Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño

José Luis Cortina

Resumen: Se discuten las aportaciones a la didáctica de las fracciones de cuatro investigaciones que el autor y sus colegas han realizado, retomando algunos aspectos de la metodología de los experimentos de diseño. Estas aportaciones conciernen a la puntualización de los objetivos de aprendizaje de las fracciones, la identificación de puntos de partida para la enseñanza y el desarrollo de propuestas alternativas para apoyar el aprendizaje de este concepto.

Palabras clave: fracciones, experimentos de diseño, razonamiento proporcional.

Abstract: We discuss the contributions to the field of fractions of four research projects, conducted by the author and his colleagues. Several aspects of the design research methodology were central to the implementation of these projects. The contributions include specifying the big ideas of learning fractions, identifying viable starting points, and developing instructional innovations to support students' understanding of this concept.

Keywords: fractions, design experiments, proportional reasoning.

INTRODUCCIÓN

En este artículo describo las aportaciones de cuatro investigaciones que, junto con mis colegas, he realizado en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Una característica importante de estas investigaciones ha sido la de retomar algunos aspectos de la metodología de los experimentos de diseño, en la forma en que Cobb y Gravemeijer (Gravemeijer y Cobb, 2006; Stephan et ál., 2003; Cobb et ál., 1997) la han desarrollado.

Comienzo el capítulo con una breve revisión de la investigación en el campo de las fracciones, señalando cuatro preocupaciones que la han motivado. Después describo la metodología de los experimentos de diseño, destacando los aspectos teóricos y metodológicos que han influenciado nuestras investigaciones. Finalmente describo las aportaciones de nuestro propio trabajo de investigación, relacionándolas con tres metas centrales de los experimentos de diseño: *1)* la puntualización de los objetivos de aprendizaje, *2)* la identificación de puntos de partida para la enseñanza y *3)* el desarrollo de propuestas alternativas para apoyar el aprendizaje.

Fecha de recepción: 5 de septiembre de 2013; fecha de aceptación: 27 de noviembre de 2013.

EL CAMPO DE LAS FRACCIONES

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones es uno de los temas más investigados en la educación matemática. Autores de gran renombre han incursionado en él; entre ellos destacan Guy Brousseau (Brousseau et ál., 2004), Deborah Ball (1993), Vasily V. Davydov (1969/1991) y Hans Freudenthal (1983).

En la literatura pueden identificarse cuatro preocupaciones principales que han motivado la realización de estudios en el campo (Lamon, 2007). La primera ha consistido en puntualizar la naturaleza didáctica del concepto. Los autores que han trabajado en ello se han preocupado por especificar las nociones matemáticas que entran en juego, o que deberían de hacerlo, al aprender y al enseñar fracciones (Kieren, 1980; Behr et ál., 1983; Freudenthal, 1983; Thompson y Saldanha, 2003). Estos trabajos han sido de naturaleza teórica. De dos de ellos (Kieren, 1980 y Behr et ál., 1983) surgió la ampliamente aceptada suposición de que las fracciones tienen al menos cuatro significados: parte-todo, medida, razón y operador.

La segunda preocupación se deriva de la teoría psicológica del constructivismo y ha implicado identificar y describir los esquemas mentales que resultan del aprendizaje de las fracciones, así como los procesos que llevan a que estos esquemas se desarrollen (Steffe y Olive, 2010; Saenz-Ludlow, 1994; Norton, 2008). Estos trabajos, de naturaleza empírica, han sido realizados a través de la conducción de entrevistas clínicas y de experimentos de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000). En ellos se ha identificado y descrito la relativa complejidad conceptual, primero, de concebir a las fracciones como números que cuantifican el tamaño de una magnitud continua. Esto es, se ha descrito la complejidad intrínseca de entender una expresión como "tres cuartos del pastel", como aludiendo a una sola masa cuyo tamaño corresponde a lo triple de la cuarta parte del pastel, en lugar de a un subconjunto de tres elementos discretos (pedazos de pastel) de un conjunto de cuatro.

En estos trabajos también se ha identificado y descrito la complejidad conceptual propia de concebir a la magnitud que una fracción cuantifica como susceptible de ser iterada sin restricción. Estas concepciones son necesarias para entender las fracciones como números que pueden cuantificar legítimamente el tamaño de algo que es mayor al tamaño del entero; por ejemplo, son necesarias para darle sentido a una expresión como ésta: "once cuartos de pulgada".

Una tercera preocupación, más vinculada a la didáctica, ha sido la de generar propuestas de enseñanza que favorezcan el aprendizaje del concepto. La investigación que ha atendido esta preocupación ha implicado la conducción de intervenciones en las aulas. Entre las propuestas que han sido investigadas están: *1)* el uso de situaciones problemáticas que implican la repartición de múltiples enteros, como medio para apoyar el aprendizaje de las fracciones mixtas e impropias (Streefland, 1991); *2)* el uso de la medición como eje central en la enseñanza de las fracciones (Lamon, 2007); *3)* el abordar la enseñanza de las fracciones desde el concepto de razón (Brousseau et ál., 2004), y *4)* el focalizar la enseñanza de las fracciones en la idea de magnitud continua (Davydov, 1969/1991).

La cuarta preocupación se vincula al campo de la evaluación y ha implicado documentar los niveles de comprensión de las fracciones que estudiantes de diferentes edades logran (Hart, 1989; Gould, 2005; Hannula, 2003; Saxe et ál., 2005). Estos estudios, de naturaleza cuantitativa, han utilizado muestras de alumnos relativamente grandes. En general, han encontrado que sólo una minoría de estudiantes alcanza niveles aceptables en la comprensión del concepto.

Dada la gran cantidad de estudios realizados en torno a estas cuatro preocupaciones, puede parecer que quedan pocas cuestiones de importancia por aclarar o descubrir en el campo de las fracciones. Sin embargo, éste no es el caso. No sólo continúa habiendo entre los expertos gran insatisfacción sobre los niveles típicos de comprensión de las fracciones logrados por los estudiantes, sino que también la hay sobre lo que se sabe de qué debe hacerse para mejorar el aprendizaje de este concepto (Lamon, 2007; Tzur, 2007).

En este artículo se describen las aportaciones de la investigación que, junto con mis colegas, he realizado en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Las investigaciones realizadas han sido influenciadas, de manera significativa, por la metodología de los experimentos de diseño. A continuación se destacan los aspectos teóricos y metodológicos de esta metodología que han orientado nuestras investigaciones.

EXPERIMENTOS DE DISEÑO

Los experimentos de diseño son una metodología de la educación matemática cuyo fin principal es el desarrollo de recursos educativos, tanto de naturaleza teórica como práctica, que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar (Cobb, 2007). La conducción de uno de estos experimentos implica el diseño y puesta a prueba de secuencias de enseñanza para apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos (como las fracciones), en formas específicas. Además, implica el estudio sistemático de esas formas de aprendizaje, dentro del contexto sociopedagógico en el que emergen.

En esta metodología se adopta una forma particular de entender el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela. En lo que respecta al aprendizaje matemático, esta metodología adopta una perspectiva que, por una parte, es consistente con el constructivismo. Se considera que el aprendizaje matemático es el resultado de la actividad cognitiva del sujeto y que conlleva siempre la reorganización de conocimientos previos. Por otra parte, se considera a este aprendizaje como necesariamente situado en un contexto social y cultural (Cobb y Bowers, 1999).

En la metodología de los experimentos de diseño, se parte de que el pensamiento individual y el contexto sociocultural están estrechamente ligados, sin que ninguno predomine sobre el otro. Así, se concibe al *aprendizaje matemático* como un fenómeno esencialmente social, y al *contexto sociocultural* como un fenómeno esencialmente cognitivo (Cobb et ál., 1997).

La forma de aproximarse al aprendizaje matemático que se asume en la metodología de los experimentos de diseño impacta profundamente en la manera en la que se aborda la enseñanza. Dada la fuerte influencia que se reconoce que tiene el contexto sociocultural en la cognición, se le considera a éste como la vía principal para promover la emergencia de formas específicas de aprendizaje matemático. Aspectos del contexto sociocultural del aula, en los que un maestro puede intervenir, son considerados como los medios a través de los cuales es posible apoyar el aprendizaje matemático. Entre estos aspectos se encuentran: *a)* las tareas y situaciones problemáticas en las que se involucra la comunidad del aula; *b)* los sistemas simbólicos con los que se representan ideas matemáticas, ya sean materiales manipulables o representaciones gráficas; *c)* la organización de las actividades del aula, y *d)* las normas que pautan las formas en que los miembros del grupo interactúan, hablan y debaten (Cobb et ál., 2008).

Por lo general, un experimento de diseño implica la puesta a prueba de una *trayectoria hipotética de aprendizaje* (THA). Ésta consiste en un conjunto de conjeturas sobre cómo ha de desarrollarse el aprendizaje de un concepto matemático específico, junto con los medios que habrán de apoyar el proceso. La formulación de una THA inicia con un ejercicio de revisión y análisis de la literatura existente en el campo, que se utiliza para puntualizar los objetivos principales de aprendizaje (Cobb et ál., 2003a).

Como segundo paso, se define el punto de partida. Ello implica identificar nociones matemáticas que los alumnos ya han desarrollado –como resultado de experiencias escolares y extraescolares previas– con el potencial de servir de base inicial para el desarrollo de formas cada vez más complejas de entender un concepto.

El tercer paso en la elaboración de una THA consiste en formular conjeturas sobre los principales cambios que se espera que ocurran en el aprendizaje de los estudiantes, y sobre los medios que habrán de soportarlos. El diseño de estos medios se materializa en una *secuencia de enseñanza*, la cual consiste en las situaciones problemáticas, así como en los materiales didácticos manipulables y las formas de representar ideas matemáticas que secuencialmente se espera usar en el aula. El fundamento pedagógico de esta secuencia es siempre la THA, por lo que un ajuste en la THA implica siempre una modificación de la secuencia de enseñanza.

Un aspecto central en el análisis de un experimento de enseñanza implica la reformulación de la THA, a la luz de los resultados obtenidos. De manera retrospectiva, la viabilidad de cada una de las conjeturas es revisada, permitiéndose incluso la total reformulación de la THA, a fin de que se dé cuenta, de mejor manera, del proceso de aprendizaje estudiado. Se espera, además, que la revisión y ajuste de la THA continúe conforme sea utilizada por más y más educadores, en contextos y circunstancias distintas a las que originalmente llevaron a su formulación. Una vez que se logra tener una

THA cuya utilidad ha sido ampliamente probada, pasa a ser considerada ya no una THA sino una *teoría local de enseñanza* (Gravemeijer y Cobb, 2006).

La conducción de un experimento de enseñanza se da en tres fases: preparación, instrumentación y análisis retrospectivo (Gravemeijer y Cobb, 2006). En ocasiones, la primera de estas fases puede implicar un proceso relativamente largo, particularmente cuando la literatura existente es insuficiente para formular una primera versión de la THA. En estos casos, se vuelve necesario realizar estudios exploratorios, de los cuales se pueden derivar aportaciones a la investigación en algún campo, valiosas por sí mismas (e.g., McGatha et ál., 2002).

Los estudios exploratorios se realizan cuando el tipo de conocimiento matemático que se busca cultivar ha sido insuficientemente explorado (Confrey y Lachance, 2000; Cobb et ál., 2003a). También, cuando se sabe poco sobre cómo impactan las experiencias educativas previas, de los estudiantes con los que se espera trabajar, en el desarrollo de nociones matemáticas específicas (Gravemeijer y Cobb, 2006). Por ejemplo, la gran mayoría de las investigaciones enfocadas al estudio del desarrollo de nociones fraccionarias ha sido realizada en contextos que coinciden con lo que Skovsmose (2005) llama el *aula matemática prototípica*; esto es, han sido realizadas en contextos escolares bien equipados, con niños de familias más o menos bien acomodadas y maestros relativamente bien formados. En contraste, son muy pocos los estudios realizados en el tipo de aula que es muy común encontrar en los países en desarrollo, es decir, un aula insuficientemente equipada, con alumnos cuyas familias viven en condiciones de marginación y exclusión, y un maestro con carencias importantes en su formación.

En el resto del artículo describo las aportaciones de cuatro estudios realizados en el campo de las fracciones. Lo hago relacionándolas con tres metas centrales de los experimentos de diseño. Es importante aclarar que de los cuatro estudios, sólo uno implicó la instrumentación de un experimento de diseño completo (Cortina et ál., en prensa). Los otros tres fueron realizados con la intención de ser estudios exploratorios que aportaran datos útiles para la posible instrumentación de este tipo de experimentos, en el futuro.

PUNTUALIZAR LOS OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

Como ya se mencionó, el primer paso en la formulación de una THA consiste en puntualizar los objetivos de aprendizaje. Ello implica realizar una revisión crítica de la literatura relevante en el campo. Por ejemplo, en el caso de las fracciones, en esta revisión se deben incluir los trabajos que se han preocupado por especificar la naturaleza didáctica del concepto (ver arriba). También pueden revisarse trabajos centrados en conceptos matemáticos distintos al de las fracciones, pero relacionados. Por ejemplo, se pueden incluir trabajos que se centren en la proporcionalidad, en las razones o en los números decimales.

En la revisión de la literatura se procura dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Cuáles son las ideas centrales en este dominio? ¿Qué relación tiene el concepto con otros que forman el currículo? ¿Qué forma de entender el concepto beneficiaría más a los educandos, en el sentido de acceder a otras ideas del currículo de matemáticas, y de poder participar competentemente en prácticas científicas, económicas y de la vida cotidiana?

La puntualización de los objetivos de aprendizaje es un paso necesario en la formulación de una THA ya que, como lo explican Gravemeijer y Cobb (2006), los objetivos predominantes en la enseñanza de un concepto no deben ser adoptados de manera directa. Lo común es que éstos estén fuertemente influenciados por la historia y tradición en la enseñanza del concepto, así como por las formas en que éste ha sido evaluado. Es, entonces, necesario juzgar la pertinencia de esos objetivos de manera crítica y a la luz de lo que muestra la investigación en el campo.

En la definición de objetivos de aprendizaje en fracciones, ha predominado una perspectiva consistente con lo que Steen (2001) llama *la alfabetización matemática*. Por lo general, se ha visto al aprendizaje de este concepto como un medio para que los estudiantes comiencen a conocer el campo de los números racionales. De esta manera, se le ha dado en la definición de objetivos de enseñanza gran importancia a que los alumnos entiendan cuestiones relacionadas con la naturaleza numérica de las fracciones, tales como: su orden, su densidad y sus equivalencias (Steffe y Olive, 2010; Davydov, 1969/1991; Lamon, 2007), además de cómo y por qué estos números pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos (Brousseau et ál., 2004).

En nuestras investigaciones, hemos procurado responder a preocupaciones más relacionadas con lo que Steen (2001) llama *la alfabetización cuantitativa*. Al centro de estas preocupaciones está el encontrar formas de proveer a los estudiantes con recursos conceptuales que les permitan ser competentes en los ámbitos cotidiano, laboral, científico, económico y político del mundo actual; en los que la generación, comprensión, interpretación y comunicación de información cuantitativa son de gran importancia (NCTM, 2000; OECD, 2010). Esto nos ha llevado a proponer objetivos de aprendizaje de las fracciones, distintos a los que han predominado en la literatura especializada (cf., Cortina et ál., 2013; Cortina et ál., en prensa).

Interesados en el papel que tienen las fracciones en la cuantificación de fenómenos ecológicos, financieros, demográficos y de la administración de recursos públicos –al revisar la literatura que se enfoca a especificar la naturaleza didáctica del concepto–, reconocimos gran valor en la reflexión de Thompson y Saldanha (2003) sobre qué implica entender bien las fracciones. Según estos autores, el razonar de manera compleja sobre las fracciones implica "concebir que dos cantidades se encuentran en una relación recíproca de tamaño relativo" (p. 107).

En términos de puntualizar los objetivos de aprendizaje para formular una THA, la reflexión de estos autores nos pareció valiosa ya que presenta a las fracciones como una idea única, aunque multifacética, en torno a la cual organizar los esfuerzos educativos (Cobb, 1999). Además, le reconoce a las fracciones una función cuantitativa específica, estrechamente vinculada a la proporcionalidad, lo que permite conectar la enseñanza del concepto con el uso que se hace de los números racionales en diversas disciplinas, particularmente para medir y evaluar fenómenos (Maya, 2011).

El puntualizar los grandes objetivos de aprendizaje de las fracciones con base en la reflexión de Thompson y Saldanha nos ha llevado a reconsiderar la forma y el orden en que distintas nociones relacionadas con el estudio del concepto deben ser abordadas en la enseñanza. Así, nos ha llevado a considerar que las fracciones unitarias deben ser directamente abordadas como un recurso para cuantificar la relación recíproca de multiplicar una magnitud por un número entero (Cortina et ál., en prensa); por ejemplo, para cuantificar la relación recíproca de un enunciado como éste: "La distancia entre Guadalajara y la Ciudad de México es seis veces la distancia entre Cuernavaca y la Ciudad de México". Dicho de manera recíproca: "La distancia entre Cuernavaca y la Ciudad de México es un sexto de la distancia entre Guadalajara y la Ciudad de México".

Otra consecuencia importante de asumir las ideas de Thompson y Saldanha en la puntualización de objetivos de aprendizaje en fracciones ha sido la de considerar que las fracciones impropias deben ser introducidas de manera temprana en la enseñanza, toda vez que éstas son siempre el recíproco de una fracción propia (por ejemplo, el recíproco de 3/5 es 5/3). Esto, a su vez, nos ha llevado a procurar encontrar formas de introducir el concepto de fracción sin utilizar el modelo general de la equipartición, sea de uno o varios enteros, ya que este modelo involucra múltiples inconsistencias respecto a la idea de fracción impropia (cf. Freudenthal, 1983; Cortina et ál., 2013).

IDENTIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE PARTIDA PARA APOYAR EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

El segundo paso en la formulación de una trayectoria de aprendizaje implica identificar nociones matemáticas que los alumnos han desarrollado como resultado de experiencias escolares y extraescolares previas, y que tienen el potencial de servir de base inicial para el desarrollo de formas cada vez más complejas de entender un concepto. La puntualización que se hace de los grandes objetivos de aprendizaje ayuda a determinar cuáles nociones tendrían el mayor potencial. Por ejemplo, en la literatura en fracciones, varios autores han reconocido que los alumnos, desde edades tempranas, pueden involucrarse de manera significativa en actividades que implican la partición y repartición equitativa de un objeto divisible (e.g., una galleta; Charles y Nason, 2000). Las nociones que los alumnos ponen en juego al involucrarse en estas actividades han sido consideradas por varios autores como una base adecuada para el aprendizaje del concepto (e.g., Lamon, 2007; Steffe y Olive, 2010). Esto lo han hecho partiendo del supuesto de que la partición y distribución de un entero es un contexto propicio para modelar las propiedades numéricas de los racionales, como su equivalencia y densidad.

Sin embargo, si lo que ha de priorizarse en la enseñanza de las fracciones es la idea de las relaciones recíprocas de tamaño relativo entre cantidades, las nociones previas de los estudiantes sobre la equipartición pueden ser consideradas como de poca relevancia para el aprendizaje del concepto (Freudenthal, 1983).

La identificación de los puntos de partida de una THA frecuentemente requiere de la conducción de un estudio exploratorio, del que puede resultar un producto de investigación valioso en sí mismo (cf., McGatha et ál., 2002). Mis colegas y yo hemos realizado tres de estos estudios. En ellos, utilizando diferentes estrategias, hemos procurado identificar las nociones previamente desarrolladas por estudiantes provenientes de contextos socioculturales que han estado, si no ausentes, marginalmente representados en los estudios realizados en el campo de las fracciones, y del razonamiento multiplicativo en general. Cabe recalcar que, aunque estos estudios no consistieron en la instrumentación de un experimento de diseño, entre otras cosas, fueron realizados con la intención de poder ser útiles en la fase de planeación de uno de estos experimentos, en el futuro.

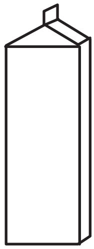
Antes de describir los estudios y sus hallazgos, es importante aclarar que éstos tienen cierta similitud con aquellas investigaciones que se han realizado con la finalidad de documentar los niveles de comprensión de las fracciones que estudiantes de diferentes edades logran (ver arriba). Sin embargo, una diferencia importante entre nuestros estudios y esas investigaciones es que, en concordancia con la metodología de los experimentos de diseño (Cobb et ál., 2003b), para nosotros ha sido más importante documentar lo que los estudiantes ya saben y entienden, que aquello sobre lo que tienen concepciones erróneas, o simplemente desconocen.

Primer estudio

En el primero de los estudios que realizamos para identificar un punto de partida (Cortina y Zúñiga, 2008), documentamos las nociones matemáticas que estudiantes de 4º grado de primaria, provenientes de comunidades social y económicamente excluidas, traerían a juego al resolver problemas que implicasen el concebir y comparar el tamaño de una magnitud, que es definida como el recíproco de multiplicar por un número entero. El estudio consistió en entrevistar de manera individual a 14 estudiantes de una escuela urbana marginada, en Chiapas, México. La situación principal que se utilizó implicó comparar el tamaño de diferentes tipos de vasos en relación a cuántos vasos de cada tipo podían ser llenados con la leche contenida en un cartón de leche (véase figura 1). Vale la pena aclarar que los estudiantes nunca vieron los vasos, sólo se los imaginaron.

Los estudiantes primero compararon vasos de un tamaño tal que el cartón de leche alcanzaría exactamente para llenar tres de ellos (1/3), con vasos de un tamaño tal que el cartón de leche alcanzaría exactamente para llenar cuatro de ellos (i.e., 1/3 vs. 1/4).

Figura 1 Dibujo del cartón de leche (de un litro) que se usó en las entrevistas



Con base en explicaciones similares, los estudiantes después compararon vasos de las siguientes capacidades: 1/3 vs. 1/5, 1/10 vs. 1/3 y 1/10 vs. 1/5.

Entre los resultados obtenidos estuvo el que todos los estudiantes compararan correctamente la capacidad relativa de los vasos, en todos los casos arriba mencionados. La siguiente transcripción ejemplifica las explicaciones que dieron los niños al comparar el tamaño de los vasos de plástico (1/3) con los de vidrio (1/5):

Vicky: *Indica que los vasos de plástico son más grandes.*
Entrevistadora: *¿Por qué?*
Vicky: *Porque eran 3* [de plástico] *y los de vidrio son 5.*
Entrevistadora: *¿Y eso qué quiere decir?*
Vicky: *Le sirven a cada quien un vaso* [de plástico], *pero si sirven 5* [vasos de vidrio] *va a tener más poco [de leche un vaso de vidrio].*

En general, los resultados de este estudio mostraron que alumnos, provenientes de comunidades social y económicamente excluidas y que se inician en el estudio de las fracciones, cuentan con nociones y conocimientos previos que les permiten imaginar, de manera correcta, el tamaño de una magnitud cuantificada por una fracción unitaria, cuando ésta es definida como el inverso de una multiplicación por un número entero. Con ello, documentamos que las relaciones recíprocas de tamaño relativo pueden servir de base para la enseñanza de las fracciones, desde que ésta inicia, y que la equipartición no es la única vía para ayudar a los estudiantes a imaginar el tamaño de una magnitud cuantificada por una fracción unitaria.

Los resultados de este estudio fueron claves para la instrumentación del experimento que se describe más adelante en este capítulo.

Segundo estudio

El segundo estudio que realizamos fue de corte cuantitativo (Cortina et ál., 2012a). Nos interesó indagar, de manera exploratoria, hasta qué punto una THA que partiera de nociones básicas de proporcionalidad, como las descritas en el apartado anterior, sería viable con estudiantes de grados más avanzados. Un antecedente importante de nuestro estudio fueron los resultados obtenidos por Backhoff et ál. (2006) sobre el dominio que tienen los estudiantes mexicanos de secundaria de los conocimientos matemáticos del currículum de primaria. Con base en una muestra representativa, estos autores encontraron que si bien el desempeño de los estudiantes de secundaria era, en términos estadísticos, significativamente mejor a los de primaria, la diferencia real era muy poca. En general, estos resultados mostraron que el progreso que logran los estudiantes mexicanos en su comprensión de nociones matemáticas básicas, durante los tres años de enseñanza secundaria, es considerablemente limitado.

Tomando en cuenta los principios teóricos de los experimentos de diseño, supusimos que estos resultados pobres se debían, al menos en parte, a que el nivel de comprensión de las matemáticas con el que llega la mayoría de los estudiantes mexicanos a la secundaria no les permite acceder fácilmente a los conocimientos del currículum y, en general, beneficiarse de la enseñanza recibida en ese nivel educativo. Por ello, consideramos que sería importante determinar si el desarrollo de propuestas de enseñanza de las fracciones que se orientaran hacia nociones básicas sería apropiado para el nivel de secundaria.

Es así que realizamos un estudio exploratorio para indagar sobre el nivel de comprensión que los estudiantes mexicanos logran, al terminar la primaria, de las fracciones como números que cuantifican el tamaño de una magnitud. El estudio consistió en aplicar 297 cuestionarios a alumnos de 6º grado de 13 escuelas primarias, seis ubicadas en Chiapas y siete en el Distrito Federal. Se procuró tener estudiantes que provinieran de contextos muy diversos, por lo que en la muestra se incluyeron escuelas indígenas, rurales, urbanas públicas, matutinas y vespertinas, así como escuelas privadas.

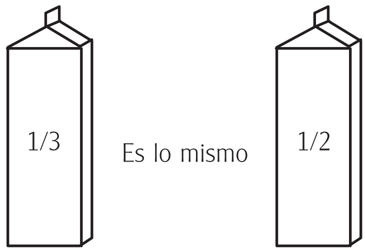
El instrumento incluyó seis reactivos que requerían comparar la cantidad de leche contenida en dos cartones. En cada reactivo se mostraron dos cartones de leche dibujados, con una fracción escrita al pie que indicaba la cantidad de leche contenida (figura 2).

Se les pidió a los alumnos que marcaran el nivel de leche en cada cartón, de acuerdo con lo indicado en la fracción, y que señalaran cuál de los dos cartones estaba más lleno, o si ambos contenían la misma cantidad de leche. Las fracciones a comparar fueron: 1/3 vs. 1/2, 3/4 vs. 1/4, 1/3 vs. 2/3, 2/4 vs. 1/2, 4/9 vs. 3/4 y 5/10 vs. 1/2. Como puede notarse, se tenían que comparar pares de fracciones relativamente comunes y todas las comparaciones podían realizarse con base en evaluar si las diferentes fracciones representaban cantidades mayores, menores o iguales a 1/2.

También se incluyó un reactivo en el que los estudiantes tenían que indicar cuál de las siguientes cifras indicaba la mayor cantidad de leche: 5/4 de litro, 8/9 de litro, 1 litro.

Los resultados de este estudio sugirieron que hay un gran número de alumnos que egresan de la primaria con un conocimiento muy precario de las fracciones como números que cuantifican tamaños relativos, particularmente en las escuelas indígenas, rurales y urbanas vespertinas. El 30.4% del total de los alumnos participantes ni siquiera asoció de manera consistente la inscripción “1/2” con la noción de *mitad*. Del otro lado

Figura 2 Ejemplo de los reactivos



de la escala, solamente el 19.9% de los estudiantes pareció haber desarrollado las concepciones fraccionarias necesarias para reconocer que una fracción puede cuantificar legítimamente a una magnitud mayor a uno.

En general, este estudio confirmó nuestra conjetura sobre la necesidad de desarrollar propuestas de enseñanza para 1º de secundaria que partan del supuesto de que, al llegar a este nivel, los alumnos aún no han desarrollado conocimientos que les permitan interpretar las fracciones como números que cuantifican tamaños relativos.

TERCER ESTUDIO

El tercer estudio exploratorio fue realizado por Francisco Maya (2011), un alumno del Doctorado en Educación de la Universidad Pedagógica Nacional, quien realizó su tesis bajo mi dirección. Parte de la investigación que realizó se enfocó en determinar el tipo de concepciones sobre las relaciones multiplicativas con las que cuentan los estudiantes de las carreras económico-administrativas, al inicio de la licenciatura. El estudio implicó tres ciclos de recolección de datos, en los que el investigador se preocupó por puntualizar el tipo de relaciones sobre las que los alumnos podrían razonar con facilidad. Esto es, se preocupó por identificar las concepciones de los alumnos que un maestro de matemáticas de nivel superior podría esperar que la gran mayoría de sus estudiantes hubieran desarrollado como resultado de sus experiencias educativas en los niveles previos (primaria, secundaria y bachillerato).

Maya (2011) identificó una serie de conceptos multiplicativos que los profesionales de las carreras económico-administrativas deberían de dominar, y los ordenó tomando en cuenta que comprender unos requeriría de antes haber comprendido otros. Los conceptos que consideró, yendo del más al menos complejo, fueron los siguientes: *1)* tasas de cambio definidas para un intervalo; *2)* razones y medidas de intensidad; *3)* fracciones como comparadores; *4)* fracciones, expresiones decimales, porcentajes y elasticidades, y *5)* medición.

Utilizando encuestas y entrevistas, Maya (2011) fue indagando sobre el nivel de comprensión que diferentes cohortes de estudiantes tenían de estos conceptos, comenzando por las tasas de cambio definidas para un intervalo. El criterio que utilizó para considerar que un estudiante tenía un nivel de comprensión suficiente de un concepto para ser aprovechado en el aprendizaje de uno más complejo fue que, al resolver un problema que lo implicaba, el educando pudiera: *1)* resolverlo correctamente, *2)* explicar y justificar su respuesta aludiendo a las cantidades involucradas (y no sólo a las mecanizaciones), y *3)* crear una representación gráfica que apoyara sus explicaciones.

Maya (2011) encontró que el nivel sólido de comprensión de las relaciones multiplicativas, con el que la gran mayoría de los estudiantes de las carreras económico-administrativas llega a la universidad, implica a los números enteros y a su recíproco; esto es, las fracciones unitarias. Así, la mayoría de los alumnos investigados podían resolver correctamente, explicar y graficar su respuesta a problemas como éste: "¿Si el valor de un dólar es 13 veces el valor de un peso, cuál es el valor de un peso respecto a un dólar?"

En contraste, un problema como el siguiente les resultaba mucho más difícil: "Si el sueldo de Juan cuando ingresó a la compañía equivale a tres cuartas partes de su sueldo actual, ¿cuánto gana hoy Juan respecto a lo que ganaba cuando ingresó?" Varios estudiantes podían producir respuestas correctas a este segundo tipo de problemas, ya sea despejando una ecuación o realizando una regla de tres. Sin embargo, muy pocos pudieron justificar sus respuestas articulando explicaciones que aludieran a las cantidades en cuestión[1] y produciendo una representación gráfica que respaldara sus explicaciones.

Como resultado de su exploración, Maya (2011) formuló una primera versión de una THA de conceptos multiplicativos como las tasas de cambio definidas para un intervalo. En ésta, tomó como punto de partida las relaciones multiplicativas que implican a un número entero como escalar, y su recíproco, una fracción unitaria. No instrumentó un experimento de diseño, propiamente, pero sí realizó otras exploraciones sobre la viabilidad de esta trayectoria. En general, en estas exploraciones encontró que cuando se toma este punto de partida, los estudiantes de las licenciaturas económico-administrativas "son capaces de desarrollar conceptos multiplicativos cada vez más complejos y útiles para sus profesiones" (Ibíd., p. 302).

DESARROLLO DE ALTERNATIVAS DE ENSEÑANZA

En el contexto de la investigación diseño, las propuestas de enseñanza se diseñan utilizando como fundamento una THA, en la cual se puntualizan los grandes objetivos de aprendizaje y se identifica un posible punto de partida. Parte del trabajo que mis colegas

[1] Un ejemplo sería: "Juan ganaba tres veces un cuarto (3/4) de lo que gana hoy. Así que hay una cantidad que corresponde a un cuarto de lo que hoy gana Juan y a un tercio de lo que ganaba cuando ingresó. Entonces, Juan gana hoy cuatro veces un tercio (4/3) de lo que ganaba cuando llegó a la compañía".

y yo hemos realizado en el campo de las fracciones ha consistido en formular una de estas trayectorias e investigar sobre su viabilidad, a través de la instrumentación de un experimento de diseño con alumnos de 4º grado de primaria.[2] En este esfuerzo, se diseñó una propuesta de enseñanza que busca favorecer el aprendizaje de las fracciones como números que cuantifican magnitudes.

La propuesta que diseñamos se fundamenta en una THA que define como *gran objetivo de aprendizaje* a las ideas de Thompson y Saldanha (2003) sobre las relaciones recíprocas de tamaño relativo, previamente discutidas. Además, retoma las ideas de Freudenthal (1983) sobre *la fracción como comparador*, así como en el punto de partida, ya descrito (Cortina y Zúñiga, 2008), en el que las fracciones unitarias son abordadas como un recurso para cuantificar la relación recíproca de multiplicar una magnitud por un número entero.

En la THA en la que se fundamenta la propuesta, se busca cultivar en los alumnos, desde temprano, la imagen de una fracción unitaria como un número que da cuenta del tamaño de cierto atributo, en algo que está separando de la unidad de referencia. Para cultivar dicha imagen, se diseñaron una serie de actividades con las que se procura que los niños experimenten la "reinvención" de la medición lineal. En éstas se utiliza una narrativa sobre las formas en que un grupo legendario de antiguos mayas (los acajay) medía. Primero se explora la medición utilizando partes del cuerpo (pies, cuartas, pasos, etc.). Posteriormente se explora la medición utilizando una vara (de 24 cm aprox.) como medida estandarizada.

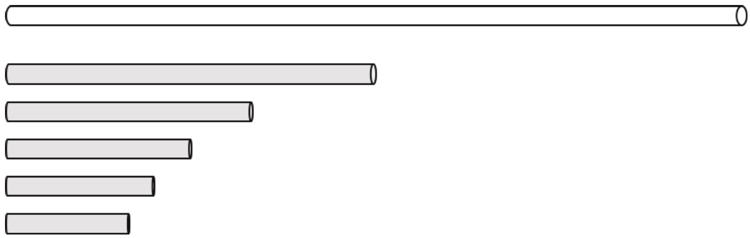
A partir de la experiencia de medir con la vara, se introduce el problema de cómo crear unidades de medida más pequeñas, para dar cuenta de manera precisa y sistemática de la longitud de los espacios que la vara no cubre exactamente. La solución que se le presenta a los alumnos, como la desarrollada por los acajay, consiste en crear varas más pequeñas, llamadas *pequeños*, que tienen la característica de cumplir con un criterio iterativo respecto de la vara (véase figura 3). Utilizando popotes de plástico[3] y tijeras, los estudiantes crean estos pequeños.

Se le pide primero a los estudiantes que produzcan un *pequeño de a dos* (i.e., un popote cuya longitud corresponde a un medio de la vara). Se les explica que sería un popote de un tamaño tal que dos iteraciones de su longitud cubrirían exactamente la longitud de la vara. Los estudiantes entonces manipulan la longitud de un popote que al principio es ligeramente más corto que la vara. Cuando lo iteran y notan que la segunda iteración rebasa la longitud de la vara, el popote es cortado con las tijeras (véase figura 4). Cuando la segunda iteración resulta ser más corta que la vara, los estudiantes desechan el popote y comienzan el proceso con uno nuevo. Después de varias pruebas, los estudiantes finalmente obtienen un popote que cumple con la condición acordada.

[2] Las descripciones detalladas de la THA y del experimento de diseño en la que fue utilizada se encuentra en Cortina, Visnovska y Zúñiga (en prensa). Desafortunadamente, por cuestiones de espacio, no fue posible incluirlas aquí.

[3] Popote es el nombre utilizado en México para las pajillas para sorber líquidos.

Figura 3 La vara y los pequeños de a dos (1/2), de a tres (1/3), de a cuatro (1/4), de a cinco (1/5) y de a seis (1/6).



A continuación, utilizando este método, los estudiantes producen otros pequeños (e.g., 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6). Los pequeños producidos son utilizados, primeramente, para apoyar formas de razonamiento consistentes con *la relación de orden inverso* (Tzur, 2007), presente en las fracciones unitarias. Por ejemplo, se utilizan para reflexionar sobre qué sería más largo, un pequeño de a ocho o un pequeño de a nueve (1/8 vs. 1/9).

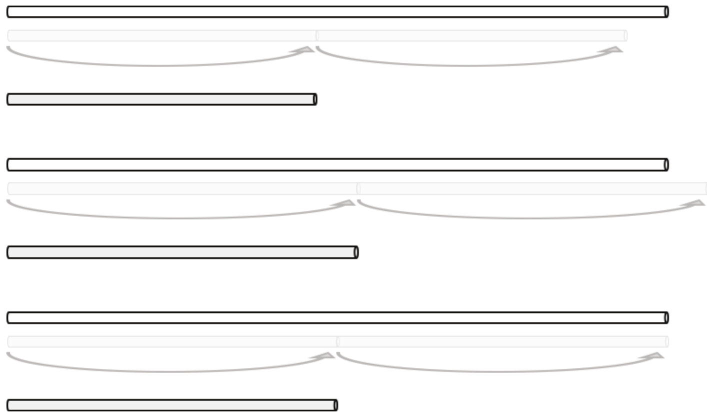
Posteriormente, los pequeños son utilizados para crear tiras de papel de una longitud específica. Por ejemplo, se les puede pedir que creen una tira cuya longitud equivalga a seis iteraciones del pequeño de a cinco (i.e., 6/5). Estas tiras sirven de base fenomenológica para ayudar a los alumnos a razonar sobre el tamaño relativo de las fracciones respecto a la unidad de referencia y entre ellas. Por ejemplo: ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una vara (6/5 vs. 1)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una que midiera siete pequeños de a ocho (6/5 vs. 7/8)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera cuatro pequeños de a cuatro o una que midiera siete pequeños de a siete (4/4 vs. 7/7)?

Los resultados que hemos obtenido en nuestra investigación (Cortina et ál., en prensa) muestran que una propuesta de enseñanza de las fracciones, fundamentada en una THA que retoma la caracterización hecha por Freudenthal (1983) de la fracción como comparador, puede ser viable. En general, hemos encontrado que los estudiantes de tercer y cuarto grados de primaria cuentan con las nociones e intuiciones necesarias para involucrarse de manera productiva en estas actividades. Además, hemos documentado que este tipo de propuestas son útiles para apoyar a los estudiantes en formas de razonar consistentes con la relación de orden inverso de las fracciones unitarias, y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Cortina et ál., en prensa; Cortina et ál., 2012b).

CONCLUSIONES

La investigación que se preocupa por la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones es intimidante, tanto por la riqueza y complejidad del tema, como por el gran número

Figura 4 Manipulación de un popote para que cumpla con la condición de que dos iteraciones de su longitud correspondan exactamente con la longitud de la vara.



de estudios que se han realizado en el campo. Hans Freudenthal, el célebre matemático y educador neerlandés, al embarcarse en el análisis didáctico del concepto dijo que esperaba no ahogarse en tanta riqueza fenomenológica.

En este artículo se ilustraron los recursos que ofrece la investigación diseño para estudiar un tema complejo como el de las fracciones. Los principios que inspiran a esta metodología innovadora de la educación matemática nos han facilitado, a mis colegas y a mí, hacer aportaciones a asuntos vinculados con el aprendizaje del concepto que han intrigado a los investigadores en el campo y, en algunos casos, generado frustración. De manera específica, esta metodología nos ha permitido identificar y proponer alternativas a: *1)* las formas en que tradicionalmente se han definido los grandes objetivos en la enseñanza del concepto; *2)* los recursos con los que cuentan niños y jóvenes para iniciarse en, y continuar con, el estudio del campo, y *3)* los medios didácticos con los que se puede apoyar el aprendizaje del concepto.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis colegas Claudia Zúñiga, Francisco Maya, Jana Visnovska, Renata Cardoso y Luz Pérez Quiroz sus contribuciones a mi trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Backhoff, E., E. Andrade, A. Sánchez, M. Peon y A. Bouzas (2006), *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Ball, D. L. (1993), "Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum.

Behr, M., R. Lesh, T. Post y E. Silver (1983), "Rational number concepts", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, pp. 91-125.

Brousseau, G., N. Brousseau y V. Warfield (2004), "Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 23, pp. 1-20.

Charles, K. y R. Nason (2000), "Young children's partitioning strategies", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 43, pp. 191-221.

Cobb, P. (1999), "Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 1, núm. 1, pp. 5-44.

——— (2007), "Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Greenwich, Information Age Publishing-NCTM.

Cobb, P. y J. Bowers (1999), "Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice", *Educational Researcher*, vol. 28, núm. 2, pp. 4-15.

Cobb, P., J. Confrey, A. A. diSessa, R. Lehrer y L. Schauble (2003a), "Design experiments in education research", *Educational Researcher*, vol. 32, núm. 1, pp. 9-13.

Cobb, P., K. Gravemeijer, E. Yackel, K. McClain y J. Whitenack (1997), "Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom", en D. Kirshner y J. A. Whitson (eds.), *Situated Cognition: Social, Semiotic, and Psychological Perspectives*, Mahwah, Lawrence Erlbaum, pp. 151-232.

Cobb, P., K. McClain y K. Gravemeijer (2003b), "Learning about statistical covariation", *Cognition and Instruction*, vol. 21, pp. 1-78.

Cobb, P., Q. Zhao y J. Visnovska (2008), "Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education", *Education et Didactique*, vol. 2, núm. 1, pp. 55-73.

Confrey, J. y A. Lachance (2000), "Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design", en A. Kelly y A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 231-266.

Cortina, J. L., E. R. Cardoso y C. Zúñiga (2012a), "El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 14, núm. 1, pp. 71-85.

Cortina, J. L., J. Visnovska y C. Zúñiga (2012b), "Alternative starting point for teaching fractions", en J. Dindyal, L. P. Cheng y S. F. Ng (eds.), *Mathematics Education: Expanding Horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, eBook, Singapore, MERGA, pp. 210-217.

Cortina, J. L., J. Visnovska y C. Zúñiga (en prensa), "Unit fractions in the context of proportionality: Supporting students' reasoning about the inverse order relationship", *Mathematics Education Research Journal*.

Cortina, J. L. y C. Zúñiga (2008), "La comparación relativa de tamaños: Un punto de partida alternativo y viable para la enseñanza de las fracciones", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 2, pp. 5-23.

Cortina, J. L., C. Zúñiga y J. Visnovska (2013), "La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones", *Educación Matemática*, vol. 25, núm. 2, pp. 7-29.

Davydov, V. V. (1969/1991), "On the objective origin of the concept of fractions", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 13, núm. 1, pp. 13-64.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Kluwer.

Gould, P. (2005), "Year 6 students' methods of comparing the size of fractions", en P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce et ál. (eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Sydney, MERGA, pp. 393-400.

Gravemeijer, K. y P. Cobb (2006), "Design research from a learning design perspective", en J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (eds.), *Educational Design Research: The Design, Development and Evaluation of Programs, Processes and Products*, Nueva York, Routledge, pp. 45-85.

Hannula, M. S. (2003), "Locating fraction on a number line", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3, Honolulu, PME, pp. 17-24.

Hart, K. (1989), "Fractions: Equivalence and addition", en K. Hart, D. C. Johnson, M. Brown, L. Dickson y R. Clarkson (eds.), *Childrens' Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching*, Windsor, NFER-Nelson, pp. 46-75.

Kieren, T. E. (1980), "The rational number construct: Its elements and mechanisms", en T. E. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

Lamon, S. J. (2007), "Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Pub, pp. 629-667.

Maya, F. (2011), *El razonamiento multiplicativo en jóvenes universitarios del área económico administrativa*, tesis doctoral, México, Universidad Pedagógica Nacional.

McGatha, M., P. Cobb y K. McClain (2002), "An analysis of students' initial statistical understandings: Developing a conjectured learning trajectory", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, núm. 3, pp. 339-355.

NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Norton, A. (2008), "Josh's operational conjectures: Abductions of a splitting operation and the construction of new fractional schemes", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 39, pp. 401-430.

OECD (2010), *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do: Student Performance in Reading, Mathematics and Science*, vol. 1, París, Organisation for Economic Co-operation and Development.

Saenz-Ludlow, A. (1994), "Michael's fraction schemes", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, pp. 50-85.

Saxe, G. B., E. V. Taylor, C. McIntosh y M. Gearhart (2005), "Representing fractions with standard notations: A developmental analysis", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 36, pp. 137-157.

Skovsmose, O. (2005), *Critical Mathematics Education for the Future* (Working Papers on Education), Denmark, Aalborg University.

Steen, L. A. (2001), "The case for quantitative literacy", en L. A. Steen (ed.), *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy*, Princeton, National Council on Education and the Disciplines.

Steffe, L. P. y J. Olive (2010), *Children's fractional knowledge*, Nueva York, Springer.

Steffe, L. P. y P. W. Thompson (2000), "Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements", en A. Kelly y A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 267-307.

Stephan, M., J. Bowers, P. Cobb y K. Gravemeijer (eds.) (2003), *Supporting Students' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in Social Context*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*, Dordrecht, Kluwer.

Thompson, P. W. y L. A. Saldanha (2003), "Fractions and multiplicative reasoning", en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Tzur, R. (2007), "Fine grain assessment of students' mathematical understanding: Participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical conception", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 66, pp. 273-291.

DATOS DEL AUTOR

José Luis Cortina
Universidad Pedagógica Nacional, México
jose.luis.cortina@mac.com