido lo que debe privilegiarse en la enseñanza*.

Afortunadamente existen otros caminos que pueden conciliar las intuiciones fundamentales con una mayor precisión conceptual. Intentaremos, en lo que sigue, dar algunos atisbos del que pretendemos seguir.

7. UNA RESPUESTA DIGITAL

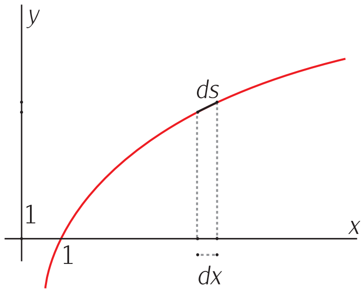
Como ya hemos advertido, las metáforas del movimiento *controlan* la notación básica del cálculo, que florece en la continuidad.

Las experiencias sensoriales sobre lo continuo son muy diversas, desde pasar la mano suavemente sobre una superficie pulida, hasta la estimación de la variación de temperatura de un líquido que se calienta al fuego lentamente. Si tuviésemos ante nosotros una cinta de video, veríamos una sucesión de fotografías casi idénticas una a la siguiente. Al activarla, las fotografías que aparecían estáticas, ahora adquieren movimiento. La persona que parecía de pie, ahora camina, y su movimiento fluye continuamente a lo largo de un camino. Así, al animar una secuencia discreta de fotografías, se produce la imagen continua de una persona que camina.

El medio digital permite conjugar lo discreto con el movimiento y, de ese modo, proporciona modelos adecuados de la variación que poseen los procesos temporales propios del cálculo. *Eso es algo nuevo*.

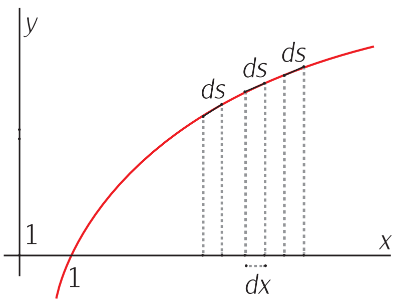
Una curva puede concebirse como un polígono cuyos lados son infinitesimales. El medio digital permite al estudiante ***ver*** una versión (metafórica) de esta afirmación:

Figura 6 Segmento infinitesimal



Uno puede deslizar el segmento *ds* (que forma parte de la recta tangente) y percibir cómo describe la curva. Desde luego, nada sustituye la experiencia de hacerlo frente a una pantalla digital. El hecho de que la versión que se experimenta sea metafórica no disminuye la sensación perceptiva de que, en efecto, la curva se construye con esos segmentos infinitesimales. No se trata del problema ontológico, sino del problema epistemológico, se trata de cómo podemos trabajar con los estudiantes (y profesores en servicio) para indicar una dirección de desarrollo más coherente con las experiencias e intuiciones primarias que se tienen sobre la variación y la acumulación. Activando la **traza** (*trace*), que es una prestación del medio digital, podemos arrastrar *ds* y observar cómo su trazo cubre la curva. El medio digital permite apreciar lo que es una *definición en acción* (figura 8).

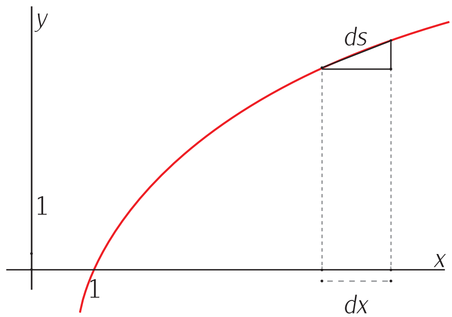
Figura 7 Curva como polígono



Desafortunadamente, la narrativa basada en imágenes estáticas, ya lo dijimos, es insuficiente para traducir al texto, la fuerza del proceso dinámico que se despliega ante nuestros ojos. De hecho, el movimiento es una dimensión que aquí está ausente pero que fluye a través de la imagen dinámica.

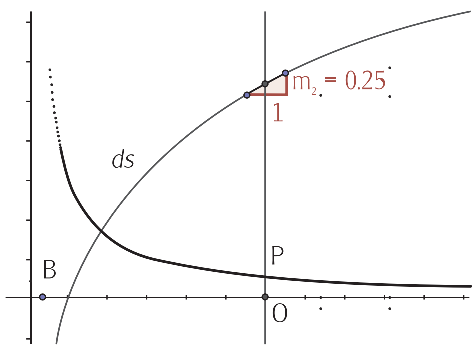
Ahora es casi inmediato completar la figura y obtener el triángulo de Leibniz para medir la pendiente de la curva en cualquier punto.

Figura 8 Pendiente de la curva



Una vez que el medio digital nos permite calcular la pendiente en cualquier punto de la curva, deslizando la abscisa correspondiente sobre el eje *x*, vemos aparecer ante nuestros ojos la gráfica de la función derivada (el trazo más grueso en la figura 9). Pero uno puede empezar con la curva de trazo grueso y re-interpretar la curva inicial como la integral de la primera. La figura, pues, contiene un diálogo entre la integral y la derivada, es decir, es un germen del teorema fundamental del cálculo.

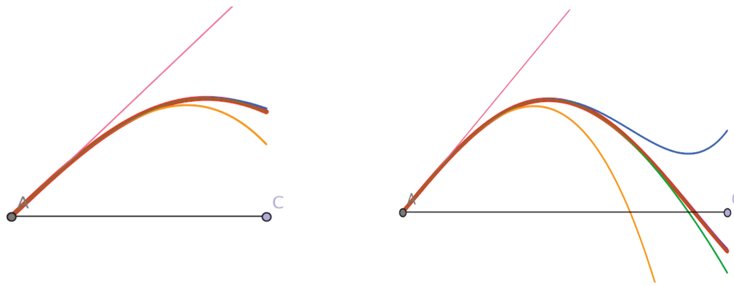
Figura 9 Gráfica de la derivada



El medio dinámico digital nos permite *recuperar*, a través del movimiento, una representación analítica de los objetos básicos del cálculo. De hecho, la infraestructura dinámica subsume en ella el movimiento y, con ello, acerca el cálculo a sus ideas fundacionales.

Finalmente, presentemos una secuencia didáctica que causa siempre un impacto mayúsculo. Se trata de las aproximaciones mediante los polinomios de Taylor de una función. De nueva cuenta, el medio dinámico ofrece una capacidad expresiva que está ausente en el medio tradicional. Se trata, por supuesto, del movimiento y la naturaleza ejecutable de las representaciones digitales.

Figura 10 Aproximaciones de Taylor

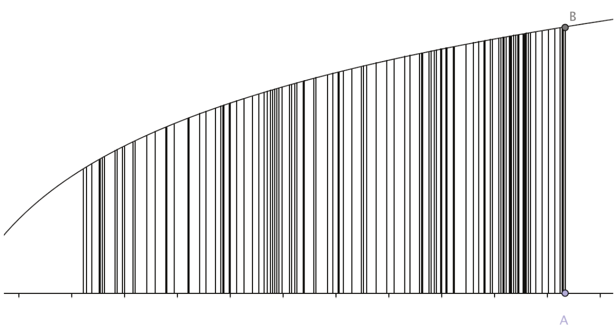


En esta exploración, los estudiantes eligen una función (en este ejemplo, es la función seno) y los primeros polinomios aproximadores. Partimos, en la experiencia viva, de una posición del punto C muy cerca de A. Entonces, arrastramos el punto C hacia la derecha y vemos cómo a medida que va fluyendo la gráfica de la función, van fluyendo sucesivamente los polinomios aproximadores. La experiencia tiene un valor estético considerable y pone de manifiesto que a medida que el grado del polinomio de Taylor es mayor, entonces permanecerá como representación de la función durante más tiempo.

La experiencia anterior es similar a una experiencia numérica que los estudiantes ya conocen: la aproximación de un número mediante su expresión decimal. En cuantos más dígitos empleemos, la aproximación será más precisa.

Hemos presentado tan sólo unos pocos ejemplos, pero desde luego es posible ir mucho más lejos, por ejemplo, para explorar cómo la integración no es algo distinto al movimiento, pues coincide con el área barrida por la función cuando la representamos mediante el segmento vertical que conecta su abscisa x con $(x, f(x))$, como se aprecia en la figura 11.

Figura 11 Área barrida



El medio dinámico empleado es un mediador semiótico. Como es el caso con cualquier artefacto de mediación, éste no es epistemológicamente neutro. Es decir, el conocimiento que se adquiere no es independiente del mediador. Aunque en este trabajo no abundemos en ello, esta idea tiene consecuencias profundas para la reconceptualización del conocimiento que intentamos desde la mediación digital.

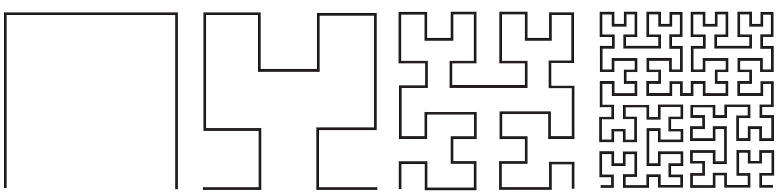
Los objetos matemáticos adquieren estabilidad mediante sus representaciones semióticas. Una vez que se añade una nueva representación, el objeto en cuestión se transforma y las posibilidades de intervención sobre él aumentan. Esto ocurre en especial mediante las representaciones digitales ejecutables. El objeto matemático siempre *está en construcción*, pues es inseparable de sus representaciones semióticas.

Hoy en día estamos presenciando la migración de los objetos matemáticos hacia los medios digitales y con ello se está produciendo, ante nuestros ojos, una transformación epistémica que afecta lo que ocurre y ocurrirá en las escuelas, en cada salón de clases. En el caso del cálculo, hemos intentado mostrar cómo el movimiento que se torna una dimensión del objeto es infraestructural al medio. Se pudo apreciar, por ejemplo, en la reacción del medio al arrastre del punto A en el ejemplo de la aproximación de Taylor.

El cálculo es un cuerpo heredado de conocimientos y durante su desarrollo se han empleado, casi siempre, sistemas de representación predigitales. Como ya se ha dicho, cada uno de estos sistemas de representación tiene un impacto epistémico definido. Como parte sustancial del proyecto de investigación que anima este escrito, consideramos los objetos que pueden representarse estática y dinámicamente como objetos *híbridos*. Esa naturaleza híbrida que permite apreciar su comportamiento en dos *atmósferas* distintas revela características del objeto que permanecían *calladas o que emergen gracias al nuevo sistema de representación*.

A medida que transcurre el nuevo siglo, los sistemas digitales de representación van adquiriendo una presencia más intensa. Ahora bien, así como hablamos de objetos híbridos también debemos hablar de *estrategias de transición*. Tomemos, por ejemplo, la curva descrita por Hilbert en 1891 (http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hilbert_curve.gif). En su versión digital, la curva recupera su naturaleza dinámica.

Figura 12 Curva de Hilbert



En realidad se trata de un proceso iterativo que va construyendo la curva que llena el cuadrado. La idea de Hilbert requirió en su momento de una demostración analítica compleja que alejó una construcción muy intuitiva del alcance de los estudiantes. Hoy en día, empero, podemos recuperar la belleza profunda del ejemplo mediante su migración digital: *dada una resolución de la pantalla, existe un paso en el proceso iterativo que llena esa pantalla*. En la figura 12 hemos presentado los primeros cuatro pasos del proceso iterativo. Cuando vemos la dinámica del proceso en su encarnación digital, entendemos mejor lo que significa el teorema. El problema no es de rigor sino de significado matemático. La versión digital lo otorga.

Tal vez estemos ante una puerta que lleva al futuro del cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borovik, A. (2010), *Mathematics under the Microscope*, Providence, American Mathematical Society.

Bottazzini, U. (1986), *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Nueva York, Springer-Verlag.

Bradley, R. E. y C. E. Sandifer (2009), *Cauchy's Cours d'Analyse*: *An Annotated Translation*, Nueva York, Springer.

Demidov, S. S. y A. Shenitzer (2000), "Two letters by N. N. Luzin to M. Ya. Vygodskii", *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, núm. 1, pp. 64-82.

Donald, M. (2001), *A Mind so Rare: The Evolution of Human Consciousness*, Nueva York, Norton.

Edwards, C. H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York, Springer-Verlag.

Euler, L. (1988), *Introduction to Analysis of the Infinite*, trad. de J. D. Blanton, Nueva York, Springer-Verlag.

Gordon, E., A. G. Kusraev y S. S. Kutateladze (2002), *Infinitesimal Analysis*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Grabiner, J. (1983), "Who gave you the Epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus", *The American Mathematical Monthly*, vol. 90, núm. 3, pp. 185-194.

Ímaz, C. y L. Moreno (2010), *La génesis y la enseñanza del cálculo, las trampas del rigor*, México, Trillas.

Klein, F. (1896), "The arithmetizing of mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 2, núm. 8, pp. 241-249.

——— (2004), *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*, trad. de E. Hedrick y C. Noble, Nueva York, Dover Publications, Inc. (traducido de la 3a. ed. en alemán, 1932, Nueva, Macmillan).

Kleiner, I. (2001), "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, núm. 2-3, pp. 137-174.

Lakoff, G. y R. E. Núñez (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Nueva York, Basic Books.

Pierpont, J. (1899), "On the arithmetization of mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 5, núm. 8, pp. 394-406.

Poincaré, H. (2003), *Science and Method*, Nueva York, Dover Publications.

Robinson, A. (1966), *Non-Standard Analysis*, Amsterdam, North-Holland Publishing.

Roh, K. H. (2008), "Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, pp. 217-233.

Struik, D. J. (1987), *A Concise History of Mathematics*, Nueva York, Dover Publications.

Thom, R. (1973), "Modern mathematics: does it exist?", en A. G. Howson (ed.), *Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 159-209.

Toeplitz, O. (2007), *The Calculus: A Genetic Approach*, Chicago, University of Chicago Press.

DATOS DEL AUTOR

Luis Moreno Armella
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México
lmorenoarmella@gmail.com