División de fracciones como comparación multiplicativa a partir de los métodos de los alumnos

Alfinio Flores Peñafiel

Resumen: Presentamos varios métodos inventados por alumnos de 5º a 8º grados para resolver problemas de división de fracciones. Para cada método discutimos cómo el maestro puede ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión de la comparación multiplicativa de fracciones, enfatizando principios matemáticos fundamentales que les permitan extender, generalizar y relacionar sus métodos con otros métodos. Los métodos presentados son sustracción repetida e interpretación del residuo, uso de la identidad y los inversos multiplicativos, división como factor faltante, razonamiento proporcional inverso y directo, división de fracciones como composición de operaciones, y división de fracciones como una razón entre dos cantidades.

Palabras clave: fracciones, división, comparación multiplicativa, razonamiento proporcional, métodos de alumnos.

Abstract: We present several methods invented by students in grades 5th through 8th to solve division of fractions problems. For each method we discuss how the teacher can help students develop their understanding of multiplicative comparison of fractions, by emphasizing fundamental mathematical principles that allow students generalize, extend, and relate their methods with other methods. The methods presented are repeated subtraction and interpretation of the remainder; use of the multiplicative identity and inverses; division as missing factor; inverse and direct proportional thinking; division of fractions as composition of operations; and division of fractions as a ratio between two quantities.

Keywords: fractions, division, multiplicative comparison, proportional reasoning, students methods.

DOS METAS EN LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN ENTRE FRACCIONES

Hay dos metas importantes para los alumnos cuando aprenden a dividir fracciones. La primera meta es que los alumnos entiendan por sí mismos lo que significa dividir fracciones, mediante el trabajo individual y en grupos de cooperación, utilizando representaciones concretas o pictóricas, inventando sus propios procesos, y presentando y justificando sus respuestas y métodos unos a otros. La segunda meta es ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión de la división de fracciones como una

Fecha de recepción: 22 de julio de 2013; fecha de aceptación: 11 de octubre de 2013.

comparación multiplicativa, de modo que la experiencia contribuya a desarrollar su pensamiento proporcional. Para conseguir ambas metas, los maestros deben escoger actividades y problemas matemáticos que permitan a los alumnos entender la división de fracciones por sí mismos, y tareas que propicien comparaciones multiplicativas y el uso de razonamiento proporcional en el contexto de dividir fracciones. Además, los maestros deben anticipar qué métodos pueden usar los alumnos y pensar en la forma en la que pueden ayudarlos a extender o generalizar sus métodos. Los maestros deben tener la aptitud para observar y escuchar a los alumnos, una buena idea de cómo los alumnos están realmente viendo el problema, y la habilidad para hacer preguntas que tengan sentido para los alumnos (Duckworth, 2006, pp. 3-4). El maestro debe intervenir en momentos cruciales para dirigir el pensamiento de los alumnos hacia la comparación multiplicativa de las fracciones. Para desarrollar su razonamiento proporcional, los alumnos deben pasar del uso de estrategias con unidades compuestas, tales como sumas repetidas y particiones, a las comparaciones multiplicativas (Lobato y Ellis, 2010, p. 69).

LA COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA Y EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Un componente central del razonamiento proporcional es la capacidad de comparar números multiplicativamente. Dos números o cantidades se pueden comparar aditivamente o multiplicativamente. Los niños desarrollan primero la capacidad de comparar números aditivamente. La comparación aditiva de dos cantidades, a y b, se puede expresar como una diferencia, $a - b = c$, o como una suma, $a = b + c$. Más adelante, los niños aprenden a comparar números multiplicativamente. Cuando comparamos multiplicativamente dos cantidades o números, creamos una razón (Thompson, 1994, p. 185). La comparación multiplicativa entre dos cantidades, a y b ($b \neq 0$), se puede expresar como un cociente, $a \div b = c$, o como una multiplicación, $a = b \times c$. Las comparaciones multiplicativas pueden surgir cuando los estudiantes multiplican o dividen números. Sin embargo, no todas las situaciones que involucran multiplicación y división de cantidades o números son vistas por los alumnos como comparaciones multiplicativas. Los estudiantes pueden pensar en términos de sumas repetidas o restas repetidas para tratar con los problemas de multiplicación o división. Las sumas y restas repetidas son esencialmente formas aditivas de comparar números. La investigación ha documentado que las concepciones de la multiplicación basadas únicamente en sumas repetidas pueden ser muy limitantes y problemáticas para los alumnos (Thompson y Saldanha, 2003, p. 104). Para propiciar que los alumnos comparen cantidades por medio de una razón, debemos ayudarlos a visualizar que una cantidad es n veces mayor que una segunda cantidad, en vez de pensar solamente que la segunda cantidad es una de n partes idénticas de la primera (Thompson y Saldanha, 2003, p. 105). Para que los alumnos desarrollen su habilidad para comparar números multiplicativamente necesitamos alentarlos a ir más allá de sumas o restas repetidas. Éste es también el caso cuando los estudiantes tratan con la división de fracciones.

DIFICULTADES CON LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Los problemas que requieren dividir entre una fracción son especialmente complicados para los alumnos de los grados intermedios. Cuando Barlow y Drake (2008) les pidieron a 45 alumnos de 6º grado que escribieran un problema que representara $6 \div {}^{1}/_{2}$, 16% de los estudiantes no pudieron escribir problema alguno, y 67% de ellos escribieron un problema incorrecto que representaba $6 \div 2$, $6 \times {}^{1}/_{2}$ o alguna otra relación entre los números que no era $6 \div {}^{1}/_{2}$. Las dificultades de entender lo que significa dividir entre una fracción no se limitan a los grados intermedios. Ball (1990) reportó dificultades entre los estudiantes universitarios cuando les pidió escribir problemas que pudieran proporcionar un contexto para $1\ {}^{3}/_{4} \div {}^{1}/_{2}$. Simon (1993) también encontró que futuros maestros de primaria frecuentemente tenían dificultades para interpretar el residuo o la parte fraccionaria del cociente en el siguiente problema.

> Sergio tiene 35 tazas de harina. Hace galletas que requieren ${}^{3}/_{8}$ de una taza cada una. Si hace tantas galletas como le alcance con la harina, ¿cuánta harina va a sobrar? (Simon, 1993, p. 241)

LA IMPORTANCIA DE QUE LOS ALUMNOS ENTIENDAN POR SÍ MISMOS LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Según Behr, Harel, Post y Lesh (1993), el conocimiento intuitivo acerca de las fracciones puede ser desarrollado a través de contextos de enseñanza apropiados, diseñados para ilustrar principios de razonamiento para situaciones de números racionales. Las experiencias diseñadas por los maestros para formar el conocimiento deben tomar en cuenta los esquemas intuitivos de los alumnos. Estos esquemas permiten que los alumnos no tengan que depender de los algoritmos escolares, y les da la posibilidad de inventar procedimientos para resolver problemas nuevos y para construir conocimiento matemático por sí mismos. Al resolver problemas de división de fracciones por sí mismos y construir su propio conocimiento matemático, los alumnos desarrollan su competencia en este aspecto de los números racionales. Como Smith (1995, p. 4) señala, la competencia con números racionales involucra varios aspectos. Un signo de competencia es ser capaz de desempeñarse a través de un rango de problemas que involucren propiedades matemáticas centrales de los números racionales. Ser competente requiere de la habilidad para resolver problemas nuevos y conocidos, y manejar todas las fracciones que pudieran aparecer en la solución de los problemas. La competencia también requiere comprensión profunda de los principios matemáticos subyacentes de los números racionales y sus operaciones. Tal conocimiento medular permitirá a los alumnos corregir sus errores, generar nuevo conocimiento y recuperar lo que hayan olvidado.

CONECTAR LA DIVISIÓN CON LAS FRACCIONES

Un paso preliminar importante para la comprensión de la división de fracciones es que los alumnos consideren problemas de división entre números enteros e interpreten el resultado como una fracción. De este modo, los alumnos establecen una conexión importante que no está siempre presente. Clarke, Roche y Mitchell (2008) señalan que la noción de una fracción como división no es una idea común en la mente de la mayoría de las personas (p. 377). En algunos casos, los alumnos piensan que la división y las fracciones son temas separados, y algunos inclusive se resisten a usar fracciones para reportar un problema de división, como un alumno de 5º grado que dijo enfáticamente: "No estamos hablando de fracciones, estamos hablando de división" (Toluk, 1999, p. 182).

Algunos alumnos notan que los mismos números aparecen en un problema de división como $7 \div 4$ y en la respuesta $7/4$. Por ejemplo, una alumna de 5º grado, al tratar con el problema de repartir siete pays entre cuatro amigos, usó su propio método y una representación pictórica de siete círculos. Ella distribuyó primero círculos completos, luego mitades y luego cuartos. Primero escribió la respuesta como $1 + 1/2 + 1/4$. Luego convirtió todo a cuartos y encontró que cada persona había recibido $7/4$. Ella notó que el resultado tenía tanto el 7 como el 4 de la pregunta original, y exclamó: "Esto es interesante. Esto es sospechoso. Tengo que pensar más acerca de esto". Por sí mismos, o con la guía del maestro, los alumnos necesitan darse cuenta de que el hecho de que los mismos números aparezcan en el problema de división original y en la respuesta expresada como fracción ($7 \div 4 = 7/4$) no es una coincidencia. El hecho de que la porción que recibe cada persona en una situación de reparto puede ser predicha por la relación multiplicativa entre objetos y participantes es un ejemplo de la estrecha relación entre proporciones y fracciones y de cómo los conceptos están entrelazados (Streefland, 1991, p. 130).

DIVISIÓN DE FRACCIONES COMO SUSTRACCIÓN REPETIDA Y ANÁLISIS DEL RESIDUO

En esta parte del artículo presentamos formas en las que cuatro alumnas de nivel medio pudieron entender la división de fracciones por sí mismas al resolver problemas de división de fracciones en el contexto de porciones y reparticiones. Los datos provienen de un estudio más amplio conducido por Melina Priewe, como parte de su trabajo de tesis doctoral (Day, 2010; Flores y Priewe, 2013). El propósito del estudio para la maestra/investigadora fue entender cómo los estudiantes justificaban por sí mismos sus estrategias y soluciones con sus propios condiscípulos. Por tanto, la maestra implementó en su salón la norma sociomatemática de que una explicación consiste en un argumento matemático y no en una simple descripción o resumen de un procedimiento. Para que los alumnos justificaran basándose en razonamientos, la maestra les dio tres principios guía:

1. convencerse a sí mismos encontrando soluciones que tuvieran sentido para ellos mismos;
2. convencer a otros mediante la comunicación de su comprensión por medio de representaciones gráficas, palabras (escritas y orales) y símbolos, y
3. entender las justificaciones de otros alumnos para cuestionarlos en caso de desacuerdo.

Los problemas en el contexto de encontrar cuántas porciones se pueden hacer con una cantidad dada, cuando se conoce el tamaño de la porción, se prestan para el uso de la interpretación de medición de la división y el uso de restas repetidas para encontrar la respuesta. Esta situación tiene la ventaja de permitir a los alumnos utilizar representaciones concretas o pictóricas y encontrar sus propias estrategias. Cuando se usa la interpretación de medida para la división, el caso más simple es cuando el tamaño de la porción cabe exactamente un número entero de veces en la cantidad a distribuir. Por ejemplo, si una porción es $^3/_4$ de una naranja, y hay 4 $^1/_2$ naranjas, habrá exactamente 6 porciones. Los alumnos frecuentemente encuentran esta respuesta al restar (o sumar) repetidamente $^3/_4$ de naranja y contar el número de porciones. Una situación más difícil es cuando el tamaño de la porción no cabe exactamente un número entero de veces en la cantidad a repartir, y hay un residuo fraccionario. Usualmente los alumnos que tratan de resolver problemas con un residuo fraccionario tienen dificultades para entender el residuo en términos de la unidad utilizada para medir (la porción), en vez de en términos de los objetos utilizados en los ejemplos (naranjas o panqués).

A continuación describimos las estrategias e interacciones de las cuatro estudiantes de 7º grado: Taylor, April, Rosalee y Rebecca (seudónimos). Ellas resolvieron primero el siguiente problema, tomado de Kribs-Zaleta (2008).

> Una porción es $^3/_4$ de una naranja. Hay dos naranjas y media. ¿Cuántas porciones (incluyendo fracciones de porción) se pueden hacer? (Ibíd., p. 454)

Taylor, April, Rosalee y Rebecca tuvieron primero la oportunidad de tratar de entender el problema cada una por sí misma. Luego, cada quien trató de convencer a sus compañeras acerca de su estrategia y solución. Las alumnas llegaron a resultados distintos porque estaban pensando en partes fraccionarias con respecto a distintas unidades. Al comunicar su pensamiento unas a otras, "el todo" no fue hecho explícito por las alumnas. Esto causó confusión y desacuerdo en la solución final del problema.

Taylor: *Dice, supón que tienes dos naranjas y media. Una... dos... tres. Hice esto porque se me hizo más fácil. Así que esto es una porción* [ella sombreó tres cuartos de naranja en su dibujo]... *ésta es otra porción* [sombreó tres cuartos de naranja]... *y ya. Así que esto, técnicamente, no está allí* [Taylor señaló la última mitad de una naranja]. *No debes de... Así, ahí mismo hay tres porciones. Hay uno que sobra, y hay de tres posibles... Así sabes que necesitas como tres cuartos...*

Rosalee: *Sí.*

Taylor: *...para tener una porción. Así es como 75 centavos, pero en vez de hacer eso tienes uno de tres posibles. Por eso puse tres y un tercio. Porque sobra un tercio.*

La unidad especificada en la pregunta era la de una porción. Las alumnas resolvieron correctamente cuántas porciones enteras había ahí, usando restas repetidas de porciones, pero tuvieron dificultades al interpretar el residuo. El residuo es $^1/_4$ de una naranja pero $^1/_3$ de una porción.

Taylor usó sus representaciones gráficas para mostrar la cantidad sobrante en los problemas de división de fracciones usando la interpretación de división, pero no siempre fue explícita al usar sus símbolos y palabras para comunicar lo que la parte sobrante representaba en relación a una unidad completa (tal como porción). Por tanto, a veces tuvo dificultad para comunicarse efectivamente con las otras alumnas al tratar de explicar su estrategia. La solución de Taylor de tres y un tercio es correcta, pero no especificó que eran tres y un tercio de porciones. Taylor dijo que sobraba uno. Con base en sus respuestas escritas al cuestionario preliminar y su entrevista oral con la maestra, fue evidente que Taylor comprendía que el sobrante representaba un cuarto de una naranja. Sin embargo, no fue explícita para decir que la parte sobrante representaba un cuarto de una naranja cuando se lo explicó a su grupo. Más tarde, durante la discusión, Taylor trató de convencer a su grupo de que la respuesta no era un cuarto, diciendo: "Pero no es un cuarto de una porción". Esta vez, Taylor fue explícita con que había que considerar el residuo en términos de una porción. Las alumnas habían mencionado porciones antes, pero ésta fue la primera vez que discutieron una fracción de una porción. Tal vez hubiera sido de ayuda para su grupo si ella hubiera dicho que era un cuarto de naranja y luego explicado que se necesitaban tres cuartos de naranja para una porción completa. Las alumnas utilizaron representaciones gráficas, así como símbolos y palabras, para mostrar el residuo. Sin embargo, iban a necesitar ser más explícitas al usar sus símbolos y palabras para explicar lo que el residuo representaba con respecto a la unidad como un todo. Esto era necesario a fin de que pudieran comunicarse, ya que se estaban refiriendo a dos "todos" diferentes.

Más tarde, en una entrevista con la maestra, Taylor declaró que necesitaba explicar su respuesta más claramente.

Taylor: *Como decía el problema, una debía fijarse en las porciones y no las naranjas. Bueno, yo nunca dije eso en mi respuesta. Y pienso que si hubiera explicado eso mejor, ellas hubieran podido entender cómo encontré mi respuesta.*

Aunque Taylor y su grupo se dieron cuenta de que necesitaban ser explícitas acerca de la unidad, esta dificultad fue persistente durante todo el estudio.

UN MOMENTO PROPICIO PARA LA ENSEÑANZA: DIVIDIR EL RESIDUO

Cuando Taylor y April estaban trabajando con el siguiente problema, por primera vez en el estudio hicieron explícita una forma de tratar con el residuo de manera multiplicativa.

Adán ha estado dando porciones de $^2/_3$ de vaso de limonada a cada alumno. Si él tiene todavía 1 $^1/_2$ vasos de limonada, ¿cuántos estudiantes pueden todavía recibir limonada? ¿Qué fracción de una porción recibirá el último estudiante? (Kribs-Zaleta, 2008, p. 454)

Taylor y April resolvieron que tendrían dos porciones y un residuo.

Taylor: *Eso sería vasos de limonada que sobran. Y luego tenemos que encontrar, si se necesitan... si se necesitan dos tercios y sobra un sexto. Entonces, si tienes un sexto y necesitamos encontrar cuántas veces cabe en dos tercios de vaso de limonada, ¿cómo le hacemos?*

La declaración de Taylor, "Eso sería vasos de limonada que sobran", indica que se dio cuenta de que el residuo $^1/_6$ representaba una fracción de un vaso, no de una porción. April sugirió cómo tratar con el residuo para expresarlo como parte de una porción.

April: *¿Un sexto dividido entre dos tercios?*

En este momento, las alumnas consideraron la idea de dividir el residuo por la cantidad de la porción, pero no pudieron recordar el procedimiento para dividir fracciones, así que no pudieron seguir este método. Esto es un ejemplo de cómo la falta de habilidad para calcular puede interferir con la exploración conceptual. Hay varias formas en las que el maestro puede intervenir en una situación como ésta. El maestro puede hacer una nota de la situación y pedir a los alumnos que guarden sus pensamientos por un momento. Los alumnos pueden aprovechar la disponibilidad de calculadoras. En la actualidad, afortunadamente, hay calculadoras muy baratas para fracciones. El contexto, junto con la guía del maestro, puede ayudar a los alumnos a interpretar el resultado que les muestra la calculadora. Después, el maestro puede asegurarse de que los alumnos sepan cómo dividir fracciones aunque no tengan una calculadora disponible; pero mientras tanto, la falta de fluidez con los procedimientos no debe impedir que los alumnos desarrollen su comprensión conceptual. Con la calculadora de fracciones, las alumnas podrían obtener $^1/_6 \div {}^2/_3 = {}^1/_4$. Lo importante en este punto es que los maestros ayuden a los alumnos a que continúen pensando acerca de la comparación de dos fracciones (el residuo y la porción, en este caso) de manera multiplicativa.

RECONECTAR LA SUSTRACCIÓN REPETIDA CON LA DIVISIÓN

La estrategia inicial de Taylor y sus compañeras fue usar la porción como unidad de medida y hacer restas repetidas para encontrar cuántas porciones se podían hacer. Los alumnos necesitan darse cuenta de que la sustracción repetida se puede hacer en un solo paso usando la división. Los alumnos pueden retomar el problema y dividir $2\ {}^1/_2 \div {}^3/_4$ con una calculadora de fracciones usando la tecla ÷. Después de simplificar, la calculadora muestra la respuesta, $3\ {}^1/_3$, la misma que ellos obtuvieron con su propio método. Los alumnos deben recordar que $^1/_3$ se refiere a porciones. Algunas calculadoras también ofrecen la opción de dividir con residuo. Por ejemplo, usando la tecla ÷R en una calculadora Casio Fraction Mate, los alumnos pueden obtener la respuesta 3 R 0.25. Los alumnos pueden reconocer que $0.25 = {}^1/_4$, y recordar que este residuo se refiere a naranjas. En el ejemplo de arriba, los alumnos necesitan relacionar las dos respuestas, $3\ {}^1/_3$ y 3 R $^1/_4$, y hacer explícito lo que cada uno de los números (3, $^1/_3$, $^1/_4$) representa en términos de porciones y naranjas.

Para profundizar la comprensión de los alumnos del residuo como parte de una naranja o como fracción de una porción, el maestro puede dirigir la atención de los alumnos a la relación de la división con la multiplicación. Para obtener el dividendo original a partir de la respuesta, usando el divisor como un factor, los alumnos deben darse cuenta de que en un caso ellos pueden escribir $3\ {}^1/_3 \times {}^3/_4 = 2\ {}^1/_2$, mientras que al usar el residuo tendrían que escribir $3 \times {}^3/_4 + {}^1/_4 = 2\ {}^1/_2$.

RESIDUOS Y FRACCIONES

Una forma en la que los maestros pueden ayudar a los alumnos a entender el residuo en un problema de división de fracciones es dirigir su atención a problemas similares usando números enteros. En ese contexto, los alumnos pueden establecer conexiones entre las respuestas con residuos, por ejemplo, como cuando la respuesta para $7 \div 3$ se escribe como 2 R1, y respuestas expresadas como fracciones. Los alumnos pueden considerar el siguiente problema: "Una porción consiste de tres panquecitos. Hay 7 panquecitos. ¿Cuántas porciones hay?"

Una respuesta es 2 porciones y un panquecito sobrante. Los estudiantes deben interpretar el sobrante en términos de la porción. Los alumnos necesitan darse cuenta de que deben dividir el residuo entre la porción, esto es, necesitan dividir también el residuo entre el divisor. Si una porción son tres panquecitos, entonces un panquecito es $^1/_3$ de una porción. Por tanto, la respuesta es 2 y $^1/_3$ porciones. Por otra parte, cuando los alumnos escriben la respuesta para $7 \div 3$ como 2 R1, necesitan darse cuenta, para este problema, que el 2 se refiere a cuántas porciones, no panquecitos, pero el residuo 1 se refiere a panquecitos.

Después de tratar con problemas semejantes con números enteros, los estudiantes pueden volver al problema con 2 $^1/_2$ naranjas, donde las porciones eran de $^3/_4$ de una naranja. Los estudiantes pueden escribir su respuesta como 3 residuo $^1/_4$, pero necesitan darse cuenta de que el 3 se refiere a porciones y $^1/_4$ se refiere a naranjas. Para poder escribir la respuesta como porciones y fracción de una porción, necesitan comparar el residuo con la porción $^1/_4 \div {}^3/_4 = {}^1/_3$, y así obtener 3 y $^1/_3$ de porción, o sea, 3 $^1/_3$.

USO DE LA IDENTIDAD MULTIPLICATIVA Y DE LOS INVERSOS MULTIPLICATIVOS

Al tratar con problemas de división de fracciones, los estudiantes pueden usar estrategias alternativas basadas en ideas fundamentales como identidad multiplicativa e inversos, y la relación de la división con el factor faltante. Boaler y Humphreys (2005) presentan el método de Cheryl, una estudiante en el 7º grado que usó un método distinto al de medición para explicar por qué $1 \div {}^2/_3 = {}^3/_2$.

Cheryl: *Yo pensé el problema de otra manera, como en un enunciado numérico.*
Maestra: *¿Quieres pasar?*
Cheryl: *OK. Entonces, el problema es uno dividido entre dos tercios y eso es igual a espacio en blanco. Y luego también, ya saben, pueden ir al revés, así que puede ir para cualquier lado. Así que puedes tomar esto y multiplicado por dos tercios es igual a uno. Y así, eso va a ser tres sobre dos, que es también igual a uno y medio.*

$1 \div {}^2/_3 = \square$

$\square \times {}^2/_3 = 1$

$\square = {}^{3}/_{2}$

El maestro puede ayudar a los alumnos a construir una comprensión de la división de fracciones en general basándose en esta situación especial más accesible. Polya (1962, 1990) resalta la importancia de un caso especial conducente, ya que la solución del problema en el caso especial conducente involucra la solución del caso general (Polya 1990, p. 24). Hay otra ventaja de usar el método de Cheryl como un punto de partida en general. Ma (1999, p. 121) señala la importancia de usar conceptos centrales y las ideas conceptualmente más poderosas de matemáticas, tales como identidad multiplicativa, para conseguir profundidad en la comprensión. La alumna usa, en este caso especial, propiedades de la identidad multiplicativa, del inverso multiplicativo y la relación inversa entre multiplicación y división.

Una forma de ayudar a los alumnos a pasar del caso especial descrito arriba a la división de fracciones en general es enfocar la atención de los alumnos sobre la naturaleza proporcional de la división en una familia de problemas relacionados, en los que el divisor se mantiene constante. Así, por ejemplo, con números enteros los estudiantes pueden buscar patrones y predecir el término anterior y el siguiente de esta sucesión, y hacer explícita la relación entre los dividendos y las respuestas.

$6 \div 3 =$ $\quad$ $12 \div 3 =$ $\quad$ $24 \div 3 =$

Los alumnos pueden ver que cuando el divisor se mantiene constante, conforme el dividendo crece por un factor de 2, la respuesta también crece por un factor de 2. Pueden explorar si un patrón similar existe con problemas parecidos de división de fracciones. Los estudiantes pueden empezar con un problema como $1 \div {}^{3}/_{4}$, para el cual conocen la respuesta basándose en el método de Cheryl: $1 \div {}^{3}/_{4} = {}^{4}/_{3}$. Si se mantiene el mismo divisor, ¿qué pasa si el dividendo se multiplica por un factor de ${}^{1}/_{2}$? ${}^{1}/_{2} \div {}^{3}/_{4} = \square$. ¿Qué pasa cuando el dividendo se multiplica por ${}^{3}/_{2}$? ${}^{3}/_{2} \div {}^{3}/_{4} = \square$. De esta manera, los alumnos pueden observar un patrón y ver que en general la respuesta es igual a la repuesta del problema particular $1 \div {}^{3}/_{4}$ multiplicada por el dividendo. Así que la respuesta de ${}^{1}/_{2} \div {}^{3}/_{4}$ es ${}^{1}/_{2} \times {}^{4}/_{3}$. Esto es, la primera fracción por el inverso del divisor. Los alumnos pueden de este modo conectar el método de Cheryl con uno de los métodos enseñados en las escuelas.

Otro aspecto importante en la solución de Cheryl es que ella encontró una manera de tratar con el problema indicado de división como un objeto matemático en sí mismo. Al usar un cuadro vacío para representar el resultado, ella introdujo una notación que puede ser aprovechada por la maestra, de modo que ésta sea capaz de enfocar la atención de los alumnos en que una división como ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6}$ puede ser pensada como un objeto matemático en sí mismo, y no sólo como un proceso o una división indicada. Más adelante, los estudiantes pueden usar una letra como x para indicar el resultado en un problema de división, por ejemplo, ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6} = x$. Usando el método de Cheryl, los estudiantes pueden escribir $x \times {}^{2}/_{6} = {}^{4}/_{6}$ y luego encontrar x multiplicando ambos lados por ${}^{6}/_{2}$. El uso de una letra puede facilitar el tratar con una expresión tal como ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6}$ como un solo objeto matemático. Es importante recordar que incluso la gente que tiene capacidad para tratar con expresiones algebraicas como $x \times {}^{2}/_{6} = {}^{4}/_{6}$ y encontrar x, puede que no vea ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6}$ como un solo objeto (Flores, Turner y Bachman, 2005). Aprender a considerar cadenas de números y símbolos como objetos matemáticos, y no sólo como procesos para encontrar una respuesta no es automático y representa un paso importante en la transición de la aritmética al álgebra (Kieran y Chalouh, 1993).

LA DIVISIÓN COMO FACTOR FALTANTE

David, un alumno de 6º año, usó una estrategia multiplicativa para resolver el siguiente problema de división:

> Se necesita ${}^{4}/_{9}$ de frasco de pigmento azul para mezclar un galón de pintura que tiene el tono de azul celeste. ¿Cuántos galones de pintura se pueden hacer con 13 frascos de pigmento? (Empson y Levi, 2011, p. 200)

La solución de David fue como sigue:

$\_\_\_ \times {}^{4}/_{9} = 13$

$9 \times {}^{4}/_{9} = 4$

$\_\_\_ \times 4 = 13$

$3\,{}^{1}/_{4} \times 4 = 13$

$3\,{}^{1}/_{4} \times 9 \times {}^{4}/_{9} = 13$

$29\,{}^{1}/_{4} \times {}^{4}/_{9} = 13$

David replanteó el problema de dividir $13 \times {}^{4}/_{9}$ como un problema equivalente de factor faltante. Además de usar la conexión entre la división y la multiplicación, David utilizó el principio matemático de la asociatividad de la multiplicación. David descompone el problema original de multiplicación en dos pasos. Al multiplicar $9 \times {}^{4}/_{9}$ encuentra un número entero que le facilita la comparación multiplicativa con 13. El problema $\_\_\_ \times 4 = 13$ es más sencillo de resolver, y puede ser relacionado con el problema original como lo muestra David en los pasos que siguen. El maestro puede ayudar a los alumnos a ver cómo el método de David tiene validez general. Para encontrar la solución de $y \times {}^{4}/_{9} = 13$, David resuelve primero $z \times 4 = 13$, de donde $z = 3\ {}^{1}/_{4}$. Como 4 es 9 veces más grande que ${}^{4}/_{9}$, la respuesta y debe ser 9 veces más grande que z. El método de David se puede relacionar también con el método –descrito más adelante– de ver la división entre una fracción como la composición de dos operaciones. Si escribimos los problemas como divisiones, el método de David es equivalente a resolver primero $13 \div 4$, y luego multiplicar el resultado por 9 para obtener la respuesta del problema original, $13 \div {}^{4}/_{9}$.

USO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL INVERSO Y DIRECTO

Warrington (1997) reporta diferentes métodos para la división de fracciones usadas por sus alumnos en un grupo autocontenido de habilidad y edades mixtas (de 5º y 6º grado). Los alumnos primero utilizaron la interpretación de medición para encontrar que la respuesta de $1 \div {}^{1}/_{3}$ era 3, "ya que un tercio cabe tres veces en uno" (Ibíd., p. 392). Cuando se encontraron con un problema relacionado, $1 \div {}^{2}/_{3}$, varios alumnos usaron razonamiento proporcional inverso, diciendo que la respuesta debía ser la mitad de la repuesta del primer problema, ya que ${}^{2}/_{3}$ es dos veces más grande que ${}^{1}/_{3}$ (Ibíd., p. 392). Aquí, el maestro puede tratar de reforzar esta manera de pensar haciendo que los alumnos consideren problemas relacionados donde el dividendo se mantiene constante y el divisor cambia, y los estudiantes comparan las diferentes respuestas.

$2 \div {}^{1}/_{3}$ $\qquad 2 \div {}^{2}/_{3}$ $\qquad 2 \div {}^{4}/_{3}$

En el siguiente ejemplo, los estudiantes trabajaron con el problema:

> Yo compré $5\ {}^{3}/_{4}$ libras de cacahuates cubiertos de chocolate. Quiero empacar los dulces en bolsas de media libra, de manera que los pueda congelar y utilizar las porciones más pequeñas. ¿Cuántas bolsas de media libra puedo hacer? (Warrington, 1997, p. 392)

En la clase de Warrington, los alumnos eran alentados –y estaban acostumbrados– a estimar mentalmente la respuesta antes de tratar de obtener una respuesta exacta. Una respuesta estimada puede ayudar a los alumnos a ver la comparación multiplicativa entre las dos fracciones. Cuando los alumnos dan estimaciones rápidas que van de 10 a 12 bolsas (Ibíd., p. 392), pueden tener una mejor idea de cuántas veces es más grande $5\ {}^{3}/_{4}$ comparado con ${}^{1}/_{2}$.

Para obtener una respuesta exacta al problema de arriba, una alumna dijo que había duplicado cinco y tres cuartos y luego dividido entre uno (Ibíd., p. 393). Esto es, multiplicó tanto el dividendo como el divisor por 2. Cuando sus compañeros le preguntaron si podía hacer eso, ella explicó que no cambiaba el problema. Utilizó el hecho de que el cociente permanece constante cuando los dos términos de la división se multiplican por dos, como en $10 \div 5 = 2$ y $20 \div 10 = 2$. La alumna utilizó el principio de proporcionalidad sin haber recibido instrucción directa acerca de las proporciones.

DIVISIÓN ENTRE UNA FRACCIÓN COMO UNA COMPOSICIÓN DE OPERACIONES

En esta sección vemos cómo los alumnos recurren a la composición de dos operaciones, multiplicación y división con números enteros, para resolver un problema de división entre una fracción como el siguiente.

> Si $^3/_5$ de una bolsa de caramelo pesan $6\ ^3/_4$ libras, ¿cuánto pesa una bolsa de caramelo? (Empson y Levi, 2011, p. 204)

Keesha resolvió el problema dividiendo $6\ ^3/_4$ entre 3 y luego multiplicó por 5. Cuando le pidieron que explicara su pensamiento, ella dijo: "cuando divides entre $^3/_5$, primero divides entre 3 y sabes cuánto pesa $^1/_5$ de una bolsa. Luego multiplicas por 5 y eso te dice cuánto pesa la bolsa completa" (Ibíd., p. 205). Usando notación algebraica, podemos representar el método de Keesha de la siguiente manera: si a es cualquier número, $^b/_c$ una fracción, entonces $a \div {}^b/_c = (a \div b) \times c$.

Caroline resolvió el siguiente problema de división de fracciones primero multiplicando y luego dividiendo.

> Sheila bebe $^3/_4$ de vaso de agua por cada milla que camina. A su botella le caben 5 vasos de agua. ¿Qué tan lejos puede llegar antes de que se le acabe el agua? (Ibíd., p. 205).

Primero encontró cuántos $^1/_4$ hay en 5, "hay 5 por 4 o 20" (p. 205). Pero como realmente tenía que encontrar cuántos $^3/_4$ hay en 5, ella se dio cuenta de que el número de $^3/_4$ que hay en 5 sería la tercera parte del número de $^1/_4$ que hay en 5. Así que dividió 20 entre 3 y obtuvo la respuesta, usando el hecho $5 \div {}^3/_4 = (5 \times 4) \div 3$. El método de Caroline se puede representar algebraicamente como $a \div {}^b/_c = (a \times c) \div b$.

Vemos en estos dos ejemplos que un problema de dividir un número entre una fracción, digamos $^3/_4$, se puede resolver primero dividiendo entre 3 y luego multiplicando por 4, o primero multiplicando por 4 y luego dividiendo entre 3. A fin de que los alumnos tengan una mejor comprensión, pueden conectar este método con la multiplicación por el inverso multiplicativo y la asociatividad de la multiplicación. Dividir un número entre 4 es lo mismo que multiplicar el número por $^1/_4$. Así que dividir entre $^3/_4$, que es lo mismo que dividir primero entre 4 y luego multiplicar por 3, equivale a multiplicar por

$^1/_4$ primero y luego multiplicar por 3. Esto es lo mismo que multiplicar por 3 primero y luego multiplicar por $^1/_4$, que es lo mismo que primero multiplicar por 3 y luego dividir entre 4. En notación algebraica, de $a \times {}^1/_4 \times 3 = a \times 3 \times {}^1/_4$ se sigue que $(a \div 4) \times 3 = (a \times 3) \div 4$.

DIVISIÓN ENTRE UNA FRACCIÓN Y MULTIPLICACIÓN POR EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL DIVISOR

En algunos casos, los alumnos conectarán por sí mismos su forma de dividir fracciones con el procedimiento de multiplicar por el inverso de la segunda fracción. Por ejemplo, Pirie (1988) reporta acerca de un grupo de alumnos de 11 años quienes usaron la estrategia de composición de operaciones para dividir entre una fracción. Para resolver $2\,{}^1/_4 \div {}^2/_3$, su proceso fue primero "multiplicar por 3", lo que les dio $6\,{}^3/_4$, y luego tomar la mitad de eso. Una estudiante describió la estrategia con sus propias palabras:

> Oh, son fáciles. Sólo multiplicas el número de abajo y ves cuántos 2 o 4 o lo que sea caben. Como cuando divides entre $^4/_5$, entonces multiplicas por 5 y ves cuántos 4, o lo que sea, caben y si hay un poco de sobrante, lo divides en cuartos o algo. (Ibíd., p. 3)

El grupo no tuvo más instrucción sobre el tema. Ocho semanas después, la respuesta de la misma alumna para un problema de división entre una fracción fue: "sólo la volteas al revés y multiplicas" (Ibíd., p. 4).

En otros casos en los que los alumnos no establecen la conexión por sí mismos, el maestro puede poner actividades y hacer preguntas para ayudar a los alumnos a ver patrones y establecer la conexión. Una forma de ayudarlos a establecer la conexión es ver tanto la división como la multiplicación como composiciones de operaciones y compararlas.

Algunos alumnos piensan la multiplicación por una fracción también como una composición de operaciones. Bella, una alumna de 4º grado, resolvió el problema $12 \times {}^3/_4$ primero dividiendo $12 \div 4$, y luego multiplicando el resultado por 3 (Empson y Levi, 2011, p. 192). Podemos entonces escribir $12 \times {}^3/_4 = (12 \div 4) \times 3$. Bella usó la misma estrategia para multiplicar ${}^3/_4 \times 22 = (22 \div 4) \times 3$ (Ibíd., p. 193).

De este modo, podemos interpretar la composición de operaciones $(5 \div 3) \times 4$ como un problema de división entre una fracción, $5 \div {}^3/_4$, o como una multiplicación por una fracción, $5 \times {}^4/_3$. Desde luego, la composición equivalente de operaciones $(5 \times 4) \div 3$ da lugar a los mismos problemas de división y multiplicación de fracciones. Así, los alumnos pueden ver que $5 \div {}^3/_4 = 5 \times {}^4/_3$.

DIVISIÓN DE FRACCIONES COMO UNA RAZÓN ENTRE DOS CANTIDADES

Algunas veces los alumnos encuentran común denominador cuando se enfrentan con un problema de división, tal como $^2/_5 \div {^1/_3}$, y tratan de resolver, en su lugar, el problema equivalente $^6/_{15} \div {^5/_{15}}$ (Warrington, 1997). La alumna que cambió el problema explicó por qué había encontrado común denominador para las fracciones: "Porque es más fácil para mí dividirlas ahora y todavía son el mismo número" (Ibíd., p. 393).

Dividir fracciones con el mismo denominador es un contexto donde se puede enfatizar la razón entre dos fracciones. Los estudiantes pueden usar representaciones concretas de fracciones, tales como modelos de plástico en los que los valores son proporcionales a las áreas, para dividir fracciones en conjuntos de problemas, tales como $^5/_4 \div {^3/_4}$, $^5/_8 \div {^3/_8}$, $^5/_{10} \div {^3/_{10}}$, $^5/_{12} \div {^3/_{12}}$. Para cada problema de división de dos fracciones, tanto el dividendo como el divisor tienen el mismo denominador, y de un problema a otro del conjunto, los numeradores para los dividendos son iguales entre sí; y de un problema a otro, los numeradores para los divisores son iguales entre sí. Para todos los problemas, la relación entre el número de piezas del dividendo y el número de piezas del divisor es la misma, pero para cada problema se utilizan piezas de diferente tamaño. Al resolver tales conjuntos de problemas, los estudiantes se dan cuenta de que en situaciones en las que dos fracciones tienen el mismo denominador, el resultado de la división de una fracción por la otra sólo depende de la razón de los numeradores, no del tamaño de las piezas. La razón del número de piezas entre dividendo y divisor en los ejemplos de arriba es la misma que 5 a 3. Por tanto, todos los problemas tienen la misma respuesta: $5 \div 3 = {^5/_3}$. La conexión entre división y razón en el contexto de fracciones puede ayudar a los alumnos a desarrollar su pensamiento multiplicativo para comparar fracciones.

COMENTARIOS FINALES

Como Kieren (1992) señala, los conceptos de fracciones son inherentemente multifacéticos (p. 330). Los investigadores han identificado varios constructos relacionados con las fracciones y los números racionales (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Kieren, 1976, 1988), tales como parte-todo, medida, cociente, razón y operador. Necesitamos dar a los estudiantes la oportunidad de desarrollar esas facetas distintas y hacer transiciones entre ellas. Desafortunadamente, muchos estudiantes que reciben instrucción limitada a fracciones en el contexto parte-todo tienen una comprensión empobrecida de número racional (Lamon, 1999, p. 4).

También existen distintos significados e interpretaciones para la división de fracciones, tales como medición, partición, factor faltante, razón y determinación de la razón unitaria (Flores, 2002; Sinicrope, Mick y Kolb, 2002). Los alumnos interactúan mentalmente con estos constructos, significados e interpretaciones en formas complejas y dependiendo del contexto o situación. En un principio, las situaciones más comunes para ilustrar el concepto de división implican un reparto o distribución, por ejemplo, repartir siete pays entre cuatro amigos. En este tipo de situaciones, una fracción puede ser, de manera natural, el dividendo (repartir $^3/_4$ de pay entre dos amigos) y el cociente, pero no es fácil dar una interpretación cuando el divisor es una fracción. Los ejemplos dados en el artículo también ilustran que diferentes situaciones pueden dar lugar a diferentes estrategias. Por ejemplo, en situaciones donde se utiliza el significado de medición (cuota) de la división, en las que el divisor es una fracción y el dividendo un número natural, una fracción mixta o una fracción, las estrategias más utilizadas por los alumnos son la sustracción repetida, razonamiento proporcional y composición de operaciones. Otro tipo de soluciones (identidad multiplicativa, inversos multiplicativos, factor faltante, razón entre dos cantidades) pueden emerger cuando los estudiantes enfrentan situaciones que se plantean de manera exclusivamente numérica ($1 \div {}^2/_3$).

En un dominio complejo, tal como las estructuras multiplicativas, es necesario ayudar a los estudiantes a formar una red dinámica de relaciones y conexiones entre los distintos constructos y las diferentes interpretaciones de las operaciones, de modo que los alumnos puedan cambiar con facilidad de una perspectiva a otra que pueda ser más adecuada para entender las relaciones matemáticas en la situación. Adicionalmente, al alternar las formas en las que los estudiantes examinan una situación, ellos pueden desarrollar una mejor comprensión desde distintas perspectivas. Por ejemplo, utilizar una perspectiva de razón puede proporcionar una comprensión matemática distinta que una perspectiva de operador.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. L. (1990), "Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 2, pp. 132-144.

Barlow, A. T. y J. M. Drake (2008), "Assessing understanding through problem writing: Division by a fraction", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 13, núm. 6, pp. 326-332.

Behr, M., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1993), "Rational numbers: Towards a semantic analysis - emphasis on the operator construct", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 13-47.

Behr, M., R. Lesh, T. Post y E. Silver (1983), "Rational-number concepts", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, pp. 91-126.

Boaler, J. y C. Humphreys (2005), *Connecting Mathematical Ideas: Middle School Video Cases to Support Teaching and Learning*, Portsmouth, Heinemann.

Clarke, D. M., A. Roche y A. Mitchell (2008), "10 practical tips for making fractions come alive and make sense", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 13, núm. 7, pp. 373-380.

Day, M. M. (2010), *Middle school mathematics students' justification schemes for dividing fractions*, tesis de doctorado, Tempe, Arizona State University.

Duckworth, E. R. (2006),*"The Having of Wonderful Ideas" and Other Essays on Teaching and Learning"*, 3a edición, Nueva York, Teachers College Press.

Empson, S. B. y L. Levi (2011), *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*, Portsmouth, Heinemann.

Flores, A. (2002), "Profound understanding of division of fractions", en B. Litwiller y G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, 2002 NCTM Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 237-246.

Flores, A. y M. D. Priewe (2013), "Orange you glad I did say 'fraction division'?", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 19, núm. 5, pp. 288-293.

Flores, A., E. E. Turner y R. C. Bachman (2005), "Posing problems to develop understanding: Two teachers make sense of division of fractions", *Teaching Children Mathematics*, vol. 12, pp. 117-121.

Harel, G. y J. Confrey (eds.) (1994), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, State University of New York Press.

Kieran, C. y L. Chalouh (1993), "Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra", en D. T. Owens (ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 179-198.

Kieren, T. E. (1976), "On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers", en R. Lesh (ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop*, Columbus, ERIC/SMEAC (Science, Mathematics, and Environmental Education Information Analysis Center), pp. 101-144.

——— (1988), "Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 162-181.

——— (1992), "Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction", en G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 323-371.

Kribs-Zaleta, C. (2008), "Oranges, posters, ribbons, & lemonade: Concrete computational strategies for dividing fractions", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 13, núm. 8, pp. 453-457.

Lamon, S. J. (1999), *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., T. Post y M. Behr (1988), "Proportional reasoning", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 93-118.

Lobato, J. y A. B. Ellis (2010), *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions & Proportional Reasoning*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (1999), *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates.

Pirie, S. E. B. (1988), "Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalised...? How can we know?", *For the Learning of Mathematics*, vol. 8, núm. 3, pp. 2-6.

Polya, G. (1962), *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, vol. 1, Nueva York, John Wiley & Sons.

——— (1990), *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*, vol. 1, Princeton, Princeton University Press.

Simon, M. A. (1993), "Prospective elementary teachers' knowledge of division", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, núm. 3, pp. 233-254.

Sinicrope, R., H. W. Mick y J. R. Kolb (2002), "Interpretations of fraction division", en B. Litwiller y G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, 2002 NCTM Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 153-161.

Smith, J. P. (1995), "Competent reasoning with rational numbers", *Cognition and Instruction*, vol. 13, núm. 1, pp. 3-50.

Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (1994), "The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate", en G. Harel y J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, State University of New York Press, pp. 179-234.

Thompson, P. W. y L. A. Saldanha (2003), "Fractions and multiplicative reasoning", en J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Toluk, Z. (1999), *Children's Conceptualizations of the Quotient Subconstruct of Rational Numbers*, tesis de doctorado, Tempe, Arizona State University.

Warrington, M. A. (1997), "How children think about division with fractions", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 2, núm. 6, pp. 390-394.

DATOS DEL AUTOR

Alfinio Flores Peñafiel
University of Delaware, Estados Unidos
alfinio@math.udel.edu