

## Ambientes de aprendizaje de la forma y el número: diseños accesibles y trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Olga L. León C.; Natalia A. Palomá B.; Nelssy Jiménez D.; Diana M. Guilombo & Sandra P. González V.  
olleon@udistrital.edu.co; napaba31@hotmail.com; nelssyj@yahoo.com; marcelaguilombo@gmail.com; sandra-  
gonvel@gmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Universidad  
Distrital Francisco José de Caldas; Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Universidad Distrital Fran-  
cisco José de Caldas.  
Colombia, CO.

### Resumen:

Se presentan los resultados de cuatro investigaciones en ambientes de aprendizaje del número y la forma geométrica que evidencian las relaciones entre: educación matemática y diversidad; educación geométrica con todos y para todos; tecnologías y accesibilidad; Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) y Trayectorias Reales de Aprendizaje (TRA); escolaridad en primera infancia. Los resultados están divididos en tres partes: (a) Se retoma los resultados sobre ambientes de aprendizaje con todos y diseños accesibles; (b) los resultados de THA de la aritmética y la geometría, en particular se profundiza en exigencias de accesibilidad para poblaciones sordas, ciegas y con discalculia. (c) se desarrolla una experiencia de accesibilidad en didáctica con el juego Circuito Cerrado y se sugieren articulaciones con las THA de la aritmética y la geometría.

### Palabras clave:

*Ambiente de aprendizaje accesibles, Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la forma y el número, poblaciones sordas, ciegas y con discalculia, juego Circuito Cerrado.*

### Abstract

The present study shows the relationships among mathematic education and diversity, geometry education, assistive technology, Hypothetical Learning Trajectories (HLT), Real Learning Trajectories (RLT), and Early Child Education. These relationships were established for the concepts of number and shape in learning environments. A total of four studies are included in this document. The results are divided in three main groups: (a) learning environment for everyone using assistive technologies, (b) HLT in arithmetic and geometry that includes accessible requirements to teach deaf and blind people, or people with dyscalculia, (c) an experience with Circuito Cerrado, a game used to establish a relationship between HLT in math and geometry.

### Key words:

*Accessible learning environments, Hypothetical Learning Trajectories of the number and shape, deaf people, blind people, people with dyscalculia, Circuito Cerrado game.*

### Resumo:

Neste artigo se apresentam resultados de quatro pesquisas focadas em ambientes de aprendizagem do número forma geométrica. Se apresentam relações entre Educação Matemática, Diversidade; educação geométrica com todos y para todos, tecnologías y acessibilidade, trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA) y trajetórias reais de aprendizaje (TRA), escolaridade no ensino inicial. Os resultados se apresentam em três partes: (a) sobre o ambiente de aprendizagem com todos y *design* acessível; (b) THA da aritmética e geometria e se aprofunda nas necessidades de acessibilidade para grupos sordas, cegas e discalculia; (c) uma experiência de acessibilidade em didática do jogo "Circuito Cerrado" é desenvolvida e se conclui com sugestões para articulação da aritmética e geometria com as THA.

### Palavras chave:

*Ambiente de aprendizagem acessíveis, Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem da forma e o número, grupos de pessoas sordas, cegas e com discalculia, jogo "Circuito Cerrado"*

## 1 Introducción

Este estudio considera el ambiente didáctico como un sistema que se estructura desde las dimensiones epistemológicas, éticas y políticas de la educación, el cual es el efecto tanto de una secuencia de decisiones que provienen de protagonistas de la educación (políticos, intelectuales, académicos, formadores de profesores, profesores, padres de familia y estudiantes), como de sistemas de criterios con fundamento en las dimensiones anteriormente mencionadas. El tipo de ambiente de aprendizaje desplegado por el ambiente didáctico, queda como huella histórica para quienes participaron en él y como elemento constitutivo del proceso de aprendizaje (León et al., 2013).

El sistema denominado ambiente didáctico articula en un espacio y tiempo definidos, interacciones, relaciones y transformaciones de objetos, con el propósito de constituir un aprendizaje. El ambiente didáctico está determinado por el tipo de dispositivo o dispositivos que despliega el diseño didáctico (resolución de problemas, juegos, proyecto de aula, talleres, ...). Sin embargo, la gestión didáctica será la mediación fundamental para que esos dispositivos no solo se desplieguen oportunamente según las intencionalidades, sino también se manifiesten en toda su estructura de dispositivo de manera articulada con los otros dispositivos. Se configura una estructura que pone de manifiesto una forma de ser del profesor en relación con una forma de ser del estudiante, con condiciones para la participación, el acceso al conocimiento, la negociación de significados y la experiencia con los objetos de aprendizaje. Esa estructura es la que se denomina ambiente de aprendizaje.

Los cuatro ambientes de aprendizaje que aquí se presentan tienen en común:

- Ser escenarios para aprender las matemáticas colaborativamente;
- Ser estrategias formativas de la educación matemática para la sociedad
- Ser prácticas de diseño didáctico y gestión de un profesor de matemáticas
- Ser estructuras que promueven la negociación de significados sobre número y forma, y acogen la diversidad de poblaciones

Los aspectos que son objeto de profundización en el estudio de los ambientes de aprendizaje de la forma y el número son: i) La intencionalidad de no marginar poblaciones; ii) El tipo de aprendizaje de

los objetos matemáticos; y iii) las mediaciones instrumentales y semióticas que determinan las relaciones entre condiciones de poblaciones y aprendizajes.

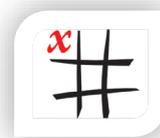
## 2 Una didáctica de las matemáticas para todos y con todos.

Es una didáctica que considera: i) La práctica matemática, es decir, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar construcciones y reconocer construcciones útiles a prácticas matemáticas en cada cultura; ii) La cantidad, la forma y la magnitud como campos que estructuran la matemática; iii) Exigencias de orden epistemológico, que refieren a quiénes son “todos”, cuando se consideran diseños curriculares y didácticos en matemáticas. ¿Son sujetos epistemológicos con potencial de aprendizaje o sujetos con existencia real en la sociedad y con necesidades de aprendizajes específicas?; iv) Exigencias de orden práctico que se vinculan a la realización de una acción cultural en un contexto escolar específico, en un tiempo limitado y con grupos de estudiantes con diversidad de condiciones para aprender; v) Exigencias de orden ético, en lo que refiere a las transformaciones sociales que promueven los aprendizajes escolares y vi) Exigencias de orden tecnológico que refieren a las formas de organizar el aprendizaje con la disposición de tecnologías disponibles en los escenarios escolares (León et al., 2013).

### 2.1 Ambientes de aprendizaje accesibles

El ambiente de aprendizaje es: i) un espacio físico y/o virtual dispuesto para la participación y construcción colectiva de conocimientos; ii) una estructura que tiene como componentes: unidades didácticas, que vinculan trayectorias hipotéticas de aprendizaje y dispositivos didácticos; sistemas de relaciones, que definen funciones y roles tanto para el profesor como para los estudiantes; sistemas de escenarios para la realización de procesos de aprendizaje; sistemas de tecnologías que favorecen el aprendizaje de todos los estudiantes; iii) una mediación en la formación matemática, en tanto se convierte en el factor que posibilita una relación entre el aprendizaje matemático y la transformación que ese aprendizaje produce en el estudiante aprendiz.

Ser accesible es una condición del diseño de un ambiente didáctico que se transmite al aprendizaje, la accesibilidad se entiende entonces, como una característica del diseño que garantiza a profesores y



estudiantes al acceso a todos los escenarios estructuras e instrumentos que el diseño configura, es la garantía de la no marginación de poblaciones del proceso educativo. León et al (2013) proponen que la característica de accesibilidad de un ambiente de aprendizaje se manifiesta en:

- Proporcionar múltiples medios de representación sobre el saber que se enseña y se aprende. El acceso a los objetos de conocimiento es diferente de acuerdo con la condición de la población, ya sea física (ceguera, sordera, ...), étnica (indígenas, mestizos, ...) o cognitiva (Down, discalculia, ...) entre otras, por tanto, este acceso debe ser garantizado por un diseño didáctico y curricular que ofrezca alternativas de representación del conocimiento (Flores, Lo, & Stevens, 2005).
- Proporcionar múltiples medios de expresión para interactuar sobre el contenido que se aprende. Las diversas lenguas, los diversos estilos de expresión (lenguas orales, lenguas de señas, lenguas escritas, las diversas maneras de conversión de unidades significantes de una lengua a otra, entre otros) deben ser incorporados a los diseños para garantizar la participación y la interacción de los estudiantes con los contenidos y con los profesores.
- Proporcionar múltiples medios de compromiso para generar conciencia sobre el para qué se aprende, es decir, se intenta involucrar a cada cual desde sus propios intereses y posibilidades en el propósito de aprender.
- Consolidar estrategias de trabajo cooperativo entre profesores y profesionales de la ingeniería para la generación de propuestas didácticas con incorporación de TIC, orientadas al trabajo en y para la diversidad.
- Articular diseños didácticos generados por la investigación sobre poblaciones marginadas, a trayectorias hipotéticas de aprendizaje en los ciclos de enseñanza
- Habitar el lenguaje para realizar la aventura de encontrarse con los otros y con el mundo que nos rodea, pues expresarse plenamente en nuestra lengua es un derecho (Godenzzi, 2001), y estar en comunicación con los que tienen otras lenguas es una necesidad. Ser bilingüe o plurilingüe debe entenderse más que como una con-

dición individual de los sujetos, como un derecho de los ciudadanos de sociedades y pueblos con diversas lenguas, dialectos o variedades lingüísticas, determinadas por factores históricos, sociales, culturales.

La presencia de la accesibilidad en un diseño es una característica de diseños de ambientes de aprendizaje con todos y para todos. Son diseños que pretenden, tanto que el estudiante resuelva problemas matemáticos, como, que el estudiante logre que otros comprendan su solución y se esfuerce por comprender las soluciones de los otros.

## 2.2 Los ambientes de aprendizaje en la educación matemática inicial

Según la Unicef (2001), la atención a la Primera Infancia es considerada la clave para crear un mundo donde impere la esperanza y el cambio, en lugar de la privación y la desesperación, y para fomentar la creación y mantener la existencia de países prósperos y libres. La primera infancia vista como una etapa de la vida, se convierte en un tiempo decisivo para promover y fundamentar el desarrollo humano de las comunidades.

Los significados que se les han dado a las palabras “niño” e “infancia” han variado en la evolución de la educación infantil, en ella se pueden ubicar según Zúñiga et al. (2010), tres enfoques de acuerdo con tres tipos de necesidades:

- En el primero se atendían las necesidades básicas de los niños, en una etapa considerada prepedagógica en la que predominó el cuidado de los niños, el asistencialismo, la protección, la alimentación, el descanso y el sueño, mientras sus madres hacían parte de los procesos de industrialización.
- En el segundo, además de suplir las necesidades básicas, se buscaba solucionar la situación afectiva, de aprender a relacionarse consigo mismo, con los otros y con el contexto.
- En el tercero, con la creación del “Kindergarten” en Alemania, orientado por los principios de Fröebel, predominó la atención al desarrollo integral como respuesta a la preocupación de los pedagogos por la estimulación de otras dimensiones del ser humano, tales como lo cognitivo, lo comunicativo y lo físico-creativo.

Desde el siglo pasado las políticas públicas y los currículos implementados para la primera infancia,

han venido enfatizando en la riqueza de los ambientes de aprendizaje, con un sobresaliente hilo conductor tendiente a desarrollar en los niños los procesos cognitivos y comunicativos, de los que hace parte el aprendizaje de las matemáticas. Tal es el caso de las investigaciones de Clements & Sarama (2009), en las que se reconoce que las trayectorias de aprendizaje de la matemática inician en el momento del nacimiento y no puede ignorarse el valor de las experiencias que los diversos contextos de interacción proporcionan al niño para su crecimiento y desarrollo. La escuela es un momento en el transcurso de la vida de un niño y las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, además de ser fundamento de las acciones didácticas de los profesores, son algunas de las herramientas de la escolarización, para proporcionar experiencias significativas de aprendizaje de las matemáticas.

En particular, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) de subitización, está vinculada al reconocimiento de la cardinalidad (¿cuántos hay?, ¿hay más o hay menos?), a la relación parte-todo, a la representación semiótica del número y, en general, a la idea de “cantidad”. Los procesos de cardinalidad, relación parte-todo y representación, forman bloques básicos para la construcción de posteriores etapas de desarrollo matemático de las personas. Subitizar implica en el ambiente educativo de un aula, poner en juego elementos que permitan desarrollar la percepción y la noción de cantidad que hacen parte del sentido numérico. “Cuando usted “simplemente ve” cuantos objetos hay en una colección muy pequeña, usted está usando la subitización perceptiva” (Sarama & Clements, 2009, p. 9). La subitización conceptual es la capacidad de las personas de ver las partes y ponerlas juntas, para hallar el total.

El estudio de la THA de subitización en niños de Primera Infancia, ha generado algunas preguntas que orientan nuestras investigaciones y profundizaciones: ¿Qué es subitizar? ¿Se puede estimular el desarrollo de la subitización? ¿Qué relación hay entre la subitización y el desarrollo de los demás procesos del sentido numérico? ¿Por qué los niños deben avanzar en la subitización? La investigación sobre el proceso de subitización y la escolarización en la primera infancia en Colombia reveló que en el documento de Lineamiento para la Educación Inicial (SED, 2010, p. 212-214) no se menciona de forma explícita en los desarrollos por fortalecer de 1 a 3

años, ni en los de los 3 a 5 de edad. De forma diferente a como lo sugieren las propuestas para otros países (NCTM, 2006), la de Colombia menciona exclusivamente el conteo como proceso fundamental para el desarrollo de la cardinalidad:

Plantee estrategias para contar los diversos elementos, correspondencia uno a uno, agrupación por cantidades, uso de sus dedos para llevar las cuentas, etc.

Haga uso del conteo para resolver problemas de la vida cotidiana, como saber cuántos puntos ganó o cuántos lápices hay en el salón; lo que le permite iniciar la construcción del concepto de número. (SED, 2010, p. 213)

Actualmente la incorporación THA de subitización propuesta por Clements y Sarama (2009), se realiza en un proceso de escolarización de niños de cuatro años en un aula de primera infancia.

### 3 Diversidad y trayectorias de aprendizaje de la aritmética y la geometría

Las THA son herramientas para la planificación de actividades de instrucción en el aula, surgen de posturas constructivistas e identifican los niveles de conocimientos matemáticos del niño. Martin Simon propuso las THA como parte de su modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas (Simon, 1995), se trata de entender la tensión entre la necesidad de tener en cuenta y adaptarse a “las actuaciones de los escolares, y la idea de la planificación de esa instrucción que se basa en la búsqueda de unos objetivos predeterminados y en el diseño de unas tareas para lograrlos” (Gómez & Lupiáñez, 2006, p.80). Desde los procesos naturales de progreso, de perfeccionamiento, de ideas y habilidades desarrolladas, que toma el maestro como base para elaborar secuencias de actividades y construir ambientes de aprendizaje de las matemáticas (Gómez et al., 2007; Clements & Sarama, 2009, p.3)

Las THA “describen las metas del aprendizaje, los procesos de pensamiento y aprendizaje de los niños en los distintos niveles, y las actividades de aprendizaje en las cuales ellos podrían participar” (Clements et al., 2009, p. 5).

Una THA consiste en:

- i. Metas o propósitos matemáticos: entendidos como el conjunto de los conceptos y ha-



bilidades que son matemáticamente centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños y generadoras de futuros aprendizajes;

- ii. Niveles: Ruta de desarrollo a lo largo de la cual los niños progresan, constituida por los niveles de pensamiento, cada uno más sofisticado que el anterior y que conducen a la meta matemática;
- iii. Conjunto de actividades instruccionales, o tareas: relacionadas para cada uno de los niveles de pensamiento, que fomentan el paso de un nivel a otro.

### 3.1 Trayectorias hipotéticas de aprendizaje del número

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje son rutas de progreso con las que se mantiene activo el aprendizaje, desde los procesos naturales del niño.

Para alcanzar este propósito en relación con el número Clements y Sarama (2009) proponen un sistema de cinco THA del número, que inician en el momento en el que nace el niño. Y se desarrollan de manera diferente de acuerdo con la experiencia del niño, de ahí la responsabilidad de la escuela, al brindar experiencias significativas de aprendizaje del número.

La Subitización, es una de las principales habilidades que los niños pequeños deben desarrollar, por ser una competencia numérica básica, (Baroody, 1987, citado por Clements & Sarama, 2009) que consiste en reconocer la numerosidad de un grupo rápidamente (Clements et al., 2009;), de manera correcta

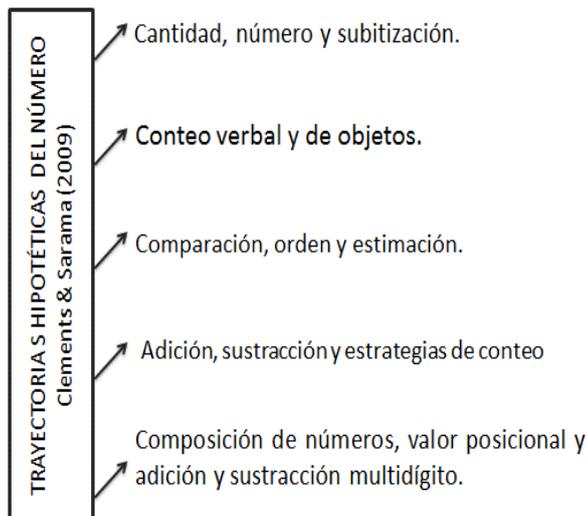


Figura 2 Trayectorias de aprendizaje del número- Fuente propia

PROCESOS VINCULADOS A LA SUBITIZACIÓN						
PERCEPTUAL				CONCEPTUAL		
DISCRIMINA ARREGLOS	NOMINA ARREGLOS	CONSTRUYE COLECCIONES	DISCRIMINA PATRONES	Usa sistemas de numeración para NOMINAR	CUANTIFICA	OPERA

Figura 1: Procesos de la subitización. Fuente propia

y de forma inmediata conectarla con los nombres de los números (Clements et al., 2009,) en su lengua natural.

En esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de la Subitización, THAS, se identifican los siguientes procesos: la subitización perceptual y la subitización conceptual, que vinculan sub-procesos de discriminación, nominación, construcción de colecciones, cuantificación y operación como se muestra a continuación.

Entendiendo la subitización perceptual como la identificación de números pequeños que pasa del reconocimiento no verbal de uno o dos objetos, al reconocimiento rápido y discriminación de uno a cuatro objetos en una colección verbalizando lo que ha percibido de forma intuitiva y simultánea.

La subitización conceptual como el agrupamiento y cuantificación de grupos de más de cinco objetos, mediante un reconocimiento rápido y con discriminación gradual, ve partes y las pone juntas para hallar un total.

La subitización es un proceso que fomenta y desarrolla el pensamiento matemático (Lago et al., 2012), en el que los patrones perceptivos muestran un cambio a patrones conceptuales sobre los que puede operar, convirtiéndose en base para otras ideas matemáticas.

Los niveles, “puntos de referencia” de un crecimiento complejo que representan distintas formas de pensamiento, o secuencia de diferentes patrones del mismo y del razonamiento. La THAS transita por los siguientes niveles.



Figura 3: Niveles de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la Subitización.

Fuente Propia

La predisposición para reconocer de manera espontánea el número, es una habilidad, pero también un hábito mental, que incluye la habilidad para dirigir la atención al número (Lehtinen & Hannula, 2006, citado por Clements et al., 2009). Esta habilidad con frecuencia se ve alterada en los niños: de comunidades con escasos recursos económicos, con necesidades especiales, con dificultades de aprendizaje de las matemáticas, generando retraso en el desarrollo matemático (Clements et al., 2009).

### 3.2 El sentido numérico y la Discalculia

El sentido numérico, se refiere a una habilidad universal para representar y manipular cantidades mentalmente de manera no verbal, presente desde el nacimiento (Dehaene, 1992, Butterworth, 2005), lo que ha ido despertando para la neurociencia un interés en la búsqueda del sustrato neural y el procesamiento aritmético y para la didáctica la necesidad de conocer los resultados de investigaciones que informen sobre relaciones entre aprendizaje de las matemáticas y los comportamientos cerebrales. La gráfica muestra el modelo neuropsicológico cognitivo del cálculo.

Algunas investigaciones sostienen que existe un núcleo genético que controla la aparición de las

capacidades numéricas, además de la determinación genética de la adquisición de las habilidades numéricas. Es importante por lo tanto considerar qué sucede cuando el sentido numérico se ve afectado por factores de orden genético. Como puede ser el caso de la discalculia.

La discalculia evolutiva la define Kosci (1974), fundamentado en estudios neurológicos, neuropsicológicos y genéticos, como un desorden estructural en las habilidades matemáticas originado por un desorden genético o congénito de partes del cerebro que son el sustrato anatómico fisiológico de la maduración de las habilidades matemáticas adecuadas a la edad, sin un desorden simultáneo de funciones mentales generales.

Atendiendo al modelo neuropsicológico cognitivo del cálculo y a las investigaciones de Kosci (1974) la clasificación de la discalculia se da en atención a las dificultades que presentan ya sea en sistemas de numeración o en sistemas de cálculo. Estas se pueden presentar de forma individual o en conjunto en niños diagnosticados.

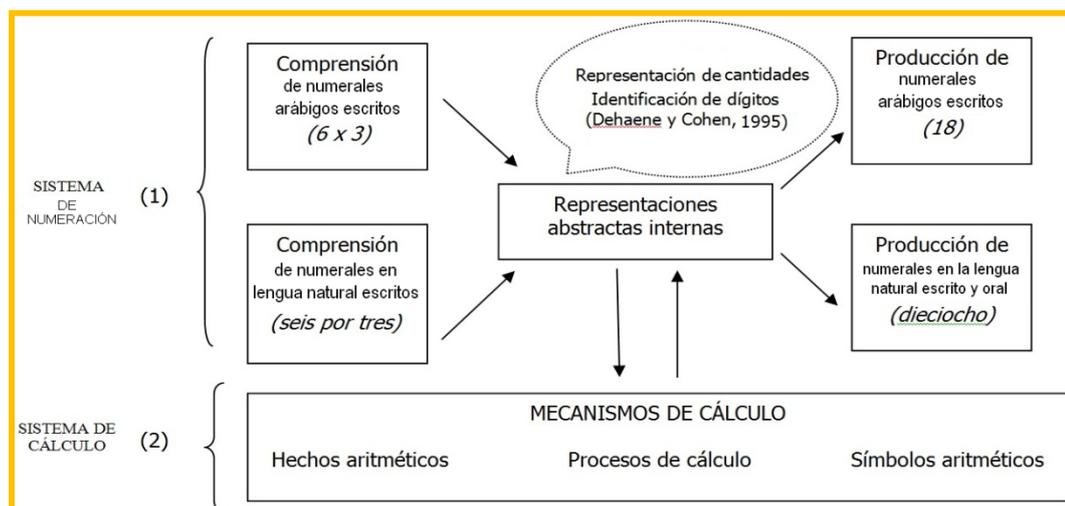
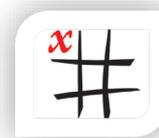


Figura 4: Modelo neuropsicológico cognitivo del cálculo. Adaptado de McCloskey 1992; Dehaene y Cohen 1995; por León, 2014. Fuente: (PSISE MADRID)



En el momento de la caracterización la niña diagnosticada, expreso:  
 “No se sumar, me cuesta (sumar), no se dividir, no se multiplicar... no se las tablas”.  
 Después de diez no sé qué pasa. No entiendo los problemas.

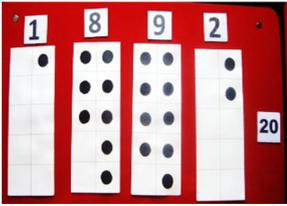
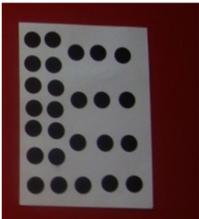
Nivel	Tarea	Material	Respuestas de la niña
3	Decir cuántos ve, después de mostrarle una tarjeta de puntos por un tiempo breve un segundo.	 Tarjetas de texturas	Uno, dos, tres, cuatro, tres, dos, uno. Respondía de forma insegura.
5	La actividad consiste en que se presenta la tarjeta de puntos por dos segundos y ella debe responder cuantos vio y colocar el numeral arábigo, de cada tarjeta y el del total.	 Tarjetas de diez puntos en dos columnas de 5 filas. Con puntos de cero a diez.	La respuesta al mostrar cada una de las tarjetas de puntos es: uno, siete, nueve, dos. Al preguntar si desea verificar ella asiente. Al ver la primera está de acuerdo, al verificarla segunda ella dice era ocho me faltó una... al preguntar cuánto es en total dice: “ocho, señalando la tarjeta de ocho puntos, y uno, señalando la de un punto, nueve y luego cuenta la tarjeta de nueve y llega hasta dieciocho sin interrumpir el conteo, y dice: y dos son veinte, y coloca el numeral arábigo correspondiente.
6	Diga cuántos vio		Al responder cuantos vio, después de presentarle la tarjeta de puntos por dos segundos, dos veces, (solicito verla nuevamente) dijo: siete, siete, entonces catorce, y siete y no sé cuántos al final. Al preguntarle cómo viste el siete, respondió: cuatro (señalando la parte en donde están cuatro puntos) y tres (señalando la parte en donde están los tres puntos), siete.

Tabla 1:  
 Trayectoria  
 Real, niveles 3,  
 5 y 6

### 3.3 Trayectoria Real de Aprendizaje

La trayectoria real de aprendizaje no es una norma de acción, es un conjunto de supuestos fundamentados en la tradición investigativa y en la evidencia empírica, dependen de la condición de existencia de cada individuo y de ciertas regularidades del aprendizaje de los mismos (León, et al., 2014) debido a esto el profesor requerirá modificar constantemente aspectos de la THA (Gómez et al., pág. 81, 86; Callejo, Valls & Llinares, 2007).

La metodología de la investigación siguió el enfoque de los estudios de caso. Después de identificar como criterio fundamental el tener un reporte médico de diagnóstico de discalculia, se seleccionó una niña escolarizada en grado séptimo, de 14 años de edad. A continuación, se presentan los resultados de una trayectoria real a partir de algunos de los avances que se han evidenciado durante la THAS.

Las tareas han requerido modificaciones, atendiendo a la edad, en cuanto al tiempo de observación de la ficha, menor en los niveles uno y dos y mayor en el nivel seis, al uso de palabras número, a procesos de verificación y a que ella aplique las tareas al profesor.

### 3.4 Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la forma geométrica

Las metas que cubren la trayectoria para las figuras geométricas orientan la construcción y el desarrollo de la noción de forma geométrica en el niño, es decir, pasa de los atributos que describen las formas, a los que las definen y luego los que las relacionan. Las relaciones y propiedades compuestas por los diferentes atributos van desarrollando experiencias entre magnitudes y espacios.

En el desarrollo del proceso de la noción forma, se sugiere realizar un trabajo con los distractores,

Tipificación de THA para el desarrollo de las formas geométricas:		THA con sus procesos
THA para pensamiento espacial.	1. Orientación Espacial (Considera puntos de referencia y coordenadas)	<p><i>Tabla 2: THA de las formas geométricas y procesos asociados</i></p>
THA para figuras geométricas.	2. Visualización Espacial (Discurre en la ubicación de las formas y ejecuta movimientos)	
THA para el desarrollo de formas bidimensionales y tridimensionales.	3. Composición de figuras en 3D	
	4. Composición y descomposición de figuras 2D	
	5. Extractor de figura	
	6. Desarrollo de formas bidimensionales y tridimensionales.	
	- Comparación (incluye niveles de principios de congruencia y determinación).	
	- Clasificación (Clasifica las formas a partir de un reconocimiento, identificación y análisis).	
	- Construcción de formas (Implica distinguir, nombrar, describir y cuantificar los componentes de las formas como los lados y ángulos).	
	- Representación (Implica la construcción de las formas).	

(lo que parece pero que no es), las variantes (las mismas figuras con otras posiciones), y las figuras prototipo (todo el mundo dice...la forma estándar).

En un primer nivel de la THA de la forma geométrica, los niños hacen una síntesis en la que describen o descomponen las propiedades. En el segundo nivel, se elaboran modelos a partir de las clases de las figuras. De ahí que el cuadrado pase a ser un gran modelo y se puedan escuchar expresiones para las distintas figuras como: “lados que se unen para hacer una esquina”, “el círculo presenta una curvatura constante”, “el triángulo, un polígono con tres lados”, o “un polígono es una figura limitada por tres o más lados”. Distinguir o reconocer las formas geométricas es una capacidad que se desarrolla en

los primeros años y tiene una gran importancia, debido a que en este proceso se disciernen atributos cuando se comparan objetos que inician en un contexto visual y táctil, los lados y las esquinas pueden ser características que no se explicitan en un primer momento.

A continuación, se presenta una tipificación de las THA para el desarrollo de las formas geométricas.

Las THA de aprendizaje suceden simultáneamente, y se van desarrollando con el paso de los años. En la siguiente tabla se presenta un ejemplo de la simultaneidad para el desarrollo de las formas geométricas.

Tipos de Trayectorias	Edades					
	0-3	3-5	5-6	6-7	7-8	8 en adelante
1. Orientación Espacial	Usuario camino, punto de referencia	Usuario de referencia local propia	Usuario de referencia local pequeña	Usuario de mapas.	Trazador de coordenadas	seguir mapas de ruta
2. Visualización Espacial	deslizador simple	girador simple	Deslizador, girador, principiante	Deslizador, girador, volteador	Deslizador en diagonal	movilizador mental
3. Composición de figuras en 3D	Precompositor-apilador-Trazador de líneas	Elaborador de Imágenes - compositor de formas	Compositor y repetidor	Compositor de formas		
4. Composición y descomposición de figuras 2D	Precompositor y predescomponedor	Ensamblador	descomponedor simple	Compositor de sustituciones y descomponedor de formas	Repetidor de figuras compuestas	Compositor de figuras y descomponedor de figuras
5. Extractor de figura	preconfigurador	Configurador simple	Configurador de formas entre formas		Configurador de estructuras secundarias	Configurador completo

*Tabla 3: THA de la geometría y niveles de desarrollo*



Figura 5: niveles de la THA de las formas geométricas

### 3.5 Las THA de las formas geométricas y población sorda

Cuando un niño (sordo u oyente) interactúa con el medio, comienza simultáneamente a desarrollar su lenguaje y el pensamiento geométrico, “Así como el lenguaje es una habilidad humana indispensable para la interacción con los sujetos del entorno, el pensamiento espacial es una habilidad humana que contribuye a las habilidades matemáticas” (Clements & Sarama, 2009, p. 161). La persona sorda construye conocimiento en relación con su percepción del medio, lo que lo hace diferente a los oyentes. Sin embargo, el sordo vive una situación bilingüe<sup>1</sup> y bicultural; para que las personas sordas puedan tener una construcción de conocimiento, es necesario especificar un acceso a la información, acceso que necesariamente debe crear condiciones lingüísticas, por lo tanto, se considera la trayectoria de las figuras geométricas con los diferentes niveles y actividades.

La trayectoria de las figuras geométricas comprende 25 niveles de los que se destacan los diez primeros en la figura 5

- Los procesos que fundamentan esos niveles son:
- i. Comparación: Tiene en cuenta los diferentes niveles de principios de congruencia y determinación. El estudiante realiza un proceso mental que le permite juntar o separarlas cosas, a partir del establecimiento de semejanza o diferencias,

logrando elaborar sistemas que serán bloques o apoyos para su desarrollo matemático.

Al establecer las semejanzas (logra generalizar) y diferencias (logra particularizar) constituyendo relaciones entre objetos, dimensiones y demás, así, causando la comparación y el desarrollo en la formación de los diferentes conceptos, pues se empieza a considerar criterios o atributos esenciales para describir lo que es o no es.

- ii. Clasificación: Incluye el reconocimiento, identificación y análisis para clasificar las formas. En términos generales la clasificación se define como: “juntar” por semejanzas y “separar” por diferencias, el estudiante, junta por atributos como: color, forma o tamaño, y separa lo que tiene otra propiedad diferente, fundamentándose en las cualidades de los objetos. Al clasificar el estudiante está considerando la relación de pertenencia, pues está considerando conjuntos o subconjuntos.
- iii. Construcción de formas: Implica distinguir, nombrar, describir y clasificar los elementos que hacen parte de la naturaleza de la forma geométrica (objeto sistémico) como lados, ángulos, planos, caras, entre otros, llamados componentes de las formas.

Un ejemplo particular se puede evidenciar con el séptimo nivel de la THA de las figuras geométricas:

<sup>1</sup> “La condición de bilingüismo en el caso de las personas sordas implica el uso de Lengua de Señas y aprender la lengua de

su país, en este caso el castellano escrito, pero es requerimiento ser competentes en ambas para lograr una plena integración social”. (Hernández, 2010) p.36).

<p>En el proceso de “<i>Construcción de Formas</i>” los niños suelen usar manipuladores que representa las partes de las figuras, tales como sus lados, para formar una figura que “luzca como” la figura que se les propone. Es posible que piense que los ángulos son esquinas (las cuales son “puntiagudas”).</p>	<p>Las actividades propuestas para los diferentes niveles deben presentar una riqueza tal que permita pasar varias veces por el nivel y los procesos de diferente manera.</p>

Tabla 4: relación entre procesos y actividades en la THA de la forma

### 3.6 Trayectorias reales de aprendizaje de niños sordos

El trabajo realizado con los estudiantes permite evidenciar, cómo ellos logran identificar elementos característicos para determinar figuras geométricas, un caso particular, se presenta en la siguiente tabla donde una estudiante, a partir de una experiencia que involucra la desigualdad triangular, identifica condiciones para construir un triángulo.

En las TRA también se desarrolló la lengua de señas colombiana y el español escrito como se evidencia en la tabla 6

Cada una de las evidencias presentadas son de distintos estudiantes, pues una de las razones que hace que surjan diferentes tipos de trayectorias está en la forma como cada uno de los estudiantes, desarrollan las diferentes actividades, en las Trayectorias Reales de Aprendizaje los niños también suelen

presentar indicadores de niveles más altos sin completar los indicadores del nivel en el que están.

### 4 Tecnología y diseños accesibles para la iniciación a la aritmética y la geometría

Tres aspectos se tienen en cuenta en el diseño de situaciones de aprendizaje en matemáticas que no marginan poblaciones. El primero es la incorporación de tecnologías que permitan la participación de todos los estudiantes en la clase de matemáticas y que posibilitan el desarrollo de ambientes que hagan viable las interacciones entre poblaciones (sordos, ciegos, oyentes, videntes, entre otros), a partir de mediación tecnológica.

Explicación por qué no es un triángulo

<p>Lengua de Señas Colombiana</p>	
<p>Acercamiento a una traducción</p>	<p>Esta parte (señala la parte que se sale) No es un triángulo</p>
<p>Reflexión</p>	<p>Esta evidencia junto con otras evidencias muestra que la estudiante identifica lo que requiere ser cambiado para poder obtener un triángulo.</p>

Tabla 5: THR y construcción de triángulos. Fuente Guilombo 2014.



Proceso en la LSC para denotar triángulo	
Lengua de Señas Colombiana	
Significado en Español Escrito	Primera seña de triángulo    Segunda seña de triángulo    Tercera seña de triángulo.
Reflexión	Por lo general, tienden a mirar las formas por sus atributos. Esta representación es una evidencia de las imágenes esquemáticas que realizan los niños con un alto desempeño, cuyas imágenes son más generales y abstractas.
Proceso en la LSC para denotar triángulo	
1.	
3.	
4.	
5.	

Tabla 6: TRA con desarrollo de la LSC y español escrito

El segundo es el diseño de Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) que además de enriquecer las posibilidades espacio temporales para la interacción, proporcionan condiciones para una efectiva comunicación entre diversas poblaciones. De esta manera, los OVA no solo son mediaciones tecnológicas, sino propuestas didácticamente fundamentadas para el desarrollo de conocimiento matemático.

El tercer aspecto consiste en la construcción colaborativa de diseños didácticos con incorporación de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), en la que se hace necesario el trabajo conjunto entre profesores investigadores e ingenieros, quienes generan OVA para ser utilizados por otras comunidades educativas.

#### 4.1 Un ejemplo de incorporación de tecnologías

Se apuesta por la construcción de tecnologías que incentiven la reflexión matemática a partir de juegos aprehensibles con los sentidos y cuyas estructuraciones lógico matemáticas puedan también ser comprendidas sensorialmente. En este caso, se realizan adecuaciones al juego Circuito Cerrado, se modifican características físicas de la Versión N°.1 (Figura 6) y se desarrolla un simulador en la Web (Versión N°. 4) que privilegia la participación a través del tacto y la escucha, permitiendo que se amplíen las posibilidades de conocimiento del juego y se enriquezca su comprensión.

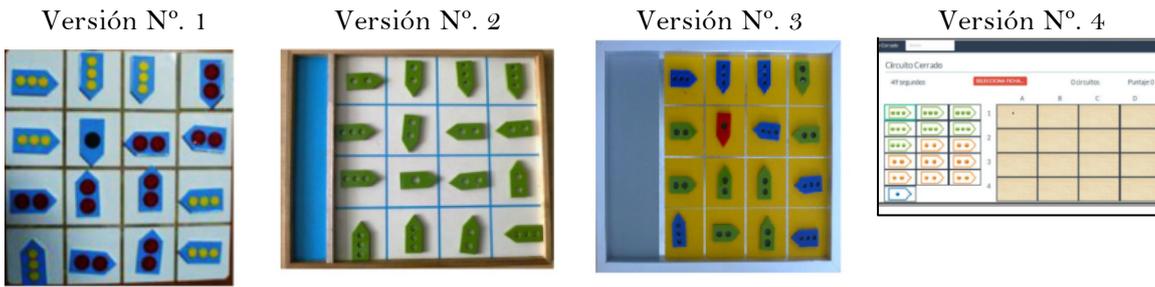


Figura 6  
Versiones del  
Juego Circuito  
Cerrado.  
Fuente:  
(Palomá &  
González,  
2014)

Con las diferentes versiones se busca optimizar las relaciones *materiales-juego* y *material-jugador*, superando las desventajas de la Versión N.º.1 que no permite a sordos y ciegos participar adecuadamente en el juego. Después de los cambios en la accesibilidad y la incorporación de tecnologías, los jugadores pueden organizar, controlar, interactuar y participar sin sentirse discriminados por que el material no es accesible.

#### 4.2 Diseño de Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) y THA de la aritmética y la geometría

El proceso de creación del simulador es un trabajo interdisciplinario entre ingenieros e investigadores, que parte del modelo físico inicial y cuenta con categorías de flexibilidad que permiten verificar las condiciones de diseño universal y los requerimientos de incorporación de la diversidad, sometándolo a pilotajes que cumplen condiciones necesarias para su funcionamiento. Así, algunos de los factores que intervienen en el diseño son:

1. Análisis didáctico del desarrollo matemático: estudia el potencial que tiene el juego, a partir del establecimiento de relaciones de orientación en el espacio, la construcción de estrategias y la resolución de problemas.
2. Análisis cognitivo de niveles: cambia la complejidad del juego en comparación con el modelo físico, se consideran niveles y tiempo para armar circuitos.
3. Análisis de accesibilidad: añade textos alternativos para que el lector de pantalla identifique los objetos del diseño, videos en LSC y opciones manipulables con el teclado.

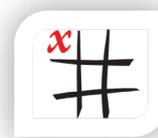
Teniendo en cuenta lo anterior, se vincula el simulador del juego Circuito Cerrado a la plataforma accesible *Atutor*<sup>2</sup> (Figura 7) en un curso de matemáticas que propicia un ambiente que le permite a una persona ciega entrar e interactuar en el mismo espacio con una persona que ve, al igual que con un sordo y un oyente.



Figura 7: el juego Circuito Cerrado en Atutor. En el curso OVA Unidad didáctica proporción.  
Fuente: Atutor Comunidad ALTER-NATIVA

<sup>2</sup> Sistema de Gestión de Contenidos de Aprendizaje diseñado

con el objetivo de crear ambientes educativos virtuales accesibles.



TIPO DE REPRESENTACIÓN	TRA
Tipo 1. Se conserva la representación de circuitos a través de fichas – flecha como las del tablero original. Del Nivel 1 se observan elementos en los que se usan términos duales, se igualan o complementan cantidades a partir de otras o se representan comparaciones implícitamente.	
Tipo 2. Aparecen triángulos en vez de fichas. Del Nivel 1 se comparan objetos para agruparlos en una misma clase.	
Tipo 3. Se observan representaciones a través de flechas con solo puntos. Del Nivel 2 se indican sentidos u otras transformaciones como añadir, quitar, disminuir, aumentar, entre otras.	
Tipo 4. Emergen números con dirección. Del Nivel 3 se desarrollan representaciones de situaciones relativas	

Tabla 7: TRA de los enteros y juego circuito cerrado

Inicialmente, el Circuito Cerrado se vincula a una THA sobre los números enteros y posteriormente se consideran algunos elementos para construir rutas de aprendizaje que se articulan a la propuesta didáctica y que potencian otro tipo de trayectorias.

En la fase de manipulación del juego, las condiciones de un tablero cuadrado de 4 por 4 generan cuestionamientos sobre su composición, que, para el aprendizaje de la geometría, permite formular hipótesis como: (i) tener o no tener casillas en forma de círculos o rectángulos no cuadrados; (ii) las fichas pueden tener otra forma como triángulos o cuadrados. (iii) qué figuras teselan un área específica bajo la condición que presenten 16 de ellas y permitan la relación uno a uno entre espacio y fichas.

#### 4.3 La experiencia en el aula

El Nivel 1 de una THA de los números enteros consiste en comparar cantidades y determinar si estas son iguales o distintas y si son distintas, establecer en qué radica la diferencia. El Nivel 2 consiste en la identificación y representación de situaciones cuantitativas absolutas y en el Nivel 3 emergen las

comparaciones de situaciones relativas y el desarrollo de modelos de representación para varias comparaciones (Palomá & González, 2014). Así, al integrar el juego Circuito Cerrado a las actividades de esta trayectoria y llevarlo a cabo en la clase de matemáticas con estudiantes entre 12 y 15 años de la Escuela Pedagógica Experimental (EPE), se observan algunas representaciones que surgen al pasar los circuitos del tablero al papel y que se asocian al progreso en los Niveles 1, 2 y 3 (tabla 7):

Con el Circuito Cerrado se pueden construir actividades de THA de los números enteros, de conteo, de subitización, de la forma, del espacio, que permiten la interacción entre estudiantes de diferentes condiciones auditivas o visuales.

#### 5 Reflexión final

La trayectoria hipotética de aprendizaje de la subitización le ha permitido a la niña diagnosticada con discalculia desarrollar habilidades de subitización, que le dan seguridad para el desarrollo de estrategias de cálculo aritmético y confianza en la exploración numérica de propiedades. La trayectoria hipotética de la forma con población sorda evidencia

el desarrollo articulado entre habilidades matemáticas y LSC. El juego Circuito Cerrado, permite no solo la articulación de varias trayectorias de aprendizaje, sino también la interacción entre poblaciones sordas, ciegas, oyentes y videntes.

La evidencia de una fuerte conexión entre aprendizaje real y desarrollo de conocimiento matemático en poblaciones que han sido vulneradas en la educación matemática por sus condiciones físicas, es un pequeño paso en el largo camino de aprendizaje que aún nos queda por recorrer como profesores que pretendemos una educación matemática con todos.

## 6 Referencias Bibliográficas

- Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. En J. Campbell. *Handbook of Mathematical Cognition*. (455-467). Nueva York (NY): Psychology Press.
- Callejo de la vega, M., Valls, J., & Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza: aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*. 61, 5-21.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach*. New York: Routledge.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- Flores, R., Lo, E., & Stevens, R. (2005). Entendiendo la motivación de los alumnos de secundaria con problemas de aprendizaje. En *Memorias del VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. México: COMIE.
- Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 7, 159-162.
- Godenzzi, J (2001). Política lingüística y educación en el contexto latinoamericano: el caso del Perú. Recuperado el 15 de mayo de 2015 de: [http://cvc.cervantes.es/obref/congresos/valladolid/ponencias/unidad\\_diversidad\\_del\\_espanol/4\\_el\\_espanol\\_en\\_contacto/godenzzi\\_j.htm](http://cvc.cervantes.es/obref/congresos/valladolid/ponencias/unidad_diversidad_del_espanol/4_el_espanol_en_contacto/godenzzi_j.htm).
- Gómez, P., & Lupiáñez, L. (2007) Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.
- Recuperado el 8 de abril de 2013, de <http://funes.uniandes.edu.co/390/1/GomezP07-2786.PDF>
- Guilombo, D (2014). *Caracterización de los niveles de desarrollo de la noción forma en un grupo de niños sordos a partir de una secuencia de actividades articulada a una trayectoria de aprendizaje*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Hernández, L. (2010). *Informe final pasantía de investigación proyecto "Desarrollo de competencia comunicativa en matemáticas en estudiantes sordos"*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Avila, C., Bacca, J., Cavanzo, A., Guevara, C., Saiz, M., García, R., Saiz, E., Rojas, N., Peralta, M., Flores, W., & Márquez, A. (2013). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación de profesorado de matemáticas*. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Palomá, N., & González, E. (2014). *El desarrollo de procesos del lenguaje y las matemáticas con incorporación tecnológica. Una apuesta a la diversidad*. Facultad de Ciencias y Educación. Bogotá D.C.: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- PSISE MADRID. (s.f.). *Psise*. Recuperado el 15 de mayo de 2015, de <http://www.psisemadrid.es/>: <http://www.psisemadrid.es/home/aprendizaje-trastornos/126-discalculia-evolutiva>
- Simon, M. (1995) Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114- 145. Recuperado octubre 21 de 2010 de <http://www.jstor.org/stable/749205>
- SED Bogotá (2010). *Lineamiento pedagógico y curricular para la Educación Inicial en el Distrito*. Bogotá: Imprenta Nacional.
- UNICEF (Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia) (2001). *Estado mundial de la infancia 2001*. Nueva York (NY): UNESCO-UNICEF.
- Zúñiga, F. M., García, B. S., Pérez, D., Mayordomo A., Colmenar M. C., García C., et al. (2010). *Historia y perspectiva actual de la educación infantil*. Barcelona: Editorial Grao.

Como citar este artículo:

León C., O. L.; Palomá B., N. A.; Jiménez D. N.; Guilombo, D. M. & González V S. P. (2018).  
Ambientes de aprendizaje de la forma y el número: diseños accesibles y trayectorias hipotéticas  
de aprendizaje. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*. 3 (2), pp. 3-16.

Presentado: 15/abril/2018  
Aprobado: 30/noviembre/2018  
Publicado: 31/diciembre/2018

---

#### RECONOCIMIENTOS

---

Las autoras agradecen a la Comisión Europea por su apoyo en la financiación parcial y a los socios de los proyectos de investigación de ERASMUS Plus: Educación Superior - International Capacity Building - ACACIA - Número de referencia del proyecto - 561754-EPP-1-2015-1-CO-EPKA2-CBHE-JP, (<http://acacia.digital>).

Las autoras agradecen a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y a sus programas de Maestría en Educación y Doctorado Interinstitucional de Educación por su apoyo a la investigación.