

La noción de *relaciones entre cálculos* y la *producción de explicaciones en la clase de matemática* como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes

The notion of *relationships among calculations* and the *production of explanations in maths class* as teaching objects. Their configuration within a collaborative work between researchers and teachers

Patricia Sadovsky, María Emilia Quaranta, Horacio Itzcovich,
María Mónica Becerril, Patricia García

Resumen: Este estudio da cuenta del proceso a través del cual, en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes, se configuran dos objetos de enseñanza de la escuela primaria: la práctica de *apelar a relaciones entre cálculos para obtener resultados* y la de elaborar *explicaciones en la clase de matemática*. Intentamos mostrar vínculos entre la configuración de estos objetos –el análisis de su sentido y de condiciones favorables para su funcionamiento en el aula– y la construcción colectiva de una intencionalidad didáctica. Esta investigación se inscribe en un proyecto más amplio orientado a conocer el tipo de producción matemático-didáctica que puede tener lugar cuando un grupo de investigadores concurre periódicamente a una escuela para trabajar con maestros y directivos con el objetivo de pensar colaborativamente cuestiones de enseñanza de la matemática.

Palabras clave: trabajo colaborativo, análisis de las prácticas de la enseñanza, formación docente, explicaciones en la clase de matemática, relaciones entre cálculos.

Abstract: This study accounts for the process through which, in the context of a collaborative work between researchers and teachers, two primary school teaching objects arise: the

Fecha de recepción: 23 de septiembre de 2014; fecha de aceptación: 17 de febrero de 2015.

practice of *appealing to relations among calculations to get results and the production of explanations in mathematics class*. We try to show links between the configuration of these objects –the analysis of its meaning and possible conditions for them to arise at a math class– and the collective construction of a didactic intent. This research belongs to a larger project aimed at understanding the type of mathematical and didactic production which could be obtained when a group of researchers attends regularly a school to work with teachers and heads in order to think jointly about mathematics education issues.

Résumé: Cette étude décrit le processus de mise en place, dans le cadre d'un travail de collaboration entre chercheurs et enseignants, de deux objets d'enseignement de la école primaire: la pratique de faire appel à des relations entre les calculs pour arriver à une solution numérique et celle d'élaborer des explications en classe de mathématiques. Nous essayons de montrer les liens entre la configuration de ces nouveaux objets –l'analyse de leur sens et des contraintes favorables à leur fonctionnement dans la classe– et la construction collective d'une intentionnalité didactique. Cette recherche s'inscrit au sein d'un projet plus vaste visant à étudier le type de production mathématique-didactique qui peut surgir quand un groupe de chercheurs se rend régulièrement dans une école pour travailler avec des enseignants et directeurs en vue de penser collectivement les questions d'enseignement des mathématiques.

Keywords: collaborative work, analysis of the mathematics teaching practices, explanations in math class, relationships between calculations.

Mots-clés: travail collaboratif, l'analyse des pratiques d'enseignement, des explications dans la classe des mathématiques, des relations entre des calculs.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este artículo comparte resultados de una indagación –en curso– ubicada en el marco de las investigaciones en didáctica de las matemáticas dirigidas al análisis de las prácticas de enseñanza en espacios de trabajo colaborativo.¹ Nuestro objeto de estudio son los procesos de producción matemático-didáctica que pueden

¹ *Producción matemático-didáctica en el marco de un trabajo colaborativo entre maestros, directivos e investigadores en didáctica*. Equipo de investigación: Patricia Sadovsky (directora), María Emilia Quaranta, Horacio Itzcovich, María Mónica Beceril, Patricia García. Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires. UNIPE. Subsidio FONCyT, Proyecto PICT-O número 2012-0050, 2013-2014. Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación productiva. Este proyecto es continuación de uno anterior inscripto en una de las líneas de investigación de la Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires, *Análisis de las prácticas y producción de conocimiento didáctico-disciplinar*.

tener lugar cuando un grupo de maestros y directivos de una misma escuela trabaja en colaboración con investigadores para problematizar la enseñanza y producir, implementar y analizar de manera conjunta propuestas para explorar en el aula respuestas posibles a los problemas identificados. Se trata de conocer mejor el funcionamiento de un espacio de trabajo conjunto, en el cual se toman como punto de partida problemas reconocidos por los mismos docentes y se discuten en diálogo con las exigencias curriculares e institucionales, con la propia experiencia y con la producción didáctica y pedagógica.

1.2 REFERENCIAS TEÓRICAS

Analizar las prácticas en un proceso de colaboración entre docentes e investigadores supone, para estos últimos, reconocer el saber de los docentes para enfrentar la enseñanza que será objeto de análisis en la colaboración, asumir que los maestros tienen razones para actuar como lo hacen, considerar los condicionamientos que moldean las prácticas docentes –que muchas veces rebasan los objetivos de aprendizaje de los alumnos que todo docente tiene–, ser conscientes de los desajustes de ciertas producciones del campo de la didáctica con relación a la viabilidad de su funcionamiento en el sistema. Supone, asimismo, una ruptura tanto con el lugar de *práctico* que el docente tiene otorgado en la cultura, como con la posición de prestigio y autoridad que se suele atribuir a los investigadores. Esta ruptura es condición –creemos– para dar lugar a un reconocimiento genuino de lo que cada actor tiene para aportar. Tomamos de Sensevy (2011) la idea según la cual, para instalar la colaboración, es necesario construir una simetría que se basa en la elaboración compartida de razones en el marco de los trabajos que se realicen, antes que en la negación de las diferencias. Este *juego de razones* sería, según el autor, un modo de superar una división de trabajo secular basado en los dilemas teoría-práctica, fines-medios: la teoría y los fines para los investigadores, la práctica y los medios para los docentes.

Consideramos que la aproximación colaborativa a los problemas de enseñanza es imprescindible, sobre todo si pensamos que la exploración de esos problemas en el sistema real requerirá de estrategias de intervención que los mismos docentes deberán sostener en la acción (Desgagné, Bednarz, Lebuis y Poirier, 2001; Roditi, 2011; Fiorentini, 2004). Desde esta perspectiva, se subraya el papel del docente en tanto productor de conocimiento a partir del análisis de sus prácticas.

Las prácticas de enseñanza se inscriben en un entramado de restricciones que plantea la institución escolar. En ese sentido, constituyen respuestas, a modo de adaptaciones/equilibrios posibles, a las diversas situaciones que enfrentan los maestros (Robert y Rogalski, 2002; Robert, 2004; Robert y Vanderbrouk, 2003). El análisis colectivo sobre las propias prácticas promueve una ampliación de ese espacio de decisiones al permitir concebir nuevos posibles y bucear en la construcción de fundamentos para ellas (Robert, Roditi y Grugeon, 2007; Roditi, 2011; Charles-Pézar, Butlen y Masselot, 2012).

1.3 CUESTIONES METODOLÓGICAS

El proyecto consiste en un estudio de casos que se desarrolla en dos escuelas desde el año 2012. En ese momento, la selección de las escuelas fue realizada junto con las inspectoras regionales y distritales² con quienes, además de discutir el proyecto, acordamos las condiciones institucionales en las que se insertaría este trabajo: recibir alumnos pertenecientes a los llamados sectores populares, contar con un equipo directivo orientado a la promoción de la reflexión colectiva sobre la enseñanza por parte de los docentes y tener disposición para generar y sostener espacios de encuentros sistemáticos.

En este artículo comunicamos resultados del trabajo de producción que tuvo lugar en la Escuela 11 de Cardales, Exaltación de la Cruz, Provincia de Buenos Aires, a lo largo de 2013. En este espacio participaron voluntariamente las directoras, un grupo de docentes³ y dos investigadores⁴ de nuestro equipo que se reunían quincenalmente en la escuela en horario escolar.⁵

El grupo se organizó sobre la base de la discusión de problemas identificados por los docentes, la construcción de modos posibles de explorarlos en las aulas y el análisis de materiales recolectados por los maestros en tales intentos. La producción de ideas que tiene lugar a raíz de los intercambios del grupo –nuestro

² Acompañando los objetivos de extensión de la UNIPE, las escuelas han sido elegidas en regiones cercanas a sedes de la Universidad. El presente proyecto se sostiene en acuerdos institucionales establecidos entre la UNIPE y el sistema educativo provincial.

³ Agradecemos al equipo de conducción integrado por Nora y Silvia y a los docentes Adriana, Ariel, Claudia, Elsa, Karina y Mónica por su generosidad, su apertura e involucramiento en la producción intelectual que tuvo lugar en el grupo de trabajo.

⁴ María Mónica Becerril y Horacio Itzcovich

⁵ Se desarrollaron un total de diez reuniones a lo largo del año.

objeto de indagación– va configurando, dialéctica y progresivamente, un proceso de problematización de la enseñanza y un marco para estudiarla.

Las reuniones se analizaron a través de los registros confeccionados a partir de grabaciones y notas de los investigadores, compartidos también con los docentes. Sobre la base de este material y de un primer análisis, se elaboraron síntesis de cada encuentro cuya lectura y discusión jalonaron el inicio de la reunión siguiente. Estas últimas incluyeron elementos interpretativos que el equipo de investigación puso a consideración en el grupo de trabajo colaborativo. Es un procedimiento que habilita la posibilidad de retomar las discusiones introduciendo nuevos elementos que van constituyendo un marco compartido de trabajo (Becerril, García, Itzcovich, Quaranta y Sadovsky, en prensa).

Los investigadores, como coordinadores de las reuniones, apelamos de manera sistemática a que los maestros expresaran sus expectativas respecto de los problemas de enseñanza que se analizaban para tomarlas como base de los procesos de problematización, alentamos una visión de la enseñanza en términos de recorridos de largo plazo, retomamos los planteos que se iban haciendo, trajimos las voces de los participantes en reuniones, ya ocurridas, cuando interpretábamos que lo que se discutía tenía relación con alguna intervención anterior. De alguna manera nos propusimos como sostenedores de la memoria del grupo. Las discusiones en cada encuentro dejaban cuestiones planteadas a partir de las cuales los maestros decidían hacer algún trabajo en las aulas, recogían las producciones de los alumnos y las llevaban al encuentro siguiente. Poco a poco se fue instalando una dinámica en la que las reuniones se estructuraban sobre la base del análisis de las producciones de los niños y el relato de las clases que hacían los maestros. Fuimos permeables a esa modalidad que operaba un cambio respecto del año anterior en el cual el trabajo del aula –que también se hacía con la intención de profundizar la exploración del asunto que se estaba tratando– se planificaba en el espacio colaborativo. Considerar el análisis de las producciones de los alumnos como una actividad principal del grupo nos exigió producir en terreno junto con los maestros y directivos interpretaciones de las ideas que subyacían a los procedimientos de los niños. Esto jugó a favor de la construcción de un clima de confianza en el que juntos nos involucramos en una tarea desafiante y original.

2. LA DISPONIBILIDAD DE CÁLCULO DE LOS ALUMNOS COMO PROBLEMA A ESTUDIAR

La disponibilidad de los chicos con relación al cálculo sigue siendo una preocupación para los maestros de la Escuela 11 de Cardales al iniciar el trabajo del año 2013. El abandono de las –cada vez más desprestigiadas– rutinas ligadas al recitado (de tablas) y la repetición (de cuentas) parece haber provocado un vacío didáctico. Los maestros, en tanto colectivo, no manifiestan haber construido un proyecto que los satisfaga en cuanto a los logros de sus alumnos en el terreno de los algoritmos vinculados a las operaciones; *saber de memoria* y *saber razonar* se mencionan como modalidades cuya coordinación no se logra establecer.

Durante el año 2012 habíamos reconocido la necesidad de discutir con los docentes sobre la idea de *puentes* entre las estrategias que elaboran los chicos y los procedimientos habituales de cálculo (Becerril *et al*, en prensa). Desde nuestro punto de vista, la construcción de estos puentes requiere un trabajo en el aula que permita desentrañar con los alumnos las relaciones matemáticas implicadas en sus estrategias, así como también hacer visibles las que sustentan los procedimientos más convencionales. Orientados por ese resultado general nos propusimos instalar la pregunta por los posibles recorridos que articulen los diferentes recursos de cálculo.

Empezar a discutir la matemática implicada en algunas reglas que se usan habitualmente, y preguntarnos por las relaciones entre las estrategias personales de los niños y los algoritmos convencionales, fue el comienzo de un proceso de problematización –sostenido a lo largo de todo el año– cuyo rasgo fundamental fue el de empezar a imaginar, explorar y construir un diálogo con los alumnos a raíz de sus posibles propuestas.

Al analizar en el espacio colaborativo algunas reglas que los maestros enseñan (como por ejemplo *al dividir un número por 100 las dos últimas cifras forman el resto y las cifras que quedan “arman” el cociente*) se pone de manifiesto que muchos docentes proponen una justificación que no logra explicar la regla (por ejemplo, *se toman las dos últimas cifras porque el cien tiene dos ceros*). Nosotros (los integrantes del equipo de investigación) proponemos discutir sobre el valor explicativo de las justificaciones y convocamos a encontrar argumentos basados en los significados de los números y las operaciones en juego y no sólo en los significantes (McClain y Cobb, 2001). Se establece la diferencia entre enunciar una regla y fundamentarla a través del reconocimiento y transformación de las relaciones implicadas; los docentes toman conciencia de que se trata

de fundamentaciones accesibles para ellos. Esta accesibilidad –interpretamos– tiene un impacto importante en los maestros que parecen pensar que algo potente que desconocían estaba a su alcance –y al de sus alumnos mediante un trabajo de enseñanza–. Entendemos que la sensación de algo posible y potente motoriza al grupo.

Internarse paulatinamente en el análisis de algunas estrategias de los niños fue –lo mencionamos– otra fuente importante de problematización. ¿Qué cosas *sabe el chico para hacer esto?* fue una pregunta planteada por los investigadores que organizaba las discusiones frente al desafío de interpretar procedimientos de los alumnos. En esos intercambios, algunos maestros desestimaban que se estuviera usando un saber interesante, otros se preguntaban cómo harían los chicos para elaborar esas estrategias y otros lograban conceptualizarlas en términos de relaciones matemáticas. Al analizar casos concretos surgían diferencias en las interpretaciones de los maestros que parecían tener posiciones más homogéneas cuando se hablaba en general. Estas diferencias resultaron productivas para poner de manifiesto el carácter interpretativo del análisis de las elaboraciones de los niños.

Frente a dos estrategias diferentes, que ponen en juego distintos niños en una clase, una maestra comenta que autoriza ambas *porque –argumenta– dan el mismo resultado*. Se señala que se trata de un control de tipo externo y se contrasta esto con la posibilidad de transformar las relaciones implicadas en los procedimientos para establecer su equivalencia (control interno).

En este contexto, se liga la elaboración de procedimientos para las operaciones con las relaciones que se pueden establecer al descomponer números en función de la estructura de nuestro sistema de numeración. Este vínculo no parece estar constituido para algunos maestros que, al concebir la enseñanza del sistema de numeración como un primer capítulo de un programa, no ven la oportunidad de profundizar sobre su organización que ofrece el tratamiento de las operaciones. Otros, en cambio, recuperan el trabajo del año anterior en el espacio colaborativo y señalan que la búsqueda de fundamentos a las cuestiones matemáticas constituyó una vía para superar la fragmentación de los temas.

En síntesis, la búsqueda de explicaciones para varias de las reglas que los maestros enseñan, así como el análisis en términos de relaciones matemáticas de las estrategias que se fueron proponiendo, empezó a hacer visible, en el espacio, que dichas relaciones constituyen una *materia prima* para que el docente pueda entablar un diálogo con sus alumnos. Aunque esto se irá configurando a lo largo de las reuniones, nos interesa adelantar como resultado el valor del análisis

matemático de los procedimientos como generador de explicaciones y, simultáneamente, como herramienta de intercambio con los niños.

Se abre así un camino de exploración que impulsa a los maestros a buscar en sus aulas procedimientos aritméticos de los alumnos a raíz de las propuestas que realizan para llevarlos como insumos al espacio colaborativo. El análisis de estas producciones va dando lugar a la elaboración de asuntos matemáticos de enseñanza que son nuevos para estos maestros y a la vez presentan nuevas exigencias para su trabajo. Es así como emerge la necesidad de promover en las aulas que los niños establezcan relaciones explícitas entre diferentes cálculos para que unos funcionen como punto de apoyo para la resolución de otros (apartado 3). Asimismo se va apreciando cada vez más el valor de alentar la elaboración de explicaciones por parte de los alumnos (apartado 4). Planteamos a modo de conclusión algunas cuestiones que retenemos de este trabajo, y que sugieren modos de continuar explorando este camino, el de producir sentidos al pensar con otros (apartado 5).

3. LA CONFIGURACIÓN DE RELACIONES ENTRE CÁLCULOS COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

La tensión entre dar lugar a las elaboraciones de los niños y lograr que se apropien de lo socialmente establecido aflora permanentemente en las discusiones. Los docentes parecen considerar que a lo largo del primer ciclo los niños despliegan una variedad de recursos que deberían ser “superados” al recorrer el segundo ciclo de la escolaridad. Sin embargo, se preocupan al constatar que son unos cuantos los alumnos que al llegar a 6º grado continúan utilizando recursos similares a los que fueron elaborados en el primer ciclo. Expresan la necesidad de que los chicos dominen los algoritmos convencionales y al mismo tiempo manifiestan la intención de que los nuevos recursos preserven un alto nivel de comprensión. Una encrucijada parece atravesarlos: que los chicos resuelvan “como puedan” pero que sepan las cuentas convencionales. En el debate de esta cuestión surge una segunda tensión, entre comprensión y velocidad. Efectivamente, los maestros plantean que el despliegue de recursos propios –si lleva tiempo– va en desmedro de la posibilidad de insertarse con éxito en la escuela secundaria. Una vez más, la presión de las instituciones se entrama con el posicionamiento didáctico de los maestros condicionando sus decisiones (Robert, 2003).

En este contexto se empieza a plantear de qué manera se “arma” la disponibilidad de los niños:

Directora N: Yo creo que hay un montón de cosas dentro de las tablas de multiplicar, (...) como la del 5, que sabemos que son los números terminados en 5 y en 0, con las que el chico puede adquirir cierta velocidad, razonándolas y encontrando la manera de llegar al resultado a partir de un punto de apoyo. (I encuentro)

Esta idea de apelar a las relaciones para disponer de los resultados empieza a emerger, en principio, para abordar el problema de la memoria; como iremos viendo, poco a poco este primer objetivo se va enriqueciendo y las discusiones permiten ir instalando que esta *misma práctica*⁶ lleva a producir o a recuperar relaciones aritméticas relevantes que fortalecen el sentido de lo numérico.

Estos debates impulsan a los docentes a ensayar con sus alumnos diferentes actividades, cuyo análisis junto con el de las producciones de sus chicos, ingresan en la mesa de trabajo y estructuran las discusiones que organizamos en los siguientes párrafos.

3.1 LA CONSTRUCCIÓN DE LA INTENCIONALIDAD DIDÁCTICA EN EL MARCO DEL ANÁLISIS DE LAS TAREAS Y DE LAS PRODUCCIONES INFANTILES

El análisis de las tareas que los maestros van proponiendo se ve enriquecido por la consideración de las estrategias que los niños ponen en juego para resolverlas. Efectivamente, a lo largo de las discusiones, el contacto con lo que los chicos hacen permite apreciar potencialidades que no necesariamente fueron identificadas originalmente. La dialéctica *análisis de la tarea – análisis de las producciones infantiles* configura en el espacio nuevos sentidos que permiten a los maestros ampliar la intencionalidad que inicialmente habían atribuido a la tarea. Asimismo se hace visible la complejidad del trabajo interpretativo toda vez que se pone de manifiesto que los maestros ofrecen distintas miradas para una misma producción. Ambos asuntos –construcción de una intención y naturaleza de la tarea interpretativa– constituyen una producción del espacio colaborativo. A continuación, nos referiremos a ellos basándonos en algunos ejemplos.

⁶ En tanto se modifica el sentido, no es estrictamente la misma práctica.

En la segunda reunión, una de las maestras comparte la propuesta que realizó en su aula.

Maestra M: Porque el problema era encontrar cinco multiplicaciones de tres números que siempre den 48. No valía usar el 1 ni cambiarlos...no hacer la conmutativa, usar números distintos o al menos repetir uno solo. (II encuentro)

Se reflexiona sobre la posibilidad de establecer con los chicos relaciones entre distintos cálculos que den 48 –por ejemplo, $6 \times 2 \times 4$ y $3 \times 4 \times 4$. Esta actividad exige –por lo menos en potencia– que se consideren los factores de las correspondientes expresiones y se investigue cuáles son las *compensaciones* que conservan el resultado. En ese contexto, se reconoce la diferencia entre ensayar desde cero cada vez para obtener una multiplicación y arribar a la solución a partir de la transformación de los factores. En esta última opción, se hace necesario concebir el número como un producto y poner en juego un abanico de relaciones posibles (por ejemplo, duplicar un factor y dividir otro entre 2). La maestra relata entonces que una sola nena se apoya en un cálculo para obtener otro. Más allá de lo efectivamente sucedido en esa ocasión en el aula de la maestra, el episodio hace posible analizar que un mismo enunciado puede dar lugar a actividades con diferente grado de complejidad y que su despliegue depende, en parte, de la potencialidad que el maestro le haya podido atribuir al considerarlas para su proyecto. La idea de concebir como objeto de enseñanza la práctica de apoyarse en un cálculo para obtener otro, a partir de transformaciones aritméticas, se fortalece con esta discusión.

La maestra aporta un segundo ejemplo –probablemente influida por la discusión anterior– donde apela más explícitamente a la realización de transformaciones de un cálculo conservando el resultado. A medida que se analizan las respuestas de un niño a raíz de esta situación, otros docentes comienzan a reconocer que sus alumnos apelan a estrategias similares. Es así como una maestra, a la luz de un problema en el cual los niños debían armar de diferentes maneras una misma cantidad de dinero con *billetes* de distintos valores, reconoce que los niños arman primero una cantidad y después, tomando esa cantidad inicial como referencia, van haciendo cambios de billetes de manera de conservarla. El análisis realizado, a raíz del problema que trajo su colega, le permite atribuir una nueva significación a una práctica que despliegan sus alumnos a la cual, probablemente, hasta este momento no le había otorgado el valor que le asigna después de la discusión. Es decir, el espacio de trabajo habilita a que cada docente

resignifique sus prácticas al participar de los análisis que se hacen sobre el trabajo de sus compañeros.

En relación con la naturaleza del trabajo interpretativo, resulta novedoso –e impactante– para los maestros que se pongan sobre la mesa diferentes interpretaciones para una misma producción. Veamos un ejemplo:

Investigador: O sea, la lógica de la actividad es la siguiente. Sabiendo que $30 - 20$ es 10, ¿cómo hago para encontrar 30 menos 19, 30 menos 18; 30 menos 17; 30 menos 21...? Y para el primero esta alumna pone como resultado 9. Tratemos de identificar primero qué está pensando esta nena para poner ahí un 9, ¿de dónde sacará el 9? ¿Pudimos hablar un poco con ella?

Maestra C: Sí, según ella 30 menos 19 es 9; ella intentó a este 19 agregarle para que le dé 30, eso es lo que hizo ella...

Investigador: Pero después escribe “30 menos 18, 8” y “30 menos 17, 7”...

Maestra M: Tuvo presente que iba disminuyendo el número...

Maestra C: ¿Qué? Como este bajaba, ¿también tenía que bajar?...

Investigadora: Otra posibilidad puede ser que, cuando ella lo hizo, identificó que el resultado era el mismo número que las unidades, entonces podríamos pensar que repite esa regularidad. Ahí ella está intentando buscar o agarrarse de algo que sucede... **no sabemos bien cuál es.**

La existencia de diferentes interpretaciones pone de manifiesto la necesidad de interactuar con los alumnos para conocer las relaciones que subyacen a los elementos “visibles” de su producción (orales o escritos). Entender lo que los niños producen se transforma en una nueva exigencia para el trabajo del docente, quien deberá orientar sus intervenciones tratando de coordinar la perspectiva de los alumnos con las ideas que quiere enseñar. Se subraya de esta manera el carácter orgánicamente interactivo de la acción docente (Sensevy y Mercier, 2007), sobre todo si se asume la postura de incluir con carácter de conocimiento los aportes genuinos de los niños.

3.2 EL ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS: UNA VÍA PARA CONCEBIR LAS RELACIONES ENTRE CÁLCULOS COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

La interpretación de las producciones de los alumnos recogidas en las aulas y que los docentes aportan al espacio colaborativo fue adquiriendo, a lo largo de

los encuentros, distintos sentidos y valor. La tarea en un principio se centró en intentar “entender” lo que los alumnos hacen, lo cual en sí mismo dio lugar a una intensa actividad de reconstrucción del trabajo intelectual de los niños. La complejidad de las relaciones matemáticas utilizadas, en algunos casos, sorprende a los maestros y les permite tomar contacto con las implicancias de concebir una práctica de este tipo con toda la clase.⁷

Veamos, por ejemplo, el diálogo que tiene lugar a partir de la producción de un alumno (figura 1) frente a la propuesta de encontrar cuánto hay que restarle a 1000 para llegar a 273.

Maestro Ar: Armó el 1000 por este lado, el 200 acá, y de estos 100 sacó los 73

Investigador: Y le quedaron los 27...

Maestro Ar: Y después sumó lo que le iba quedando.....

Investigador: A ver...400, 300...

Directora N: Hizo así, 400, 300, 200, 100...sumó 1000. El 400 lo deja igual, el 300 lo deja igual...y el 200 como es 273, le saca los 200 o sea que no los considera, y del 100, saca 73... (II encuentro)

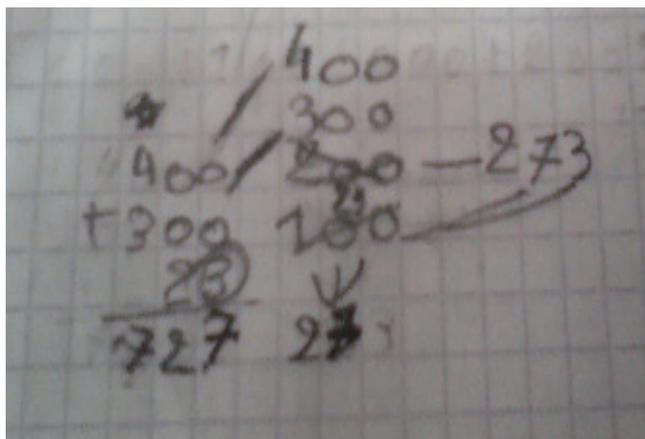


Figura 1

⁷ Si bien queremos subrayar aquí el impacto en los docentes del análisis de una producción infantil original, toda esta discusión también permite avanzar en la configuración de nuevas intenciones didácticas con relación al trabajo sobre las producciones infantiles, en el mismo sentido que analizamos en el párrafo anterior.

Todos los integrantes nos involucramos en la interpretación de un procedimiento tan original. Se nos hace claro el trabajo de reconstrucción que requiere formular hipótesis sobre el razonamiento del niño a partir de la traza de sus cálculos. Reconocemos en primer lugar que el alumno advierte que, aunque el problema no cuestiona, explícitamente, cuánto es 1000 menos 273, este cálculo resuelve el problema. Para poner en evidencia las relaciones que parece movilizar, apelemos a expresiones algebraicas:

el problema que se le plantea es $1000 - x = 273$;
para eso el niño descompone el 1000 en $273 + x$
y luego “quita” a 1000 el 273 para obtener x es decir, hace $1000 - 273 = x$.

Podríamos suponer que, de alguna manera, el niño está jugando con la equivalencia entre las siguientes relaciones:

$$1000 = 273 + x; 1000 - x = 273 \text{ y } 1000 - 273 = x.$$

Al mirar sus anotaciones, interpretamos que reemplaza el cálculo $1000 - 273$ por $(400 + 300 + 200 + 100) - 273$ y que piensa el 273 como $200 + 73$, recién ahí “tacha” el 200 y le resta 73 a 100, finalmente compone el resultado con el 27 de esta última resta y con el 400 y el 300 que no han sido afectados por su operación. Las flechas que vemos en la foto son consistentes con esta interpretación. La elaboración del niño entusiasma al grupo.

¿Cómo ubicamos esta producción en el contexto de lo que se viene discutiendo? La estrategia de este niño supone, también –como en los ejemplos referidos en el párrafo anterior–, transformar el cálculo para hacerlo posible. Pero el grado de elaboración que tiene hace visible que su autor ha tenido un alto nivel de anticipación y de toma de decisiones. El ejemplo es referenciado en lo que queda de esa reunión varias veces para analizar otros casos, lo cual nos lleva a interpretar que este caso “difícil” ilumina los análisis –las anticipaciones y decisiones involucradas– de otros que se ven más sencillos.

Los distintos ejemplos trabajados en la reunión, reorganizados ahora a partir de éste, que resulta más destacado, alimentan la idea de que una práctica basada en el análisis y transformación de los cálculos es viable e interesante por tres razones fundamentales: porque puede ser proyectada por los docentes, porque los niños pueden enfrentar los problemas y porque es posible imaginar interacciones a raíz de sus resoluciones.

3.3 LAS RELACIONES ENTRE CÁLCULOS COMO VÍA PARA EXPLORAR “LA RESTA” COMO PROBLEMA DE ENSEÑANZA

Los maestros proponen trabajar específicamente sobre estrategias para restar, dado que les preocupa el desempeño de los alumnos al respecto. Frente a este planteo, los investigadores retomamos la idea de relaciones entre cálculos para explorar este problema y lo hacemos con la intención de ampliar el universo de relaciones vinculadas a la resta, sin abordar de entrada un trabajo con el algoritmo convencional. Nuestra intención era expandir la base relacional de los alumnos respecto de la resta bajo el supuesto de que esto los posicionaría mejor para controlar en un segundo momento los cálculos convencionales. Así, las relaciones entre cálculos, de ser un recurso que algunos niños utilizan por propia iniciativa, se transforman en un recurso para la enseñanza, como veremos a continuación.

Se elaboran en el grupo problemas en los cuales los chicos tienen que resolver varios cálculos ligados por alguna regularidad. La idea es que se puedan apoyar en la realización de algunos que les resultan más “fáciles” para inferir los resultados de otros, sin necesidad de hacer todas las “cuentas”. Por ejemplo, $56 - 23$; $56 - 24$; $56 - 25$; $56 - 26$; $56 - 27$; $56 - 28$; $56 - 29$. Un maestro se entusiasma con la posibilidad de ofrecer varios cálculos juntos para que unos actúen como punto de apoyo de otros:

Maestro Ar: Yo creo que si les damos los cálculos juntos vamos a tener más posibilidades de que ellos expliquen qué relaciones hay (...) Van a poder explicar mejor si ven los cálculos juntos. (II encuentro)

La regularidad entre estas cuentas apunta a que se reconozca y se movilice la relación “uno más en el sustraendo, uno menos en la diferencia” para anticipar los resultados. Esta idea, según la cual se puede acceder al resultado sin hacer la cuenta, resulta nueva en el grupo y su reconocimiento genera inquietud y expectativas para explorar su funcionamiento en las aulas.

Maestro Ar: Yo quiero trabajar eso, la relación entre los cálculos... ese problema quiero ver, si usan el que saben hacer para el otro. ¿Con qué salen? Y a partir de ahí empezar a trabajar.

Podemos señalar dos cuestiones que emergen de este análisis a los ojos de los docentes: la relevancia de considerar como objeto de enseñanza la práctica de *apoyarme en lo que sé para resolver lo que no sé* y, en íntima relación con lo anterior, el establecimiento de esas relaciones entre cálculos como insumo para el control de las cuentas. Es decir, la identificación del poder anticipatorio de una relación y su valor como herramienta de control de las producciones.

El mismo maestro recién citado trae la producción de una alumna que permite inferir que toma en cuenta esta regularidad para su resolución. Efectivamente, el docente propuso la siguiente serie de cálculos: $56 - 23$, $56 - 24$, $56 - 25$, $56 - 26$, $56 - 27$, $56 - 29$. Notemos que se “saltea” el $56 - 28$. Esta niña incluye ella misma este último cálculo y escribe: *le resto uno menos y me da uno más*. A raíz de esto, en el grupo de docentes, se señala

Directora N: En éste, Ariel no les da el 56 menos 28, salta al menos 29, y ella [refiriéndose a la alumna] hace menos 28, aunque no estaba y dice: ***la hice para estar segura que seguía así***. Y agrega *le resto uno menos y me da uno más*, imirá! (IV encuentro)

Aunque no queda claro cómo está considerando la alumna la regularidad –para ello hubiera sido necesario interactuar con ella, cuestión que se tematiza luego en el grupo–, sí podemos interpretar que “algo” le decían esos resultados serios y que necesitó introducir “el que faltaba” para verificar la continuidad que había detectado. En otros términos, la alumna capta la regularidad y le otorga un sentido anticipatorio que necesita confirmar de alguna manera. El ejemplo resulta interesante por dos razones: la posición de autonomía que la acción de la niña pone de manifiesto lleva a hipotetizar sobre posibles relaciones entre el tipo de tarea que se propone y la actividad intelectual que habilita al menos potencialmente y confirma la existencia de una “sintonía” entre la intención con la que se incluyó la regularidad y el uso que la niña hace de la misma. Esta última cuestión resulta muy significativa –y muy gratificante– para los maestros que no tienen muchas oportunidades de tomar contacto con los lazos que se entablan entre las intenciones que imprimen a sus propuestas y las interpretaciones que los niños hacen de las mismas.

Las ideas discutidas con respecto al valor didáctico de las relaciones entre cálculos comienzan a reconocerse como insumos para gestionar ayudas a los niños por parte de los docentes.

Directora N: Claro, ayudarlos a ver que ya tienen un resultado y ver si pueden usarlo para buscar el otro, esa es la ayuda. (II encuentro).

Los maestros, en esas ayudas, hacen explícitas las relaciones y las transformaciones a las cuales se recurre y el aula se nutre de nuevas relaciones que ayudan a controlar los resultados. En síntesis, la tematización de las relaciones entre cálculos llega al espacio a partir de interpretar las estrategias de los chicos, se transforma en objeto de enseñanza y luego en estrategia de intervención para ayudarlos a avanzar.

Vale la pena destacar que aquello que se elabora en el espacio colaborativo es un *tipo de problema y ciertas condiciones* que se transforman en un referente sobre la base del cual cada docente reconstruye la actividad que propondrá a sus alumnos. Este señalamiento resulta relevante de cara a nuestro proyecto en tanto permite precisar la diferencia entre *elaborar fundamentos para las situaciones de enseñanza y construir guiones a recorrer más o menos textualmente*.

4. LAS EXPLICACIONES EN LA CLASE COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

La cuestión de considerar la producción de explicaciones como asunto de enseñanza, *nace* en las discusiones del grupo, ligada a la necesidad de comprender las relaciones que hacen posible las transformaciones para encontrar los resultados de los cálculos. Las discusiones a raíz de los análisis de los materiales del aula que aportan los maestros, delimitan la potencia, desde el punto de vista de la comprensión, que tiene tanto para los alumnos como para los docentes la producción de explicaciones en la clase. Esto se desarrolla en el apartado 4.1.

A lo largo de las discusiones en el grupo, basadas en los análisis de episodios de las clases, se va reconociendo que la elaboración de explicaciones por parte de los chicos está estrechamente relacionada con las intervenciones que hace el docente orientadas por una cierta intención. Es así como se van identificando un conjunto de condiciones que, en principio, favorecerían la producción de explicaciones por parte de los alumnos, así como su evolución en cuanto a la complejidad, nivel explicativo y elaboración que tienen. Estas consideraciones se tratan en el apartado 4.2.

La caracterización de aquello que constituye una explicación satisfactoria es inicialmente diversa para distintos maestros: por una parte, valoran de modo diferente algunas formulaciones que proponen los alumnos; por otra, ellos mismos

proponen explicaciones de diferente tipo cuando se analizan algunos problemas en el grupo colaborativo. La confrontación entre diferentes explicaciones da lugar a diferenciar entre *descripción* –entendida básicamente como enumeración de pasos que se siguen para realizar una tarea– y *explicación* –que se interpreta como encadenamiento deductivo de propiedades que dan cuenta de la condición necesaria de una relación (Lerner, 2012; Sadovsky, 2010). Esta distinción se reconoce también en algunas producciones de los niños y éstas se ligan al trabajo realizado en las clases. El proceso de emergencia de esta distinción como así también su consideración como idea didáctica constituyen el objeto del apartado 4.3

4.1 LA PRODUCCIÓN DE SENTIDOS PARA LAS EXPLICACIONES EN EL MARCO DE LAS DISCUSIONES DEL GRUPO COLABORATIVO

A lo largo de los encuentros se van configurando en el grupo distintos sentidos para la producción de explicaciones, por parte de los niños en la clase. Desde el punto de vista de los alumnos, se analiza que: amplía su comprensión, profundiza la confianza en sus posibilidades y contribuye a conquistar una posición de autonomía (apartado 4.1.1). Desde la perspectiva de los maestros: habilita un modo de acceder a las ideas que sustentan las estrategias de sus chicos, permite tomar contacto con relaciones que no habían propuesto a los niños y ofrece elementos para gestionar las interacciones en la clase tomando en cuenta las relaciones concebidas por los alumnos (apartado 4.1.2). Consideramos que estas elaboraciones se inscriben en la producción de conocimiento matemático-didáctico, objeto de nuestra investigación.

4.1.1 Los sentidos de la elaboración de explicaciones en la clase desde la perspectiva de los alumnos

a) Explicaciones y comprensión

Los docentes empiezan a tomar conciencia de que la producción de explicaciones permite a los chicos comprender mejor el asunto que están tratando, toda vez que se ven exigidos a elaborar fundamentos para lo que proponen y para ello explicitan las relaciones que subyacen a sus estrategias.

Maestro Ar: Yo les di la posibilidad de que me expliquen, y a partir de lo que me explican ellos aparece el por qué... van a tener que debatir y convencerse. (IV encuentro)

b) Explicaciones y confianza

No habíamos pensado nunca que la producción de explicaciones puede llegar a ser para un niño una oportunidad de ganar confianza, porque le permite mostrar cómo pensó, es una ocasión de hacerse entender, de autorizarse a hacer, porque su producción se va a completar con lo que pueda decir, aunque no lo haya podido escribir. Fue la directora de la escuela –desde una posición atenta y cercana a las vivencias de los chicos– la que lo subraya de este modo:

Directora N: Yo creo que el hecho de que puedan explicar, los hace sentir cómodos en decir *bueno, lo voy a hacer, total puedo explicar cómo lo hice, me van a entender*. (IV encuentro)

A la vez, los niños encuentran en la explicación un espacio de producción original: aunque todos hayan llegado al mismo resultado, no todos tienen la misma explicación y esto da sentido a compartir la tarea.

c) Explicaciones y autonomía

La producción de explicaciones en la clase fue –desde la perspectiva de algunos maestros– fundamental en la posibilidad de que los alumnos logren mayor autonomía y se vayan independizando de la evaluación del docente para confirmar sus resultados (Margolinas, 1993).

Maestro Ar: Esto de que ellos expliquen cómo hicieron las cosas y que lleguen al resultado de una u otra manera, dejó de lado la dependencia de si estaba bien o estaba mal. Ya no preguntan si está bien o está mal. Te llevan la hoja o te comentan desde el banco lo que hicieron.[...] Yo lo que busco es que defiendan su trabajo, al explicarme lo que hicieron, que defiendan lo que están haciendo... (IV encuentro)

Esta última expresión reafirma la estrecha relación entre construcción de autonomía por parte de los niños e intencionalidad didáctica del docente. Las tres dimensiones consideradas (comprensión, confianza y autonomía), lejos de ser independientes, se alimentan unas a otras y nos llevan a establecer un lazo

–su exploración deberá profundizarse– entre producción de explicaciones e inclusión educativa.

4.1.2 Los sentidos de la elaboración de explicaciones en la clase desde la perspectiva de los docentes

a) Las explicaciones de los alumnos como vía para acceder a sus elaboraciones

A lo largo de las discusiones en los encuentros se hace visible que apelar a que los niños expliquen cumple una doble función desde el punto de vista del conocimiento de los docentes. Por un lado, les permite acceder a las relaciones que los niños establecen tanto para asegurarse de que comprenden, como para tomarlas en cuenta al interactuar con ellos.

Por otro lado, pero en el mismo movimiento, los maestros encuentran novedades en tanto acceden a explicaciones que no habían visto anteriormente en los niños:

Maestro Ar: Por ejemplo, me quedo con lo anterior, esa descomposición del número, eso es algo nuevo, nunca lo había visto. La explicación de Leonel. [leyendo la producción de Leonel]: Le saqué 10 números al 56, lo dejé en 46 y los 10 se los puse al 6 y quedan 16, al 16 le saqué 9 que quedó en 7 y al 4 le saqué 2 y queda en 2 y el resultado fue 27. Consideró el 56 como un todo, no el 5... Es una explicación que yo antes no había visto. Porque te dicen lo mismo, pero te dicen *al 5 le saco 1 y estoy pasando 10*. (IV encuentro)

Ampliar el panorama de lo posible para los niños es enriquecedor para el docente: lo fortalece en la confianza de que *abrir el juego* vale la pena y ofrece alternativas posibles de intervención con distintos alumnos.

Se analiza en el espacio que los intercambios que se producen entre los niños y el docente, cuando éste quiere comprender los modos en que los alumnos pensaron, cobran autenticidad. En tanto el docente no conoce de antemano aquello que el alumno tiene para decir y entabla un diálogo en el que retomará las ideas de los chicos. Esto constituye una diferencia importante con una modalidad de intercambio históricamente instalada en la escuela, según la cual el maestro pregunta lo que ya sabe y lo hace para constatar que el niño es capaz de producir una respuesta (Perrenoud, 1990).

b) La anticipación de intercambios en la clase a partir de las explicaciones de los alumnos

El proceso de interpretación de las producciones infantiles que se desarrolla en el grupo de trabajo, va instalando cada vez más la necesidad de que los docentes interactúen con las relaciones que subyacen a las explicaciones que proponen los niños. En este sentido, la interpretación de las explicaciones se transforma en una herramienta para anticipar las interacciones en la clase:

Directora S: Y eso que explican es lo que te permite después poder guiarlos si hay un error, que esa sería nuestra función. (IV encuentro)

Investigadora: Creo que lo que también salió acá es que las explicaciones de los chicos nos permiten saber para dónde tenemos que seguir. Nos ubica mejor en relación con lo que sí pueden y con lo que no. (VI encuentro)

c) Las interacciones entre los niños a raíz de las explicaciones que producen

Varios maestros deciden promover intercambios entre sus alumnos, a raíz de distintas explicaciones que se elaboran en sus clases y traen al grupo las reacciones de los niños. Se establecen entonces lazos entre la dimensión comunicacional de una explicación dirigida, a un otro –que la tiene que entender– y la comprensión en términos de organización de relaciones subyacente a la explicación. Se identifican en estos análisis diferentes *costados* que contribuyen a conceptualizar los vínculos entre comunicación y conceptualización.

Las explicaciones que proponen sus compañeros pueden tener, para algunos niños, un papel clarificador potente; tomar conciencia de esto permite apreciar que el intercambio de explicaciones constituye, para algunos alumnos, una oportunidad para recuperar asuntos que tal vez no pudieron captar en un momento anterior.

Maestra M: Me sucedió que pasaran al pizarrón por grupo y uno me dice *Ah, ya entendí ahora, como lo hizo él, yo lo pude entender porque yo lo buscaba de otra forma y no lo podía resolver*. Entonces la explicación del compañero le resultó más entendible. (V encuentro)

Se reconoce además en el equipo que la circulación de explicaciones en la clase puede enriquecer la perspectiva de todos los chicos –también la de quienes

comprendieron de entrada– ya que se trata de producciones originales y diferentes entre sí.

En varias ocasiones los maestros traen ejemplos en los que la *comunicabilidad* de una explicación se utilizó como *prueba* para aceptarla o intentar mejorarla.

Maestra M: Y les digo, ¿no era que ustedes no entendían esa explicación cortita? Hicimos oralmente la lectura para que vieran que si realmente queríamos que la otra persona que tome la hoja entendiera, teníamos que ir detalladamente. [...]. Cuando volvimos a leer lo que ellos habían puesto les digo: ¿Con cuál de estas explicaciones les parece que otra persona, si toma esta hoja, va a entender más? (VIII encuentro)

Entendemos que la consideración de *otro*, que tiene que entender, actúa sobre la comprensión de la explicación en tanto esta última es analizada en sus detalles, en sus conexiones, en su organización y es modificada en consecuencia.

4.2 IDENTIFICACIÓN DE CONDICIONES PARA LA PRODUCCIÓN DE EXPLICACIONES

Desde el inicio de este proyecto, una preocupación de los maestros se identificaba con la falta de autonomía por parte de los alumnos y el trabajo intencional hacia la producción de explicaciones, poco a poco, se va concibiendo como posible respuesta a este problema.⁸

En el espacio colaborativo, se discuten condiciones –de la tarea, de las interacciones de los maestros con los alumnos– para la emergencia de tales explicaciones, o la transformación de las primeras producciones de los alumnos, en dirección de aquellas que constituyen el horizonte de intenciones de los docentes. En otros términos, esas condiciones se muestran subsidiarias del tipo de explicaciones que desean suscitar los maestros, de la interpretación que hacen de las producciones de los alumnos, de la concepción de recorridos posibles entre esas producciones y las que se busca alcanzar. A la vez, muchas de las ideas que surgen provienen de decisiones que se han tomado *sobre terreno* y cuya identificación, conceptualización y validación abren la posibilidad de una exploración

⁸ Durante el año anterior (2012), el grupo había discutido el tipo de trabajo docente que podría promover mayor autonomía por parte de los alumnos. Esta preocupación es retomada, una y otra vez, en los análisis que se realizan en el 2013, bajo el supuesto general de que existen relaciones de mutua dependencia entre la propuesta didáctica y la conquista de una posición autónoma por parte de los niños.

más sistemática –no realizada en el marco de este proyecto– en el camino de transformar el *saber práctico (docente)* en *saber sobre la práctica (docente)* (Sztajn, 2013).

Entre las condiciones de la tarea que se identificaron, mencionemos la posibilidad de:

- a) Considerar las producciones erróneas como un punto de partida (o punto de apoyo) que permite generar más fácilmente explicaciones.

Una idea que se discute al respecto es que los niños –por medio de confrontaciones entre ellos, de constataciones con la calculadora o de algún tipo de relación que ponen en juego– tienen recursos para conocer si su resultado es o no correcto. Con ese *dato* buscan, de manera más dirigida, una explicación que les permita entender por qué algo es erróneo. En algún sentido, la explicación sobre un resultado *que está mal* se elabora *contra* el saber de su incorrección, en tanto que lo correcto exige apelar a relaciones cuya presencia se hizo *natural* y que, por ese motivo, son menos visibles. Esta interpretación se apoya en el reconocimiento sobre el papel de la contradicción en la producción de conocimientos en el aula (Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard y Mante, 1992; Balacheff, 1982, 2000)

- b) Partir de explicaciones orales que –este es un supuesto que se explora– resultan más accesibles a los alumnos para colaborar con ellos en la elaboración de una explicación escrita.

Maestra Ad: Para ellos, al no poder escribirlo, es como que no saben explicar. Pero si yo lo traigo al escritorio y le pido que me lo cuente, me lo dice.

Maestra K: Se puede empezar por la oralidad, después escribir, leerlo, volver a escribir, es como que hay que trabajar con eso. (VI encuentro)

Notemos que las afirmaciones de estas maestras ponen en cuestión la identificación –muchas veces instalada en el sentido común de la institución escolar– entre no escribir y no saber. Retomando la dificultad que supone para los niños la escritura, la última maestra citada se propone recuperar en este contexto –y desde una perspectiva exploratoria– la productividad de la práctica de revisión de textos. Se esboza en esta idea un asunto que requiere ser indagado más sistemáticamente.

- c) Promover en el espacio colectivo de la clase la confrontación sobre diferentes reflexiones.

Esta propuesta es considerada a partir de una intervención del investigador que algunos docentes toman con entusiasmo: organizar un debate en torno a explicaciones diferentes, una vez que los niños han elaborado cada uno su propia explicación.

Investigador: Dejar que cada uno arme su explicación, luego organizar grupos que sostengan cosas diferentes y que se pongan de acuerdo.

Maestro Ar: Van a tener que debatir y convencerse.

Maestra M: Eso me encantó, lo voy a hacer.

El supuesto que sostiene el planteo del investigador es que la comparación de la propia perspectiva –que actúa como marco de referencia–, con otras posibilidades *contra* y *con* las cuales se puede entablar un diálogo de ideas, lleva a nuevas elaboraciones (Arsac y otros, 1992; Balacheff, 2000; Sadovsky, 2010). Algunos maestros aprecian esta idea apoyados en su experiencia que los lleva a valorar positivamente los intercambios entre los niños. Notemos que el investigador ofrece una “idea” –la del intercambio entre los niños–, plasmada en un dispositivo concreto –seleccionar dos producciones diferentes y promover un debate–. De alguna manera, la idea viene ya resumida en un formato que permite concebir cómo llevarla a cabo, lo cual orienta la acción de la docente que acepta con interés la propuesta.

4.3 LA DISTINCIÓN ENTRE DESCRIPCIÓN Y EXPLICACIÓN

Explicación y descripción son casi indistinguibles –ya lo mencionamos– en las conversaciones iniciales del espacio de trabajo. Sin embargo, a poco de andar y a la luz de los análisis sobre las explicaciones de los niños, estas dos ideas comienzan a diferenciarse. De la evolución de este *par* en la mesa de debate, de las implicancias que tuvo en las prácticas del aula haberlos distinguido, hablaremos en este punto.

¿Cómo lo hiciste?, preguntan los maestros intentando promover una explicación pero las respuestas de los niños no siempre permiten acceder a los motivos por los cuales han desplegado un cierto procedimiento; en algunas ocasiones,

ellos responden enumerando los pasos realizados. Las relaciones matemáticas que conectan los pasos –podríamos alojarlas en el terreno de la explicación– no se explicitan. Es recién cuando se trabaja sobre un ejemplo que claramente no constituye una explicación para los maestros –*lo hice mentalmente*– que empieza a ser posible plantear la cuestión de la diferencia.

Investigador: Cuando un chico dice “lo hice mentalmente”, ¿nos resulta suficiente?, ¿estamos conformes? [...] ¿Qué explicaciones nos gustaría que los pibes hagan?

Ar: Yo apuntaría a la definición de los pasos realizados, como una consigna más [...] “Resuelve. Describe los pasos realizados”.

Investigador: ¿Hay alguna diferencia entre una explicación y una descripción? (IV encuentro)

La pregunta inquieta. Para avanzar en clarificarla apelamos a la comparación entre las producciones de dos alumnos, a partir de una actividad que se les había propuesto, resolver los siguientes cálculos: $56 - 23$; $56 - 24$; $56 - 25$; $56 - 26$; $56 - 27$; $56 - 28$; $56 - 29$ (anotados en el formato de cuentas “paradas”). Luego tenían que escribir cómo lo habían pensado. Veamos los diálogos en los que se habla de estos procedimientos.

Directora N: Mira este (lee una producción de un alumno a raíz de la resta $56 - 29$), el 6 le pide uno al 5 y queda en 16, y el 5 queda en 4. Le resté el 9 al 16 y me dio el primer resultado. La segunda resta era 4 menos 2, digo 4 porque el 6 le había pedido un número al 5 y quedó en 4. Al 4 le resté 2 y el resultado es 2. Junté el 2 y el 7 y se forma 27...

Vice directora S: Te digo, para texto instructivo el chico ya tiene un diez, ja, ja.

Investigador: Había uno, creo, del nene que escribió *fui sacando de a uno, en las cuentas que hacían... la primera $56 - 23 = 33$ y a las otras cuentas les fui restando 1 y la cuenta $56 - 28$ no estaba pero me iba a dar 28 y así pude hacer $56 - 29$* . Lo que pone, este chico, como explicación no es cómo hizo la cuenta; es distinta la explicación que vimos antes (*le saqué 1, le pedí al compañero...*), o sea algunos describen los pasos de cada cuenta y otros explican la relación entre las cuentas. **¿Para dónde queremos ir nosotros? ¿Y cómo se hace?** (IV encuentro)

Es claro que el primer alumno responde a la pregunta *¿cómo lo hiciste?*; sin embargo, se limita a describir el algoritmo, poco podemos saber acerca de su comprensión a partir de su respuesta.

La producción que se reseña, en el segundo diálogo, permite hacer un poco más explícita la diferencia entre una descripción y una explicación. Interpretamos que, en este último caso, el alumno analiza la sucesión de cuentas, identifica la presencia de una cierta regularidad (si se resta uno más, la diferencia es uno menos) y se apoya en ella para obtener los resultados. Los maestros aprecian las diferencias y éstas resultan insumos sustanciales que ponen en el centro el problema de la intencionalidad.

Se comienza a reconocer la necesidad de negociar con los alumnos el tipo de explicación a la que se aspira. A la vez que se subraya que esa expectativa no se puede transmitir de manera directa. El debate sobre este tema se sostiene a lo largo de varios encuentros y para su tratamiento se planifican diferentes actividades que los docentes utilizan como medio de exploración en sus aulas.

Apoiada en una idea trabajada en el grupo, según la cual, se hipotetizó que es más fácil explicar lo erróneo que lo correcto (ver apartado 4.2), una docente propuso a sus alumnos dos cuentas (figuras 2 y 3) ya resueltas para que determinaran si estaban bien o mal hechas.

$$\begin{array}{r} 30 \quad | \quad 5 \\ \hline 4 \quad 7 \end{array}$$

Figura 2

$$\begin{array}{r} 55.400 \\ - 15.000 \\ \hline 40.000 \end{array}$$

Figura 3

La comparación entre las explicaciones que los niños proponen para la resta y las que elaboran para la división, pone de manifiesto que se trata de elaboraciones de calidades diferentes. Para la resta, los niños apelan a “corregir” la cuenta o bien a realizarla en su cuaderno y cotejar si el resultado presentado coincide con el que obtuvieron. Se reconoce que la explicación que elaboran está más asociada a una descripción de pasos: *la cuenta está mal porque donde está el 0 va un 4; está mal porque $0 - 0$ es 0; $0 - 0$ es 0; $4 - 0$ es 4, $5 - 5$ es 0*, son algunas de las frases elaboradas por los niños. En cambio, las explicaciones que sugieren los niños para la cuenta de división pueden interpretarse en términos de relaciones matemáticas: *Está mal porque 5×6 es 30 y donde dice 7 va el 6 y donde va el 4 da un 0; no se puede dividir más por lo tanto se cierra la división; está mal*

porque 7×5 es 35 y el número que tenía que dividir era 30 y se pasa... ; la cuenta está mal porque $5 \times 7 = 35$ y le pusieron un 4, por eso está mal.

Es decir, en el primer caso, los niños apelan a un discurso asociado al algoritmo, con poco involucramiento de relaciones matemáticas, en tanto que las explicaciones sobre el error en la división se apoyan en las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. La docente comenta que estas últimas relaciones han estado presentes en el trabajo del aula lo cual explicaría que alumnos recurran a ellas.

Un docente comparte en el espacio la consigna que propuso a sus alumnos y que, desde nuestro punto de vista constituye una *vuelta de tuerca* en consonancia con las discusiones que se venían desarrollando en el grupo:

Maestro Ar [refiriéndose a una consigna que dio a sus alumnos] Les doy una cuenta que está mal hecha. El primer punto que tienen que hacer es explicar qué hizo esta persona, en el segundo punto indicar si están de acuerdo y justificar si es sí, por qué y si es no, por qué. (VIII encuentro).

En el primer ítem, el docente busca, de alguna manera, que los alumnos describan y en el segundo ítem aspira a que los alumnos expliquen. Más allá de los efectos potenciales, la consigna da cuenta del modo en el que el maestro recoge las discusiones del grupo para plasmarlas de algún modo en su proyecto.

5. A MODO DE CONCLUSIÓN

Queremos volver una vez más –ahora para concluir– a la dinámica que se ha instalado en el espacio colaborativo, centrada en el análisis de lo que los niños iban haciendo en las aulas a instancias de maestros que les proponían cuestiones para explorar nuevos horizontes de enseñanza.

Habíamos concebido la planificación compartida como modo principal de intercambio en el espacio. Sin embargo, los maestros nos llevaron a hacer foco en el análisis de los trabajos de sus alumnos. Las discusiones en el grupo alimentaron sus proyectos de enseñanza pero las relaciones entre lo que se discutía y lo que hacían en las aulas quedó centralmente a cargo de cada maestro y pensamos que esto contribuyó a un clima de confianza en el cual se fortaleció la posición productora de los maestros.

Hacer eje en el análisis de las producciones infantiles hizo posible desentrañar las relaciones que subyacían a las propuestas de los niños, y entablar diálogos hipotéticos con ellos para retomar esas relaciones. *¿Qué hacemos con esta idea que los chicos tienen?*, fue una pregunta que se planteó una y otra vez y que –pensamos– contribuyó a proyectar la clases en términos de ideas matemáticas a discutir con los chicos y a despertar el deseo de ir a las aulas a ver qué pasaba.

Al ponerse de manifiesto que los maestros tenían distintas posturas sobre la estrategia de algún alumno, se pudo subrayar el carácter interpretativo que tiene la mirada sobre el trabajo de los niños. Asimismo, al organizar los intercambios sobre la base de cuestiones específicas –como por ejemplo el modo de interpretar la estrategia de un niño– salen a la luz diferencias sobre las que es interesante trabajar y que muchas veces quedan disueltas cuando se habla en general.

La tarea de interpretar las elaboraciones de los niños, fue también, una vía para problematizar el conocimiento matemático. El análisis de las relaciones allí implicadas quitó obviedad a algunas ideas muy naturalizadas y permitió ir configurando nuevos objetos de enseñanza. Vemos así un proceso dialéctico entre problematización y elaboración de un marco de análisis. Tal vez, también, haya una clave para ubicar una posición productora para los maestros.

Algo del orden de la reparación personal –que entusiasmaba– sucedía cada vez que los maestros podían tejer argumentos para muchas de las cuestiones que enseñan hace años como “reglas” que “se cumplen”. Efectivamente, el trabajo implicado en la búsqueda de fundamentos permitió a los maestros tomar contacto con sus propias posibilidades de “hacer matemática”. Esto los ubicó en una perspectiva según la cual es posible y potente concebir ese trabajo de fundamentación en las clases.

Los docentes coincidieron en señalar que la apertura de las tareas y la apelación a las explicaciones, fortalecieron la autonomía de los niños. Se establecieron relaciones entre comprensión, confianza, autonomía y tipo de tarea. Englobando estas relaciones se abre una puerta vinculada a la inclusión educativa, una puerta en la que el conocimiento es una vía central para la inclusión.

El intercambio con un grupo de docentes y directivos que miran a los niños con atención, con afecto y con intención, nos dejó ver costados en los que nunca habíamos pensado, como por ejemplo la producción de explicaciones como oportunidad para los niños de hacerse entender, de expandir su pensamiento hacia otro y tener más chances de ser comprendido.

Al acceder a los análisis que se hacen sobre las experiencias que los colegas relatan en las reuniones, los maestros resignifican sus propias prácticas otorgándoles nuevos sentidos en los que no habían pensado al plantearlas en sus aulas. En muchos momentos surgieron ideas para responder a alguna cuestión –por ejemplo relacionar cálculos para apoyar su memorización– pero en el proceso de discusión ese primer sentido se fue transformando y enriqueciendo.

Orientados por la intención de que los niños pusieran en juego determinadas estrategias, que produjeran una cierta calidad de explicaciones, de que reconocieran algunas relaciones matemáticas, los maestros tomaron muchísimas decisiones sobre terreno (*que me dicten en el pizarrón, primero les doy esta consigna y después esta otra, que discutan de a dos, revisamos todos juntos, ...*) que el trabajo en el espacio colaborativo permitió identificar. Contra la invisibilidad que suelen tener en la “normalidad” de una institución que históricamente no ha previsto un tiempo para la reflexión sobre la acción. Como hemos dicho, el grupo colaborativo constituye una oportunidad de transformar el saber práctico en saber sobre la práctica. Por las características de nuestro espacio –enmarcado en las exigencias del tiempo escolar que demanda permanentemente resolver hacia adelante– no nos hemos detenido a explorar más sistemáticamente cada una de esas decisiones. Matizarlas, conceptualizarlas, enmarcarlas en las condiciones en las que han resultado potentes. Tal vez sea momento –torciendo la lógica del tiempo en la escuela– de retomar el trabajo conjunto con maestros y directivos para asumir esa tarea. Esta perspectiva reafirma –por si hiciera falta– la potencia de la colaboración para fortalecer el trabajo de todos aquellos que entendemos que el trabajo de enseñar está inherentemente ligado al derecho de aprender.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. y Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège. Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Lyon: Presses Universitaires de Lyon.
- Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(3), 261-304.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. (P. Gómez, Trad.) Bogotá: Universidad de los Andes. Una empresa docente.

- Becerril, M., García, P., Itzcovich, H., Quaranta, M. y Sadovsky, P. (en prensa). Producción matemático-didáctica en el marco de un trabajo colaborativo entre docentes, directores de escuela primaria e investigadores en didáctica. En *Publicación de la Universidad Pedagógica (UNIFE)*. La Plata: Unife. Editorial Universitaria.
- Charles-Pézar, M., Butlen, D. y Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P. y Poirier, L. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation [En red]. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33-64.
- Florentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? En M. Borba, *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. (Vol. 9). Pesquisa qualitativa em educação matemática: Autêntica Editora.
- Lerner, D. (2012). Hacia la comprensión del valor posicional. Avances y vicisitudes en el trayecto de una investigación didáctica. En C. Broitman, *Matemáticas en la escuela primaria [I]. Números naturales y decimales con niños y adultos* (págs. 173-201). Buenos Aires: Paidós.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- McClain, K. y Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 236-266.
- Perrenoud, P. (1990). *La construcción del éxito y del fracaso escolar*. Madrid: Morata.
- Robert, A. (2003). De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée). *Didaskalia*, 22.
- Robert, A. (2004). Que cherchons-nous à comprendre dans les pratiques des enseignants? Quelles analyses menons-nous? En M.-L. Peltier-Barbier, *Dur pour les élèves. Dur pour les enseignants. Dur d'enseigner en ZEP* (págs. 15-32). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Robert, A. y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et coherent des pratiques des enseignants des mathématiques: une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.
- Robert, A. y Vanderbrouk, F. (2003). Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(3), 389-424.

- Robert, A., Roditi, E. y Grugeon, B. (2007). Diversités des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit X*, 74, 60-90.
- Roditi, É. (2011). *Apports d'une intégration de diverses approches et perspectives. Note de synthèse présentée pour l'habilitation à diriger des recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques*. Paris: Université Paris Descartes.
- Sadovsky, P. (2010). Explicar na aula de matemática, um desafio que as crianças enfrentam com prazer. En *Escola da Vila, 30 olhares para o futuro* (págs. 233-241). San Pablo: Escola da Vila. Centro de Formação.
- Sensey, G. (2011). *Le sens du savoir*. Bruselas: De Broeck.
- Sensey, G. y Mercier, A. (2007). *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes: PUR.
- Sztajn, P. (2013). Mathematics professional development researchers as stakeholders. *SISYPHUS. Journal of education*, 1(3), 246-269.

DATOS DE LOS AUTORES

Patricia Sadovsky

patsadov@gmail.com

María Emilia Quaranta

memiliaquaranta@gmail.com

Horacio Itzcovich

yayohiz@gmail.com.ar

María Mónica Becerril

monicabece@gmail.com

Patricia García

patgarcia41@speedy.com.ar

Institución de adscripción de los autores:

Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires, UNIPE