Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución

María Trigueros

Resumen: En este artículo se describirá el papel del uso de la modelación en el cambio en la comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de ecuación diferencial y del de solución. La descripción del diseño y de los resultados de la investigación se hará con base en la teoría APOE. En particular se describirán los resultados relacionados con el uso de distintas representaciones que desempeñan un papel importante en el desarrollo de los modelos de los estudiantes y aquellos conceptos que parecen desempeñar un papel importante en los cambios de comprensión de los estudiantes.

Palabras clave: modelación, ecuaciones diferenciales, teoría APOE, representaciones, comprensión.

Abstract: The goal of this paper is to describe how the use of modeling in a differential equations course contributes to foster a change in students' understanding of first order differential equation and solution set. The design and results of a research experience based on APOS theory are presented. The focus of the paper is the description of those results related with the use of different representations and others that seem to play an important role in the changes observed in students' understanding.

Keywords: modeling, differential equations, APOS theory, representations, understanding.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales constituyen uno de los cursos con mayor número de aplicaciones tanto en las licenciaturas de matemáticas como en las de ingeniería o de economía. Es, además, un curso en el que los desarrollos recientes de la investigación en matemáticas y el desarrollo de la tecnología imponen, en principio, el diseño de nuevas estrategias didácticas. A pesar de los esfuerzos hechos por algunos autores de presentar una visión moderna de este importante tema de las matemáticas (por ejemplo, Blanchard, Devaney y Hall, 1998), muchos cursos de ecuaciones diferenciales siguen orientados a la enseñanza de las técnicas de solución, y las aplicaciones consisten en ejercicios cerrados cuyo objetivo es el uso de dichas técnicas. Este artículo se enmarca dentro de un proyecto de investigación que intenta contribuir a la reflexión sobre este

Fecha de recepción: 22 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 7 de octubre de 2013.

problema tomando como marco teórico la teoría APOE. Aquí se presenta únicamente una parte de los resultados del proyecto: aquéllos obtenidos del análisis del trabajo en clase.

ANTECEDENTES

Sobre el uso de la modelación en la enseñanza

La comunidad de investigación en educación matemática ha mostrado que en los últimos 20 años ha habido un gran interés por el uso didáctico de los modelos (Lesh y Doerr, 2003; Zandieh y Rasmussen, 2010; Busse, 2011; Niss, 2012). Los resultados de algunos estudios sobre este tema refieren que la modelación puede ser enseñada a distintos niveles de escolaridad y que es una herramienta para motivar y favorecer el aprendizaje de las matemáticas cuando se trabajan problemas interesantes y actividades guiadas por el profesor para apoyar el aprendizaje (Maass, 2006; Blum et ál., 2007; Trigueros, 2008a; Trigueros y Possani, 2013). Otros estudios previenen que, si bien el conocimiento de las matemáticas es necesario para que los estudiantes puedan desarrollar y trabajar con modelos, no es suficiente para lograrlo (Stillman, 2002; Kaiser y Maass, 2007; Niss, 2012).

Sobre las ecuaciones diferenciales

La investigación acerca del aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha estado presente en la investigación en educación matemática desde hace muchos años. Algunos autores trabajaron este tema desde el ámbito de la matemática en contexto. Por ejemplo, Camarena (1987) llevó a cabo el análisis y desarrollo de un curso relacionado con los circuitos eléctricos para favorecer el interés y la motivación de los estudiantes, y Artigue (1989) cuestionó los contenidos de los cursos tradicionales a la luz de los desarrollos en la propia matemática y de los soportes tecnológicos que facilitan herramientas poderosas para el trabajo con las ecuaciones diferenciales.

Las investigaciones más recientes ponen énfasis en la comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las dificultades que se presentan a los estudiantes, la posibilidad de interpretación del conjunto solución de una ecuación diferencial a través del uso de diferentes representaciones, el papel de las condiciones iniciales y el papel de los parámetros que pueden aparecer en ellas (Trigueros, 2004; Kwon et ál., 2005; Dana-Picard y Kidron, 2007; Donovan, 2007).

En los últimos años, el interés por el uso de problemas reales en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha surgido con fuerza (Kwon et ál., 2005; Chaachoua y Saglam, 2006; Rowland, 2006; Rasmussen y Blumenfeld, 2007; Trigueros, 2008a). Los resultados de estas investigaciones señalan que, cuando se propone a los estudiantes trabajar en problemas abiertos y el profesor desempeña el papel de guía y sugiere actividades específicas surgidas del propio problema o en relación al problema, los estudiantes desarrollan métodos de análisis de las ecuaciones y plantean preguntas que pueden ser aprovechadas para superar las dificultades encontradas en la literatura, para desarrollar herramientas de análisis y para apoyar el desarrollo de su conocimiento sobre este tema de las matemáticas.

Este artículo intenta contribuir en esta dirección, enfocando las posibilidades del uso de modelos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la construcción y evolución del conocimiento de los estudiantes. Se utiliza con este fin la teoría APOE (Arnon et ál., 2013), que ha mostrado ser de gran utilidad en investigaciones relacionadas con la construcción de conocimiento matemático en alumnos universitarios y se ilustra con el trabajo en clase de un modelo específico.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

¿Qué resultados se obtienen, en términos de aprendizaje, cuando se utilizan problemas de modelación en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales? En particular, ¿qué aspectos del conocimiento de los estudiantes pueden recuperarse cuando se utilizan modelos en la clase? ¿Es posible que los estudiantes desarrollen técnicas nuevas asociadas a las ecuaciones diferenciales ordinarias?

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (Arnon et ál., 2013) trata de la construcción del conocimiento matemático mediante el uso del mecanismo de *abstracción reflexiva*. En ella, la construcción del conocimiento inicia con la realización de acciones sobre objetos matemáticos conocidos. Una *acción* es una transformación de un objeto mental siguiendo una o varias reglas específicas que el estudiante considera como externas. Conforme el individuo reflexiona sobre sus acciones, éstas pueden ser interiorizadas en un *proceso*. En este caso, cada paso de la trasformación puede describirse sin necesidad de hacerla. Cuando el individuo reflexiona sobre el proceso, y en particular cuando tiene la necesidad de aplicar acciones sobre un proceso, toma conciencia de él y lo encapsula en un *objeto*. Un *esquema* se considera como una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se sintetizan para formar estructuras matemáticas útiles en la solución de problemas. Estos esquemas pueden evolucionar conforme se construyen relaciones entre sus componentes, de manera que los esquemas cambian dinámicamente construyéndose y reconstruyéndose.

La evolución de los esquemas se describe mediante los niveles de la *triada:* el nivel Intra- se caracteriza por el enfoque en estructuras aisladas de otras estructuras de naturaleza similar. En el nivel Inter- se construyen relaciones y transformaciones entre los componentes del esquema, se agrupan y se pueden identificar con el mismo nombre. En el nivel Trans- se construyen síntesis entre los componentes del esquema que permiten entender las relaciones construidas con anterioridad y decidir cuándo el esquema es aplicable a una situación particular. Puede pensarse que la teoría APOE describe una progresión lineal de construcción de estructuras; sin embargo, lo que realmente sucede es que hay una progresión dialéctica en las construcciones en la que puede haber desarrollos parciales, transiciones y regresos de una a otra de ellas (Czarnocha, Dubinsky, Prabhu y Vidakovic, 1999). Lo que la teoría afirma es que la forma en que un estudiante trabaja con distintas tareas matemáticas relacionadas con un concepto, puede interpretarse mediante el tipo de estructuras que ha construido.

La aplicación de la teoría APOE requiere del diseño de un modelo teórico de análisis: la *descomposición genética*. Éste es un modelo hipotético de la forma en que los conceptos matemáticos en cuestión se construyen. En la descomposición genética se describen las construcciones mentales específicas que deben hacerse para desarrollar un determinado concepto matemático y sus relaciones. Este modelo no es único; varios modelos pueden coexistir. Aquí, lo importante es que, una vez propuesta, la descomposición genética sea puesta a prueba mediante la investigación con estudiantes que aprenden dicho concepto. Los resultados de las investigaciones pueden dar cuenta de construcciones que no se tomaron en cuenta en la descomposición genética, y de ser así, el modelo debe refinarse.

La descomposición genética se utiliza también como base de la metodología de la teoría APOE en la investigación y en la enseñanza. Con base en ella se construyen instrumentos que permiten al investigador determinar si las construcciones que predice se presentan en el trabajo de los estudiantes y, de acuerdo a ello, aceptarla, rechazarla o refinarla.

La teoría APOE cuenta, además, con un modelo de enseñanza conocido como el ciclo ACE (actividades, discusión en clase, ejercicios). Para utilizarlo, es necesario diseñar actividades a la luz de la descomposición genética para trabajar con los estudiantes.

La construcción de los conceptos en la teoría APOE inicia generalmente con la realización de acciones sobre objetos matemáticos previamente construidos. Pero, aunque no se ha hecho mucha investigación al respecto, es posible iniciar dicha construcción partiendo de acciones sobre otro tipo de objetos mentales, no directamente ligados a las matemáticas pero que pueden jugar un papel importante en la construcción de los conceptos de interés. Esta idea se ha utilizado recientemente en clases en las que se introducen problemas de modelación para iniciar y regular dicha construcción, conjuntamente con actividades diseñadas con la descomposición genética (por ejemplo, Trigueros y Possani, 2013). La mayor parte de los estudios realizados en esta línea han utilizado una propuesta teórica acerca de la modelación, la llamada modelos y modelación, para asegurar que los problemas utilizados satisfacen las condiciones necesarias para ser didácticamente efectivos (Lesh et ál., 2000). Sin embargo, a partir de una reflexión acerca de la posible descripción del proceso de modelación en la teoría APOE (Trigueros, 2008b), se ha prescindido del uso de otra teoría al considerar que la problemática presentada a los estudiantes favorezca su actividad y la posibilidad de poner en juego objetos extramatemáticos y matemáticos sobre los cuales sea posible ejercer acciones e iniciar un proceso que favorezca la evolución de su conocimiento.

En la investigación antes mencionada se hace un primer acercamiento a la respuesta de la siguiente pregunta: ¿Puede describirse el proceso de modelación utilizando la perspectiva de la teoría APOE? En este trabajo se refina de la siguiente manera: Cuando los estudiantes se enfrentan a una situación de modelación, utilizan sus esquemas matemáticos conjuntamente con los esquemas que han construido en otros dominios del conocimiento y que pueden ser útiles en la solución de los problemas que afrontan. Los estudiantes toman de estos esquemas las construcciones necesarias para abordar el problema, seleccionar las variables y formular implícita o explícitamente las primeras hipótesis acerca del comportamiento de la solución al problema y su posible simplificación en términos matemáticos. Aprovechando las hipótesis, es posible hacer acciones sobre las variables y establecer relaciones entre ellas. Estas acciones se interiorizan en procesos mediante los cuales las relaciones se manipulan y se transforman. Los procesos se coordinan con procesos contenidos en los esquemas matemáticos. El resultado de estas coordinaciones es un modelo emergente que puede ser encapsulado como un objeto sobre el cual es posible hacer nuevas acciones que permiten, cuando se interiorizan o encapsulan, analizarlo, determinar sus propiedades y plantear nuevas preguntas que podrían modificar el modelo. Durante el trabajo con el modelo, puede ser necesario construir nuevos procesos, objetos o esquemas para responder las preguntas que se han planteado. Este ciclo puede repetirse hasta que se encuentra un modelo que se considera apropiado en términos de la descripción de la situación original. El trabajo en el modelo permite, además, plantear otras preguntas que posibilitarían ampliar el dominio de aplicación del modelo y los esquemas construidos.

Cuando la modelación se utiliza como una estrategia docente, es necesario apoyar a los estudiantes en la construcción de nuevos conceptos útiles para profundizar en la solución de los problemas asociados con el modelo. Este apoyo puede lograrse mediante la introducción de actividades conceptuales basadas en la descomposición genética del concepto o tema relacionado con esa solución.

Acorde a la forma de trabajo que el uso de la teoría APOE impone para la investigación, en este proyecto se utilizó una descomposición genética para los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y conjunto solución de dicha ecuación. A continuación se presenta la descomposición genética que se utilizó como guía en este proyecto de investigación (Trigueros, 2008b). Es importante destacar que en esta investigación no se toman en consideración todas las construcciones que el modelo incluye, sino sólo aquellas relacionadas con la parte específica de interés en este reporte.

Descomposición genética de la solución de una ecuación diferencial

Para construir el esquema de "solución de una ecuación diferencial de primer orden" es necesario haber construido previamente los objetos: conjunto, variable, ecuación algebraica, derivada de una función real de variable real, integral de una función de variable real, así como el esquema de función.

Los procesos de variable real, de derivada y de ecuación se pueden coordinar para construir un proceso en el que es posible considerar como una ecuación una expresión que relaciona una función con su derivada y en la que la incógnita es la función. Este proceso se puede encapsular en el objeto "ecuación diferencial". Sobre este objeto pueden aplicarse acciones tales como clasificar distintas ecuaciones diferenciales de acuerdo a sus propiedades, por ejemplo, en autónomas o no autónomas, lineales, etc.

Para construir el objeto solución de la ecuación diferencial se necesita hacer acciones para verificar si una función dada es solución o no de una ecuación dada. Estas acciones se interiorizan en un proceso en el que se pueden considerar todas las posibles funciones que son solución de una ecuación diferencial dada de primer orden. Este proceso se coordina con el proceso de conjunto para construir todas las funciones que son solución de la ecuación diferencial, y este proceso se puede encapsular en el objeto "conjunto solución".

Con el fin de encontrar las soluciones de una ecuación diferencial es necesario hacer acciones sobre la ecuación diferencial. Estas acciones pueden consistir en iteraciones que utilizan como punto de partida la condición inicial, y en las que se utiliza la derivada como razón de cambio, como objeto, para aproximar un nuevo punto de la solución de la ecuación diferencial (acciones numéricas). Cuando los estudiantes repiten estas acciones tomando el punto resultante como punto de inicio, es posible construir una tabla en la que se muestran distintos puntos que pertenecen de manera aproximada a la función solución de la ecuación diferencial. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite la aproximación de la solución de la ecuación a partir de una condición inicial dada.

Por otra parte, es posible hacer la acción de tomar un punto del espacio y utilizar la ecuación diferencial para calcular la derivada en él, y también la acción de representarla como un segmento de recta en un plano cartesiano (acciones gráficas). Cuando estas acciones se repiten en distintos puntos del plano, se interiorizan en un proceso que permite considerar todos los segmentos de recta que se podrían construir de esta manera y construir así una representación del campo de tangentes de la ecuación. Este proceso se puede coordinar con el proceso de construcción de las curvas tangentes a estos segmentos y considerar estas curvas como una representación gráfica del conjunto solución de una ecuación diferencial dada.

Una tercera construcción a seguir consiste en las acciones que conducen a la integración de una ecuación diferencial, cuando es posible, para encontrar la familia de soluciones posibles o una curva específica en el caso de contar con las condiciones iniciales. Estas acciones se pueden interiorizar en un proceso para encontrar el conjunto solución de una ecuación diferencial dada.

Todos estos procesos se coordinan en otro proceso que permite considerar flexiblemente el conjunto solución de la ecuación diferencial en distintas representaciones, y se pueden encapsular en un objeto "conjunto solución de una ecuación diferencial", sobre el cual es posible aplicar acciones para considerar sus propiedades. Un ejemplo sería, en el caso de ecuaciones lineales, demostrar que la solución general puede descomponerse en la solución de la ecuación homogénea asociada y una solución particular.

Estos procesos pueden relacionarse entre ellos, con el objeto ecuación diferencial y con el objeto conjunto solución para formar un esquema "ecuación diferencial de primer orden".

METODOLOGÍA

La investigación se llevó a cabo en un curso de sistemas dinámicos (ecuaciones diferenciales) para estudiantes de matemáticas aplicadas y actuaría a nivel universitario. El problema planteado a los estudiantes fue el siguiente: una profesora, preocupada por la tendencia actual en la enseñanza y por el problema del manejo de información de los estudiantes, nos pide hacer un estudio sobre la memorización y el olvido a corto plazo. Le interesa, en particular, un reporte en el que quede claro el tiempo que una persona puede retener información aprendida, el tiempo que tarda en olvidarla y cuáles son los factores de los que esto depende.

A partir de la descomposición genética presentada anteriormente, el investigador, conjuntamente con dos profesores, diseñó las primeras actividades para guiar la intervención del profesor, las cuales pondría en práctica en el aula con el fin de promover la reflexión de los estudiantes. Nuevas actividades, con la misma finalidad, se diseñaron en el transcurso de la instrucción, conforme los estudiantes trabajaban en el modelo y de acuerdo a las necesidades conceptuales que surgían de su trabajo.

Los estudiantes trabajaron en grupos de tres participantes; todos los documentos producidos por ellos durante los distintos ciclos de modelación fueron copiados para su análisis. Se grabaron en audio las discusiones y se diseñó una herramienta de observación y evaluación que se utilizó a lo largo del trabajo en el modelo, incluyendo las fases de trabajo en equipo y la discusión en grupo con el profesor. Estos documentos fueron analizados por el investigador y discutidos con el profesor para negociar los resultados del análisis como método de triangulación.

El trabajo en el problema requirió de varios ciclos de modelación (incluidos en el ciclo de enseñanza ACE). Todos los datos provenientes de los instrumentos antes mencionados, utilizados en el transcurso de las clases en que se trabajó en el modelo, se usaron para estudiar la evolución de las construcciones de los alumnos en términos de la descomposición genética.

El trabajo sobre el problema original permite poner en juego un modelo matemático con el cual pueden hacerse dos tipos de actividad: una que da lugar a un modelo matemático y otra en la que las acciones sobre el modelo, libres o guiadas mediante actividades, hacen posible la actividad matemática que posteriormente permitirá regresar al modelo y trabajarlo aprovechando los nuevos conceptos matemáticos construidos.

El análisis del trabajo de los estudiantes es un componente importante del análisis de resultados. De esta manera se detecta lo que los estudiantes desarrollan en el contexto del problema y aquello que permite promover una reflexión más general que dé lugar a la evolución de su conocimiento matemático de acuerdo a la descomposición genética. Es claro que en un artículo como éste resulta imposible presentar un análisis exhaustivo, por lo que se presenta una descripción esquemática que pone énfasis en los ciclos de modelación y los resultados más importantes detectados en cada uno de ellos. Así, el artículo cumple el propósito de mostrar cómo surgen y evolucionan los modelos de los estudiantes, al tiempo que ilustra los aspectos relevantes de la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos y la forma en que emergen ideas matemáticas relevantes en la construcción de ese conocimiento.

RESULTADOS OBTENIDOS DE LOS CICLOS DE LA MODELACIÓN

1) Exploración gráfica

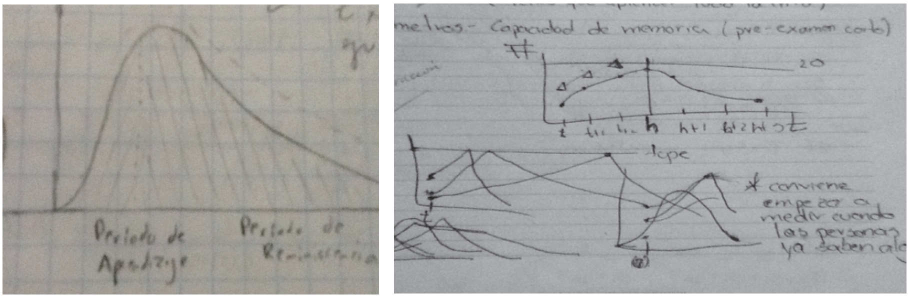
Al enfrentar el problema, los estudiantes evocan un esquema relacionado con su experiencia sobre la memorización y el olvido, del que toman componentes como la rapidez con que la información se memoriza, la rapidez con la que se olvida, elementos que ponen en relación con un esquema de funciones, del cual usan principalmente la función como un proceso u objeto y la gráfica de la función como objeto. La coordinación de los elementos de estos esquemas da como resultado un proceso de graficación de una función que ilustra el comportamiento esperado del problema de memorización, como las gráficas que se muestran en la figura 1. La actividad de los alumnos se aboca a utilizar esas gráficas como representación de sus hipótesis implícitas para definir las variables que entran en la situación y como objeto de reflexión, exploración y de discusión.

A partir de esta exploración, los estudiantes intentan coordinar el proceso de la representación algebraica de la función con el proceso de graficación, con el fin de encontrar una expresión algebraica para la función representada en la gráfica:

P: *No recuerdo ninguna función que tenga esta forma* (refiriéndose a la gráfica de la derecha). *Pero distintas personas tienen distintas gráficas de la misma forma, aunque posiblemente tarden más o menos en aprender la información completa* *que es este máximo en h... pero esta expresión no se comporta así porque no va a tener esta asíntota cuando pasa el tiempo...*

L: *Tal vez si pensamos en dos reglas, aunque lo difícil sería ver cómo se pegan en el máximo...*

Figura 1



La discusión en grupo, guiada por la maestra, gira en torno a la comparación de las gráficas propuestas, las hipótesis subyacentes y la dificultad de encontrar la expresión algebraica correspondiente. En ella, surgen preguntas como *"¿Es posible encontrar la función adecuada?"* o *"¿Se podría hacer algo distinto?"*, que conducen la discusión hacia ideas relacionadas con la descripción de las propiedades de la función. Los estudiantes evocan un esquema de derivada del cual se toma la derivada como proceso para analizar la gráfica de la función. Además, la maestra enfatiza la necesidad de hacer explícitas las hipótesis implícitas en relación al comportamiento de la función:

M: *De acuerdo, eso es lo que esperan del comportamiento, pero ¿pueden describirlo de otra manera?* (La maestra se dirige al grupo.)

A: *¿Cómo? ¿Decir que primero la función crece y luego decrece, por ejemplo?*

M: *Podría ser...*

R: *Se puede usar la derivada para especificar las propiedades que debe tener la función que proponemos en la gráfica, pero... no tenemos, nadie tiene la expresión analítica y yo no sé cómo obtenerla de las propiedades, más bien sé al revés, sacar las propiedades si sé la regla de la función.*

M: *¿Sería útil analizar su gráfica con la derivada? Podrían intentarlo si lo creen así.*

Los modelos propuestos por los estudiantes consisten en gráficas. Éstas describen el comportamiento esperado del problema, pero no permiten dar respuesta a las preguntas planteadas.

2) Introducción de la variación a la solución del problema

Al regresar al trabajo en equipos, los alumnos formulan algunas hipótesis que permiten justificar el comportamiento de la función propuesta. Al analizar su gráfica, en un equipo se discute la forma en que varía el comportamiento de la función en distintos intervalos de tiempo:

J: *...de aquí a acá debe de ser creciente hasta que se aprenden todo... pero primero debería crecer más rápido, y depende de qué tan buena memoria, qué tan rápido...*

F: *Si suponemos que cada persona tiene un coeficiente de memoria y... lo que han aprendido crece de aquí a acá, pero va creciendo menos rápido por pedazos* (dibuja una curva poligonal con segmentos de recta), *y luego empieza a decrecer también, primero rápido y luego no tanto, hasta que se le olvida todo, o casi todo...*

J: *Puede ser, pero así sería como aproximarla... pero... si esto es una recta* (señalando una parte de la función), *su pendiente m es positiva y... pero luego en otro pedazo también es positiva, pero cambia... no sé, es como si aquí $y = mt$* (señala el primer segmento que dibujó su compañero), *pero acá $y = n(t - t_0) + y_0$, y así, y luego m sería negativa... pero no, ésa no es la función, sólo se parece.*

B: *¡Ya sé! Si* $y = m_t$, $y' = m$, *y la* m *va cambiando, y también está to, con y_0...*

F: *...¿*m *es* y'*?, ¡sí!, la tangente a la curva, pero* m *en cada pedazo... bueno, si suponemos cada pedazo de intervalo de tiempo de tamaño 1, para que sea más fácil* (se ríe), *entonces* m *o* y' *sólo depende de la diferencia de las* y, *que es la derivada... sería algo en un punto, como* y, *o sea, depende de lo que saben de información...*

J: *Debe de crecer más despacio acá, y si la persona tiene cierta capacidad de memoria, un coeficiente,* k, *para que primero crezca más y luego menos, podría ser algo como* $y' = k(T - y) + y_0$... *a ver...*

F: *Eso si crece como la gráfica, si* T *es el total de información... eso sería suponer que la rapidez con la que memoriza depende de su capacidad... proporcional a lo que todavía no aprende, más lo que sabía desde el principio... ahora, cuando olvidan podemos hacer algo similar... pero no sé, porque y es positiva... ¡ah, bueno!, pero* y' *es negativa si* y *le gana a* T.

B: *...parece estar bien cuando crece, pero ni modo que sepa más información que el total, eso no tendría sentido, no puede ser. No tiene que ver con el olvido...*

Estos alumnos usan los procesos que describen el crecimiento y el decrecimiento de la función y los coordinan con la derivada como razón de cambio, como proceso, para aproximar la función iterando por intervalos en su intento por analizar la gráfica de otra manera. Este análisis, conjuntamente con la explicitación de una hipótesis sobre la memorización en términos de la proporcionalidad, les permite relacionar los segmentos de la gráfica con expresiones analíticas que incluyen la variación mediante acciones sobre la variable dependiente para el caso de la memorización, aunque no logran representar la función completa.

Otros equipos hacen hipótesis distintas sobre la relación de la gráfica con la derivada, y proponen modelos distintos que incluyen la derivada de la función como se muestra en la figura 2. Estos alumnos coordinan los procesos de variable, derivada y ecuación para considerar una ecuación que contiene derivadas.

La discusión en grupo inicia con la presentación del trabajo del equipo que construyó la aproximación. El grupo comenta las ventajas de describir la variación en lugar de la función en sí y qué tipo de modelo es el que se propuso. La siguiente discusión se da en ese contexto:

E: *En esa ecuación,* y' *es función de* y *pero la función de memoria debe ser función de* t.
B: *Es que* y *es función de* t.
E: *¿Cómo?, t no aparece.*
B: *Pero no tiene que aparecer porque* y *es función de* t, *es la variable independiente, es... está implícita...*

Figura 2

$$y'(t) = \frac{K}{N}(1 - y(t))$$

2. Modelo Modificado

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{k}{t} - rt\right)(n - y)$$

En este diálogo se muestra un ejemplo de una dificultad que se manifestó en muchos equipos. Los estudiantes utilizan la derivada como proceso, pero su esquema de función y el de derivada no parecen contener las funciones implícitas. Ante las dudas y el desconcierto de una mayoría de alumnos, la maestra decide recordarles lo que deben saber de estas funciones. Después pregunta: *"¿Qué tipo de ecuación es la propuesta por sus compañeros?"* Al no haber respuesta, la nombra ecuación diferencial de primer orden, da una definición y hace la siguiente pregunta para terminar la sesión: *"¿Podrían usar una ecuación diferencial para responder las preguntas del problema?"* La maestra deja como ejercicio a los alumnos trabajar en actividades diseñadas con la descomposición genética para la construcción de ecuaciones diferenciales de primer orden y para introducir la noción de solución mediante la sugerencia de soluciones a sustituir en la ecuación diferencial.

En este ciclo, el modelo de la mayoría de los equipos sigue siendo el de función. Se observa, en aquellos modelos que incluyen la variación, el papel que desempeña la representación gráfica de la función como detonador de un cambio en la manera de abordar el problema, al considerar la derivada como pendiente de la tangente en un punto. Si bien la derivada aparece solamente en la propuesta de tres equipos, la discusión de su trabajo ofrece una alternativa a considerar por los demás. Se observa también la dificultad que se presenta con la aparición de la función implícita. La mayoría de los alumnos no han construido este concepto en sus cursos anteriores o lo han construido como acción y sin la derivada.

3) Emergencia de métodos cualitativos de análisis

La siguiente sesión inicia con la discusión de las actividades. Ésta se enfoca rápidamente en las funciones implícitas porque algunos estudiantes siguen considerando que, en ecuaciones como $y' = 3y - 2$, la variable independiente es y, y muchos enfrentaron dificultades como la siguiente:

L: Yo no pude verificar si la función de la 4 (se refiere a la actividad 4 que pregunta si la función $3y^2 - 2yt = 0$) *es solución de la ecuación diferencial* $y' = y/(3y - t)$.

En general, en esta discusión se encuentra evidencia de que una de las construcciones importantes en la construcción del conjunto solución, la posibilidad de verificar si una función es o no solución, no ha sido construida por todos los estudiantes. Esta dificultad se relaciona con la construcción de la función y la derivada implícitas. La no construcción de la función y la función derivada como objeto en el que se ha encapsulado el proceso de derivación implícita, dificulta entender la derivada como una función de la variable independiente cuando ésta no aparece explícitamente en la ecuación.

Cuando los estudiantes regresan a trabajar en el modelo, después de haber trabajado en la construcción de ecuaciones diferenciales en las actividades, todos los equipos proponen modelos en términos de la variación parecidos a los de la figura 2. Se observa en su trabajo que todos los equipos incluyen las condiciones iniciales como parte explícita del modelo propuesto. Para evaluar y comparar los modelos en términos del problema inicial, deben analizar o resolver la ecuación. Tres equipos utilizan el esquema de derivada para analizarla. El equipo que sugirió el método de aproximación continúa trabajando con esa idea, pero fija los valores de los parámetros del modelo para poder llevar a cabo el análisis:

F: Tenemos $y' = k(y - T)$. *Si le ponemos valores para que sea más fácil,* $k = .5$ $T = 50$ *queda* $y' = .5(50 - y)$, *y si usamos lo de antes, para eso* $y' = y - y_0/t - t_0$, *entonces del* $t = 0$ *a* $t = 2$, *por ejemplo,* $y' = .5(50 - y) = y/2$, *entonces* $50 - y = y$. *Nos queda* $y = 25$, *o sea que en* $t = 2$ *se sabe 25 datos y la recta iría de 0 a 2 y de 0 a 25, con pendiente 12.5. Luego hacemos lo mismo pero ahora to es 2 y t es, por ejemplo, 4 y yo es 25, entonces* (hace cálculos, no audible) *sale y = 37.5 y así le seguimos...*

B: La aproximación tiene la forma que queremos para esta parte que crece, pero no es muy exacta... para mejorarla... ¿tomamos los cambios más chicos en la t?...

J: *Pero ahora lo que nos interesa es si funciona bien... y sí funciona para aprender... Pero no tenemos lo del olvido... ¿Podemos usar dos ecuaciones? Así tenemos dos ecuaciones para una función con dos reglas: una para el aprendizaje y otra para el olvido con* k *negativa y eso sí funcionaría bien...*

El trabajo de este equipo muestra que su idea de aproximación funciona utilizando su conocimiento de la derivada como aproximación lineal y la posibilidad de usar la derivada como objeto equivalente a la razón de cambio.

Otro equipo que retomó el modelo sugerido por el primer equipo durante la primera discusión en grupo, no consideró *yo* como 0 y supuso el total de datos como 1 y la variable como porcentaje $y' = k(1 - y) + y_o$. Este equipo decidió dibujar una gráfica de y' contra y para analizar el comportamiento de los datos aprendidos.

N: *...Estoy pensando que si graficamos esa función de* y'*... pero como función de* y, *¿qué significaría?*

C: *¿Cómo vamos a interpretar eso? Porque lo que nos importa es la forma de la* y.

N: *A ver... esa gráfica* (figura 3) *es una recta, con pendiente positiva. Dice que* $y' = 0$ *si* $y_o/k + 1 = y$. *Pero no debe ser porque, ¿dónde queremos que haya un punto crítico? Yo creo que en el 1 porque es cuando se aprende todo y luego cuando olvida empieza a bajar, pero esto está más arriba.*

S: *Si queremos que haga eso, yo debería ser 0, pero ¿por qué?*

C: *Porque no sabe nada todavía.*

S: *Pero, ¿qué tal si sabe algo? Debería funcionar también, ¿no?...*

C: *Sí, de acuerdo, pero si esa recta tiene pendiente positiva,* y' *es positiva, dice que cuando sabe más lo que aprende que es el cambio en lo que sabe sería menor y eso si concuerda con lo que queremos.*

Este equipo trabaja sobre la ecuación y ha interiorizado el proceso de calcular la derivada y representarla en el plano. Muestra así una concepción objeto de la derivada, aunque consideran el caso $y' = 0$ como un punto crítico cuando representa una solución de equilibrio. Coordinan el proceso de derivada con el de función en un proceso de construcción de una gráfica y coordinan este proceso con el del problema que desean resolver. Su gráfica corresponde a un plano fase a pesar de que esta representación no había sido introducida ni en clase ni en las actividades previas.

Un tercer equipo que construyó un modelo de la forma $q' = k(N - q)(h/t - t/h)$, utilizó también el esquema de derivada en su análisis, sin emplear gráficas –como se muestra en la figura 4– y comentaron:

R: *Sí, eso está bien porque nos dice que hay un máximo en h que es el tiempo en que ya se aprendió todo y empieza a olvidar.*

Y: *¿Pero también* $q = N$ *es un punto crítico? ¿Qué nos diría?*

Figura 3

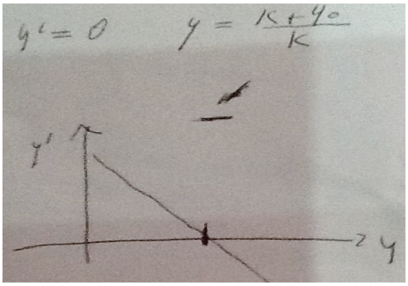
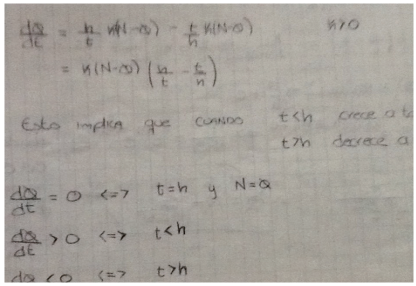


Figura 4



R: N es toda la información... Si ya se la aprendió toda, ya no tiene nada que aprender... si no olvidara, ¿cómo sería la gráfica de la función después de h? ¿Sería horizontal en N? ¿Eso nos dice...? No sé bien.

Este equipo muestra que ha coordinado los procesos razón de cambio y de función derivada. Uno de los alumnos cuestiona lo que sería la posible diferencia entre un punto crítico y una solución de equilibrio, pero no concluyen esta discusión.

De los 11 equipos, únicamente cuatro lograron hacer un análisis de su ecuación diferencial en términos de la derivada. Los demás tuvieron dificultades. Algunos equipos intentaron seguir el método de la aproximación pero no pudieron implementarlo debido a que aparentemente no han coordinado el proceso razón de cambio con el de derivada. Otros equipos intentaron calcular cuándo la derivada sería mayor y menor que cero, pero tuvieron dificultades para interpretar el resultado obtenido por dificultades, nuevamente, con la derivada implícita.

En la discusión en grupo, la maestra pidió a cada uno de estos equipos explicar sus procedimientos. El segundo equipo expuso: *"Queríamos encontrar cómo podía ser la relación entre* y *e* y'*; la gráfica es una recta y eso dice que la* y' *es positiva y que decrece cuando aumenta* y. *Eso está bien, pero luego encontramos que* $y' = 0$ *en este punto, que sería un punto crítico, pero esperábamos que eso sucediera cuando* $y = 1$ *y no entendemos por qué".* Otro equipo comentó tener un problema semejante. Intervino entonces Andrea diciendo:

A: Nosotros también discutimos algo así antes, cuando estábamos viendo cómo plantear el modelo, y Luisa comentó que si pensábamos en la derivada como la aproximación lineal –como discutimos la clase anterior–, entonces t_0 *y* y_0 *no deberían aparecer en la ecuación para la derivada porque ya están tomadas en cuenta en la diferencia que aparece en la pendiente para el primer intervalo de tiempo, y para el segundo ya no sería esa to ni esa* y_0 *la que aparecería en la*

> *derivada, como lo hicieron ellos* (el primer equipo que presentó) *y nos convenció, así que quitamos ese dato de lo que sabe al principio, por esa razón.*

La maestra aprovechó la discusión para comentar cuál es el papel de la condición inicial en una ecuación diferencial, apoyándose en la explicación dada por la alumna; retomó la idea de la gráfica de *y'* contra *y* para explicar con mayor detalle las funciones implícitas y la utilidad del diagrama cuando la variable independiente no aparece explícitamente en la ecuación. Posteriormente preguntó: *"¿Cómo se compara el trabajo de los diferentes equipos que presentaron sus resultados?"* Algunos estudiantes consideraron que el método analítico era más general, pero en la discusión, Fernanda aclaró: *"Me parece que están relacionados porque nosotros calculamos* y, *también la pendiente de la recta en un intervalo; ellos supusieron el signo de la derivada en general y encontraron el valor de* t, *en el que hay un cambio. Nosotros supusimos una función con dos reglas porque nos pareció sensato y más simple"*. Roberto intervino: *"También puedes pensar que la derivada toma un valor, por ejemplo 2, y ver en qué valores de* t *eso sucede; en el caso de ellos* (el otro equipo), *encontrarían que* $y' = 2 = .5(50 - y)$ *y* $y = 46$, *o sea que cuando* y *es 46, la pendiente es 2, es lo mismo pero por puntos"*. Este comentario no fue claro para la mayoría de los alumnos. La maestra lo aprovechó para utilizarlo en varios de los modelos propuestos y construir la relación entre el campo de pendientes y las curvas solución para distintas condiciones iniciales. De esta manera, el análisis de la derivada se convirtió en una herramienta flexible para analizar el comportamiento de la función solución de ecuaciones diferenciales diversas.

Los alumnos de los equipos mencionados mostraron haber coordinado el esquema de derivada, el de función y el esquema para la memorización. Fueron capaces de hacer acciones sobre la función y la derivada, tanto para construir la ecuación diferencial, que se convirtió en su modelo para la situación, como para sugerir una forma de análisis gráfico o algebraico para encontrar una relación entre la derivada y la función solución. Estos instrumentos de análisis resultaron útiles para hacer acciones sobre la ecuación diferencial y para entender el significado y el posible comportamiento de las funciones solución. Nuevamente se hace patente, en este ciclo, el papel que desempeñan el análisis de la derivada, la comprensión de las funciones implícitas y sus derivadas y el uso de las gráficas como objeto de reflexión en la posibilidad de analizar si la ecuación diferencial predice el comportamiento de la solución a pesar de no poder resolver la ecuación diferencial.

La maestra propuso una actividad basada en la descomposición genética para trabajar, en clase y en casa, sobre análisis gráfico de funciones implícitas utilizando la derivada, análisis gráfico de la solución de ecuaciones diferenciales utilizando los métodos propuestos por estos tres equipos y el que ella propuso, además del papel de las condiciones iniciales.

4) Análisis, solución y búsqueda de parámetros

En los siguientes ciclos se discutieron los resultados obtenidos en las actividades y el uso de los métodos gráficos para analizar el comportamiento de las soluciones de la ecuación. Del análisis de los modelos surgieron modificaciones a los mismos. Se discutió también la solución analítica de las ecuaciones diferenciales. En este punto, únicamente dos estudiantes mostraron dificultades con la función implícita al proponer la integración de los dos lados de la igualdad de la ecuación, ignorando la variable independiente.

La maestra introdujo nuevas actividades basadas en la descomposición genética para construir dos métodos de solución, separación de variables y ecuaciones lineales, que podían emplearse con los modelos propuestos. Posteriormente se discutieron los resultados encontrados y la maestra pidió que los alumnos los utilizaran para resolver algunos ejercicios convencionales de tarea y las ecuaciones de sus modelos.

Más adelante, los estudiantes pusieron a prueba su modelo mediante la realización de un experimento y se enfrentaron al problema de calcular el valor de los parámetros. Los estudiantes utilizaron métodos conocidos –como mínimos cuadrados– o tecnología para encontrarlos con apoyo de la maestra, respondieron las preguntas del modelo y escribieron su reporte. La maestra concluyó esta parte del curso presentando a los estudiantes problemas para modelar con estructura similar al problema de la memoria. La mayoría de los estudiantes fue capaz de encontrar un modelo semejante para los distintos problemas.

DISCUSIÓN

Los resultados de esta investigación muestran que la descomposición genética de los conceptos a enseñar es un instrumento útil para guiar el diseño y uso efectivo de actividades que favorecen la construcción del conocimiento y que hacen evolucionar aquellos conceptos que son relevantes en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial y de conjunto solución de la misma. El trabajo en clase pone de manifiesto las construcciones de los alumnos durante el proceso de modelación y el trabajo en el modelo. Se observa que las únicas construcciones no explícitas en la descomposición genética que desempeñan un papel importante en la construcción de los conceptos de ecuación diferencial y conjunto solución, son los de función implícita y su derivada. Estas construcciones deben incluirse al refinar la descomposición genética.

A través del trabajo de los alumnos fue posible reconocer las construcciones que juegan un papel importante en el aprendizaje de la ecuación diferencial y su conjunto solución, esto es: el proceso de análisis de la derivada; la función implícita como objeto y su derivada; la distinción entre los puntos críticos de una función y las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial, íntimamente relacionada con la función implícita, y la construcción de los procesos de conversión flexible del conjunto solución de la ecuación entre representaciones que permiten el análisis cualitativo de la ecuación diferencial. Las dificultades enfrentadas por los estudiantes con esos conceptos indican que es conveniente que, en los cursos previos, se trabaje en asegurar su construcción. Es importante notar que el manejo de los parámetros no constituyó una dificultad, como podría esperarse.

El análisis del trabajo de modelación de los estudiantes indica que, además de motivarlos, permite que surjan, se discutan y se construyan conceptos que en la literatura se reportan como difíciles de superar. En ello, la discusión en clase desempeña un papel relevante. La posibilidad de utilizar el modelo matemático como objeto de reflexión y de poner en correspondencia los resultados de la modelación con lo que se espera del comportamiento del fenómeno, permite interiorizar las primeras acciones de exploración en procesos y, en algunos casos, la encapsulación de los objetos resultantes de la coordinación de dichos procesos. Es necesario enfatizar, sin embargo, que esta posible construcción del conocimiento no depende exclusivamente del trabajo con el modelo matemático. El maestro estimula y guía la discusión en clase hacia la construcción de nuevos conceptos o nuevas formas de trabajar con conceptos conocidos. Tal es el caso del uso de la derivada como objeto para plantear el problema en términos de la variación y para analizar los modelos que la incluyen. Otro apoyo fundamental es el de las actividades diseñadas con la descomposición genética y su uso en momentos clave del proceso de modelación. Es en términos de estas actividades que se detectan las dificultades de los alumnos frente a funciones y derivadas implícitas, conceptos que desempeñan un papel clave en la solución y análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas actividades favorecen la construcción de procesos y objetos de manera conjunta, y a la vez independiente, del modelo, que resultan indispensables en el aprendizaje. Esto se observa en la introducción de conceptos como campo de tangente a la discusión de los alumnos, y su relación con las conclusiones acerca del comportamiento de las posibles soluciones de la ecuación en distintas regiones del plano.

Otro hallazgo importante consiste en que el trabajo en el modelo favorece que los estudiantes desarrollen, de manera independiente, herramientas de análisis poderosas. Es claro que el desarrollo de una técnica similar al método de Euler, a partir de la aproximación lineal de la función solución y la gráfica del plano fase, surge de la necesidad de argumentar y validar el comportamiento esperado de la solución de la ecuación diferencial. Estas herramientas no fueron introducidas originalmente por el maestro ni mediante las actividades, aunque estaban contempladas en ellas para un momento posterior. El trabajo en el modelo recupera así conocimiento acerca de la derivada como función y como aproximación lineal de la función, y propicia la construcción de la relación entre la función solución y la función derivada que se hace patente en la representación del plano fase y que resulta poderosa en el análisis de las propiedades que las funciones del conjunto solución deben satisfacer. La emergencia de estas herramientas es una prueba clara de que la modelación promueve la construcción del conocimiento.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados de este trabajo, puede concluirse que el uso del problema de modelación –y el proceso seguido en la misma– da sentido a la introducción de la variación en las consideraciones de los alumnos. La observación del trabajo de los alumnos permite identificar sus dificultades y orienta al profesor hacia la necesidad de reflexionar nuevamente sobre ellas.

El trabajo con la variación favorece la emergencia de ideas y herramientas útiles en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Nuevamente, estas ideas permiten al maestro desarrollarlas en la discusión en clase y en las actividades para incorporarlas a la construcción de los conocimientos deseados y utilizarlas en la introducción de nuevos conceptos.

Esta experiencia muestra también que la discusión con el grupo favorece la reflexión sobre las dificultades presentadas por los alumnos, así como la institucionalización del conocimiento en cada uno de los ciclos de modelación.

Muchas investigaciones sobre el uso didáctico de la modelación insisten en la motivación que la solución de este tipo de problemas representa para el estudiante. En este artículo se muestra que cuando los estudiantes toman por su cuenta la situación y se implican en el proceso de solución, asumen responsabilidad sobre su propio aprendizaje, y que si ello se aprovecha para estimular la discusión y la reflexión, la modelación apoya la construcción de nuevos procesos, objetos y esquemas. Los nuevos esquemas construidos permiten "ver" el problema original y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde una perspectiva diferente.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura A. C. y al Instituto Tecnológico Autónomo de México.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa, M. Trigueros y K. Weller, (2013), *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Nueva York, Springer.

Artigue, M. (1989), "Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire", *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, París, IREM, Université Paris 7, núm. 107, pp. 284-309.

Blanchard, P., R. Devaney y R. Hall (1998), *Differential equations*, Boston, Brooks/Cole.

Blum, W., P.L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, New ICMI Study Series, vol. 10, Nueva York, Springer.

Busse, A. (2011), "Upper secondary students' handling of real-world contexts", en G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. ICTMA 14*, Nueva York, Springer Science + Business Media, pp. 37-46.

Camarena, G. P. (1987), *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*, tesis de maestría, México, Cinvestav, IPN.

Chaachoua, H. y A. Saglam (2006), "Modelling by differential equations", *Teaching Mathematics and its Applications*, vol. 25, Oxford University Press, pp. 15-22.

Czarnocha, B., E. Dubinsky, V. Prabhu y D. Vidakovic (1999), "One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research", en O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, vol. 1, pp. 95-110.

Dana-Picard, T. y I. Kidron (2007), "Exploring the phase space of a system of differential equations: different mathematical registers", *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 6, núm. 4, pp. 695-717.

Donovan, J. (2007), "The importance of the concept of function for developing understanding of first-order differential equations in multiple representations", *Proceedings for the X Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, recuperado en: http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/eproc.html.

Kaiser, G. y K. Maass (2007), "Modelling in lower secondary mathematics classroom – problems and opportunities", en W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, Nueva York, Springer Science + Business Media, pp. 99-108.

Kwon, O. N., C. Rasmussen y K. Allen (2005), "Students' retention of mathematical knowledge and skills in differential equations", *School Science and Mathematics*, vol. 105, núm. 5, pp. 227-239.

Lesh, R. y H. M. Doerr (2003), "Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving", en R. Lesh y H. M. Doerr (eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 3-33.

Lesh, R., M. Hoover, B. Hole, A. Kelly y T. Post (2000), "Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers", en A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 591-645.

Maass, K. (2006), "What are modelling competencies?", *ZDM*, vol. 38, núm. 2, pp. 113-142.

Niss, M. (2012), "Models and modelling in mathematics education", *EMS Newsletter*, pp. 49-52.

Rasmussen, C. y H. Blumenfeld (2007), "Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 26, pp. 195-210.

Rowland, D. R. (2006), "Student difficulties with units in differential equations in modeling contexts", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 37, núm. 5, pp. 553-558.

Trigueros, M. y E. Possani (2013), "Using an economics model for teaching linear algebra", *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 438, núm. 4, pp. 1779-1792.

Trigueros, M. (2004), "Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations", en D. McDougall y J. Ross (eds.), *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Ontario, ERIC.

——— (2008a), "Modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires", en C. Ouvrier-Buffet y M.-J. Perrin-Glorian (eds.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur: quoi de neuf? Actes Colloque DIDIREM08*, París, pp. 83-101.

——— (2008b), "Modeling in a dynamical system course", en *Electronic Proceedings for the XI Conference on Undergraduate Mathematics Education*, recuperado en: http://mathed.asu.edu/crume2008/Proceedings/Proceedings.html.

Zandieh, M. y C. Rasmussen (2010), "Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 29, pp. 57-75.

DATOS DE LA AUTORA

María Trigueros
Departamento de Matemáticas,
Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
trigue@itam.mx