

Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933–2005

Treatment of finite limit in spanish textbooks of middle school: 1933–2005

Javier Claros Mellado*
M^{ra} Teresa Sánchez Compañá**
Moisés Coriat Benarroch***

Resumen: En este escrito describimos un estudio de libros de texto de matemáticas españoles (nivel de secundaria). Se trata de un estudio en el que se usó una muestra intencional, con un total de 40 libros de textos, para buscar por separado el desarrollo realizado por los respectivos autores, en lo que respecta a la noción de límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto. Describimos, de nuestro marco teórico, la fenomenología del límite, los fenómenos que hemos buscado en los libros de texto. Esto se ha hecho siguiendo un método sistemático para analizar los libros, plan que también presentamos. Resumimos los resultados obtenidos integrándolos en rangos temporales relevantes para la bibliografía en español, e indicamos algunas vías de futuro de nuestras investigaciones.

Palabras clave: *libros de texto, límite, fenómenos, función, sucesión.*

Abstract: We describe a study of Spanish mathematics text books (secondary level) that allowed us to develop, in part, the field work in two doctoral theses. It's

Fecha de recepción: 12 de mayo de 2015. **Fecha de aceptación:** 16 de febrero de 2016.

* Universidad Complutense – Madrid. fclaros@ucm.es

** Universidad de Málaga - Málaga. teresasanchez@uma.es

*** Universidad de Granada – Granada. mcoriat@ugr.es

an experimental study in which an intentional sample, with a total of 40 textbooks, was used to search for, separately, the development made by the respective authors in regard to the finite limit of a sequence (Claros, 2010, doctoral thesis) and the finite limit of a function at a point (Sánchez, 2012, doctoral thesis). From our theoretical framework (phenomenology of limit), we describe the phenomena that we looked for in the textbooks sample. This has been done following a systematic method to analyze each book, we also include a description of such a method. We summarize the results obtained, by integrating them into useful time ranges for the literature in Spanish, and indicate some pathways for the future of our research.

Key words: *textbooks, limits, phenomena, function, sequence.*

1. INTRODUCCIÓN

Los libros de texto están interesando a los investigadores en didáctica de la matemática, ya que son un instrumento indispensable en el desarrollo de la práctica docente. Por ejemplo, Raman (2002) analizó libros de texto para describir la enseñanza que reciben los alumnos de pre-cálculo y cálculo; su propósito era detectar las dificultades que tenían los alumnos al coordinar aspectos informales y formales del cálculo.

El estudio que aquí se presenta se integra en una investigación más amplia que afronta el límite finito desde una perspectiva fenomenológica en el sentido de Freudenthal (1983) quien afirma:

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en mi terminología, describir este noumenon en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. (p. 28)

El estudio separado del límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto corresponde a una decisión de nuestro equipo de investigación que ha sido discutida en Claros, Sánchez y Coriat (2006). En las dos tesis doctorales Claros (2010) y Sánchez (2012) en las que se desarrollaron

ampliamente las ideas que aquí se exponen, se estudiaron libros de texto de secundaria españoles usando la misma metodología para la obtención y el análisis de la información de los respectivos tópicos, metodología que fue puesta a punto por el propio equipo de investigación. Por esta razón se considera adecuado reunir los resultados más relevantes que, sobre los libros de texto, se obtuvieron en ambas memorias.

En estos trabajos se puso de manifiesto que los fenómenos descritos se suelen presentar en diferentes sistemas de representación. Siguiendo a Janvier (1987) y a Blázquez y Ortega (2001) se manejaron cuatro sistemas: verbal, gráfico, simbólico y tabular. Además, se observó que los sistemas de representación se manejan con intención de dar, bien un ejemplo o bien una definición, por lo que se consideraron relevantes los que llamamos formato ejemplo y formato definición.

La caracterización de los fenómenos mencionados condujo a plantear su posible observación en libros de texto de secundaria, elaborados de un modo independiente, cuando los respectivos autores introducen el límite finito de una sucesión o el límite finito de una función en un punto.

Esta cuestión marcó el inicio de la búsqueda de una muestra de libros de textos. Afortunadamente, disponíamos de herramientas teóricas para estructurar una información que queríamos que abarcara unos 70 años. Sierra, González y López (1999) habían estudiado la evolución histórica del límite funcional en el período 1940-1995; consideraron tres periodos temporales basados en las leyes educativas que se estaban desarrollando. Como nuestra muestra se extiende desde 1933 hasta 2005, tenemos en cuenta esos “períodos educativos” con otros dos, uno, para abarcar el lapso anterior a 1945 y otro para abarcar el lapso posterior a 1995.

Como ya se mencionó, en este documento se describen fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación en una muestra de libros de texto de secundaria comprendidos entre 1933 y 2005 así como la información sobre los sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y a los formatos (ejemplo o definición) y los periodos educativos considerados.

Además, comparamos los pares de fenómenos (aproximación intuitiva y retroalimentación) asociados a cada tópico (límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto) y describimos su evolución en los periodos educativos considerados.

La importancia de este estudio radica en el hecho de que los fenómenos a.s.i e i.v.s organizados por el límite finito de una sucesión y los fenómenos ADI e IVF organizados por el límite finito de una función en un punto, están presentes en

los libros de texto y además aparecen en diferentes sistemas de representación. Este hecho, unido al uso masivo que los docentes hacen de los libros de texto, hace que los profesores estén utilizando dichos fenómenos en el proceso de enseñanza y aprendizaje del límite. Si tenemos en cuenta esto, el trabajo de Sánchez (2012), donde se mostraba como los fenómenos ADI e IVF estaban presentes en profesores y el trabajo de Claros (2010), donde los fenómenos a.s.i e i.v.s estaban presentes en alumnos, podemos afirmar que a cualquier investigador que se dedique al estudio y desarrollo de una secuencia didáctica que mejore la enseñanza-aprendizaje del límite le sería útil tener en cuenta este trabajo.

2. FENOMENOLOGÍA DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN Y DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

En Claros (2010) se demostró como el límite finito de una sucesión organizaba dos fenómenos que fueron denominados: aproximación simple intuitiva (a.s.i) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s). Asimismo en Sánchez (2012) se demostró cómo el límite finito de una función en un punto organiza dos fenómenos que fueron denominados: fenómeno de aproximación doble intuitiva o ADI y fenómeno de ida-vuelta o retroalimentación en funciones (IVF). En el siguiente apartado describiremos como se definen estos fenómenos y ejemplos de cada uno de ellos.

3. LOS FENÓMENOS A.S.I, I.V.S, ADI E IVF

3.1 SUCESIONES CON LÍMITE FINITO

En Claros (2010) se analizó la siguiente definición de límite finito de una sucesión.

DEF1S. Sea x_n una sucesión en \mathbb{R} , decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos $\lim x_n = x$) si para cada $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $n > N$ se cumple que $|x_n - x| < \epsilon$. (Spivak, 1991, p. 615.)

En dicha memoria se mostró cómo esta definición organiza dos fenómenos, uno intuitivo y otro formal, que describimos a continuación.

3.1.1 Aproximación simple intuitiva (a.s.i.)

Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (k, a_k) , caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno

observado al inspeccionar la secuencia de valores a_1, a_2, \dots, a_k cuando “parecen acercarse” a otro valor fijo. (Claros (2010), páginas 147-148)

Se emplea la expresión *parecen acercarse* para capturar cualquier intuición para el límite finito de la sucesión; por ejemplo, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explícita o no) en los valores inspeccionados. El siguiente ejemplo lo consideramos paradigmático: en la sucesión $(1,1), (2,1/2), (3,1/3), \dots$, los términos $1/n$, parecen acercarse a 0 a medida que n crece.

El fenómeno de aproximación simple intuitiva es el primero que se observa en las sucesiones que tienen límite y permite obtener un candidato a límite o comprobar *grosso modo* que el candidato propuesto parece adecuado. Sin embargo esto no garantiza que el candidato seleccionado sea límite de la sucesión presentada.

3.1.2 Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones

La seguridad de que un candidato a límite es el límite de la sucesión presentada, se consigue por medio del fenómeno que llamamos “retroalimentación” o “fenómeno de ida y vuelta en sucesiones”, por los procesos que controla para establecer o descartar, sin lugar a dudas, el acercamiento progresivo de los valores de la sucesión a un candidato a límite. Para caracterizar la *Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s)* necesitamos describir esos procesos.

El primer proceso, que denominamos de ida, corresponde a la expresión que forma parte de la Definición 1S: “para cada $\epsilon > 0$, existe un número natural N ”. La “ida” se establece partiendo de la variable dependiente y llegando a la variable independiente.

El segundo proceso, que denominamos de vuelta, corresponde a la expresión que forma también parte de la Definición 1S: “si $n > N$ se cumple que $|x_n - x| < \epsilon$ ”. En la “vuelta” se parte de la variable independiente y se acaba en la variable dependiente.

La observación sucesiva y ordenada de estos dos procesos corresponde a lo que denominamos fenómeno de retroalimentación o de “ida-vuelta en sucesiones”.

En la retroalimentación se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada a la sucesión. Ésta es una función de variable real con valores naturales y la representamos mediante $(\epsilon, N(\epsilon))$. Esto es lo que nos conduce a hablar del *fenómeno de ida y vuelta en sucesiones (i.v.s)*.

El siguiente ejemplo lo consideramos paradigmático: Partiendo de la sucesión $(n, 1/n)$ se construye la función $(\epsilon, E(1/\epsilon) + 1)$ donde E designa la función parte entera. Una vez fijado $\epsilon > 0$ tenemos que determinar N a partir del cual $1/n < \epsilon$; al resolver esta inecuación n debe ser mayor que $(1/\epsilon) + 1$. Para asegurarnos de que sea un número natural, tomamos $N = E(1/\epsilon) + 1$.

Como consecuencia de todo lo anterior afirmamos que la Definición 1S organiza los dos fenómenos: aproximación simple intuitiva (a.s.i) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s). En la práctica, la construcción de la función $(\epsilon, N(\epsilon))$ es a menudo difícil o tediosa; se suele evitar rápidamente apelando a teoremas que garantizan la existencia del límite por el aspecto algebraico de la función.

3.2 FUNCIONES CON LÍMITE FINITO EN UN PUNTO

En Sánchez (2012) se analiza la siguiente definición de límite finito de una función en un punto:

DEF1F. La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x , si $0 < |x - a| < \delta$, entonces donde $|f(x) - L| < \epsilon$. (Spivak 1991, p. 118). Notación adaptada.

3.2.1 Aproximación doble intuitiva

Cuando los valores de las variables independiente, x , y dependiente, $f(x)$, *parecen acercarse* a sendos valores fijos con cualquier patrón de acercamiento que se elija para la primera, nos referimos al fenómeno que llamamos “aproximación doble intuitiva” (ADI). Cuando x se acerca de cualquier manera preestablecida a x_0 , entonces $f(x)$ se acerca a un valor único, que no depende del modo de acercamiento elegido para la variable independiente.

Al usar la expresión *parecen acercarse*, queremos capturar cualquier intuición para el límite, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explícita o no) cuando se inspeccionan parejas de valores de ambas variables así como cualquier procedimiento matemático que permita controlar esa intuición.

Para ello, es necesario incluir una característica esencial de los números reales que se usa en los límites funcionales: la intuición de la continuidad de la recta real. El siguiente ejemplo es paradigmático de un modo de acercamiento

basado en sucesiones coordinadas extraídas de una función; lo llamamos “modelo ADI 1”. Es relevante observar la discretización implicada en el modelo, que invalida cualquier afirmación sobre el límite de la función y solamente genera la convicción en el estudioso.

Modelo ADI 1, dos sucesiones coordinadas. En la función $f(x) = x^2$, si tomamos los pares de valores (1,9; 3,61), (1,99; 3,9601), (1,999; 3,99601)..., se observa que cuando x se acerca a 2 los valores $f(x)$ se acercan a 4.

Tabla 1

Valores de la variable independiente x	1,9	1,99	1,999	...	Límite: 2
Valores de la variable dependiente $f(x)$	3,61	3,9601	3,996001	...	Límite: 4

Sucesiones coordinadas extraídas de una función

En este modelo, ilustrado mediante la tabla 1, hemos construido dos sucesiones partiendo de la función y de una pauta de construcción de una sucesión en los valores de la variable independiente.

Sobre los modos de acercamiento y su conexión con la intuición de la continuidad de la recta véase Sánchez (2012), pp. 107-109.

3.2.2 Retroalimentación o ida-vuelta en funciones

El análisis de la Definición 1F da lugar a la observación de dos procesos íntimamente relacionados:

- El primer proceso corresponde al siguiente fragmento de la Definición 1F: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$.
- El segundo proceso corresponde al siguiente fragmento de la Definición 1F: si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

La observación sucesiva y ordenada de estos procesos corresponde al fenómeno de retroalimentación o “ida-vuelta en funciones”, que presentamos de manera precisa a continuación. Más detalles de este fenómeno en funciones puede verse en Sánchez (2012).

El fenómeno de retroalimentación exige la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada a la función de partida. Se trata de una función real de variable real que representamos mediante la expresión $(\varepsilon, \delta(f(x), \varepsilon))$. Lo anterior conduce a hablar del fenómeno de *ida y vuelta en funciones (IVF)*. El siguiente ejemplo lo consideramos paradigmático: Dados la función $f(x) = 2x$ y el punto $x_0 = 1$, se construye la función $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$, donde $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Fijado ε , tenemos que determinar δ con el que se cumpla que si $0 < |x - 1| < \delta$ entonces observamos que $|2x - 2| < \varepsilon$; resolviendo esta inecuación obtenemos que δ debe ser menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

3.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y FORMATOS

Cada fenómeno puede introducirse usando un sistema de representación (de cuatro posibles) y un formato (de dos posibles); esto exige considerar, para cada fenómeno, ocho presentaciones que denominamos *código de fenómeno*. En total son 32 códigos de fenómeno posibles y su significado

De esta manera puede aparecer un código de fenómeno como ADI v-e que hace referencia al fenómeno de aproximación doble intuitiva en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo.

4. MÉTODO DE ESTUDIO DE LOS LIBROS DE TEXTO

El análisis de libros de texto se ha prolongado durante al menos cuatro años y ha abarcado 40 libros de texto. Su estudio dio lugar a gran información que hubo que organizar según un guión que quedó establecido por el equipo de investigación y cuyo objetivo principal era argumentar la observación de códigos de fenómenos. Además de esto se obtuvieron gráficas que explicaban la evolución de los fenómenos a lo largo del tiempo y conclusiones que mostraban los principales resultados obtenidos, dando lugar a un capítulo en sendas tesis doctorales (Claros, 2010 y Sánchez, 2012), la primera dedicada a sucesiones y la segunda a funciones.

Queremos presentar los fenómenos hallados en los libros de texto y su evolución con los años. Para ello, optamos por contar casos observados en cada período educativo considerado. Obviamente, distinguimos la sucesión convergente de

la función con límite en un punto, así como los fenómenos de aproximación intuitiva y de retroalimentación; sin embargo, agregaremos resultados para obtener panorámicas que, esperamos, aporten resultados más globales.

En esta sección describimos los periodos educativos mencionados en la introducción y el plan de estudio seguido con cada libro de texto.

4.1 PERÍODOS EDUCATIVOS

Consideramos cinco periodos educativos; los tres centrales fueron establecidos por Sierra, González y López (1999) mientras que los periodos primero y último los introducimos en Claros (2010) y Sánchez (2012) y dan cabida a todos los textos recopilados. Hay que señalar, que consideramos que estos cinco periodos no son muy distintos de los utilizados por González y Sierra (2003). Estos últimos señalan en su documento “el método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático”, los siguientes periodos: 1934-1967, 1967-1975, 1975-1995 y 1995-2000. Respecto al primer periodo educativo consideran que va desde el final de la guerra civil (1939) hasta 1967. Nosotros como disponíamos de libros editados antes y durante la guerra civil decidimos crear un periodo adicional para clasificar estos libros.

Nuestra clasificación teniendo en cuenta lo anterior es por lo tanto la siguiente:

Años 1930 a 1940. Corresponde, aproximadamente, a la “segunda generación” de libros de texto de secundaria con contenidos de análisis. Abarca una década tumultuosa y sangrienta en la sociedad española.

Años 1940 a 1967. Abarca desde el final de la guerra civil hasta la publicación de textos pilotos para la introducción de la matemática moderna.

Años 1967 a 1975. Abarca desde la implantación de la matemática moderna hasta la aprobación del Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P).

Años 1975 a 1995. Abarca desde la implantación del B.U.P hasta el inicio de los nuevos bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativa (L.O.G.S.E).

Años 1995 a 2005. Abarca desde la implantación de la L.O.G.S.E hasta el inicio de los bachilleratos derivados de la Ley Orgánica para la Calidad Educativa (LOCE).

En nuestro estudio, aunque consideramos los periodos educativos y emitimos algunas conclusiones relativas al uso de los fenómenos y estos, nuestra principal preocupación fue la necesidad de observar los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación en los libros de texto. Este hecho es importante ya que

a pesar de que la introducción del concepto de límite ha variado a través de los periodos educativos, los fenómenos han seguido apareciendo como un instrumento útil para su definición. Además, el uso de estos fenómenos permitirá señalar el carácter más intuitivo y menos formal que se hace de la introducción del límite en los libros de texto y como consecuencia su posterior enseñanza a los alumnos. Esto es así debido al periodo educativo en el que nos encontramos que realiza un tratamiento más intuitivo de los conceptos.

4.2 GUIÓN DE ESTUDIO DE CADA LIBRO

Para el análisis de cada libro de texto se usan los cuatro criterios que detallamos a continuación.

Criterio 1º, *ficha del libro*. Recogemos el código del libro (identificador único asignado a cada libro), nombre del autor o autores, título del libro, editorial, año, ubicación e información sobre el límite de sucesiones o funciones (capítulo, apartado y página en los que se desarrollan las ideas al respecto).

Criterio 2º, *secuenciación*. Observamos cómo desarrolla el autor el límite finito de una sucesión o el de una función en un punto. La observación del libro se hace teniendo en cuenta lo que denominamos *unidades de información*: fragmentos del libro donde el autor desarrolla un contenido matemático único o que resulta cómodo de desglosar.

Criterio 3º, *recuento de fenómenos observados*. En cada unidad de información, hacemos un recuento de los fenómenos observados; para ello, determinamos, de manera razonada, si se observa, el código de fenómeno correspondiente.

Criterio 4º, *resúmenes y comentarios*. Para resumir toda la información extraída usamos tablas de tres niveles lógicos que dejan el espacio necesario para todos los códigos de fenómeno y, en cada celda, incluimos el código asignado a cada fragmento de una unidad de información en la que se reconoció el fenómeno.

El estudio de cada libro termina con un breve comentario que describe lo que hemos observado.

Para resumir la información extraída de cada libro, utilizamos dos tipos de cuadros, que sintetizan el trabajo de análisis realizado, y un breve comentario. En el primer tipo de cuadro, posicionamos el fenómeno en el marco del libro; en el segundo tipo de cuadro, considerando las dieciséis posibilidades descritas en la sección anterior, recolocamos los fenómenos observados.

Terminamos el análisis de cada libro con un breve comentario sobre lo observado.

La muestra completa de los libros analizados, con el análisis detallado de cada uno de ellos puede consultarse en Claros (2010) para el caso de las sucesiones y Sánchez (2012) para el caso de las funciones.

4.3 CÓDIGOS DE UBICACIÓN

Los códigos de ubicación se asignan a los fragmentos de cada unidad de información concatenando varios códigos parciales.

4.3.1 *Primer código parcial: Código de libro*

El código de libro identifica el libro de forma inequívoca dentro de la muestra. Tiene en cuenta: el soporte; el contenido matemático; la década de publicación; y el número de orden dentro de la muestra. El soporte no es variable en nuestra investigación, porque solamente hemos usado libros de papel (abreviados L); sin embargo, con el avance, por ejemplo de los soportes electrónicos, será conveniente tenerlo en cuenta.

Del mismo modo añadimos el tópico, sucesión (S) o función (F), para especificar lo que queremos buscar en cada libro.

La década en la que se edita el libro se detalla a través de tres números.

Por último, hemos establecido un número de orden, dentro de cada década, que consta de dos dígitos.

Por ejemplo, el código LF97004 remite al libro (L) en el que hemos estudiado el límite finito de una función en un punto (F); fue publicado en la década que comenzó en los 70 (970) y ocupa cronológicamente el cuarto (04) lugar, en la muestra, de los publicados en esa década.

4.3.2 *Segundo código parcial: Código de unidad de información.*

Para identificar dentro de un libro una unidad de información concatenamos el código de libro y el código de dos dígitos correspondiente a esa unidad.

Por ejemplo, el código LF97006.02 remite a la segunda unidad de información del libro.

En una unidad de información es posible observar varios fenómenos (a.s.i o i.v.s); por ello, al código de la unidad de información hemos añadido, por la derecha, el código con el número de orden del fenómeno hallado. Siguiendo con el caso anterior, tiene sentido el siguiente código de ubicación de un fenómeno: LF97006.02.03. Significa que nos referimos al tercer fenómeno hallado en la segunda unidad de información del libro indicado.

Después de que se asignó la totalidad de códigos a los libros de la muestra, observamos que, en ocasiones, a cada unidad de información seleccionada, le correspondía únicamente un fenómeno. Este hecho sucede con una frecuencia suficiente como para justificar el siguiente *criterio de simplificación en la escritura de códigos*: cuando hallemos un sólo fenómeno en una unidad de información, omitiremos el código de posición de éste. Según el contexto, hablamos de la unidad de información o del fenómeno único que hemos observado en ella. Como es obvio, el criterio de simplificación de códigos no se aplicará si en una unidad de información detectamos más de un fenómeno.

Por ejemplo, en uno de los libros estudiados observamos los siguientes códigos de ubicación de fenómenos: LF97005.04, LF97005.03.02 y LF97005.03.03; en el primer código de ubicación hemos aplicado el criterio de simplificación, ya que solamente hemos encontrado un fenómeno en la 4ª unidad de información. Sin embargo, en la 3ª unidad de información, hemos hallado varios fenómenos y no aplicamos el criterio de simplificación de códigos.

5. ESTUDIO DE LOS LIBROS DE TEXTO

La muestra trabajada ha sido intencional ya que hemos analizado aquellos libros a los que hemos tenido acceso en los diferentes institutos donde hemos ejercido como docentes y la hemos completado con libros de la Biblioteca Nacional, de manera que tuviéramos al menos tres ejemplares en cada periodo educativo.

Presentamos una descripción de la información obtenida siguiendo el plan descrito en la sección anterior. Después de reconocer, libro a libro, los fenómenos descritos anteriormente (a.s.i e i.v.s y ADI e IVF) consideramos útil agregar la información obtenida y dar una idea de la evolución en estos setenta años.

5.1 DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

De los 40 libros, 30 de ellos estudian sucesiones, 28 funciones y en 18 de ellos se estudian ambos tópicos. Una distribución del número de libros, sus respectivas editoriales y tópicos en cada periodo considerado se presenta en la tabla 2.

Tabla 2

Periodo	Recuento de libros			Recuento de editoriales		
	Sólo sucesiones	Sólo funciones	Ambos tópicos	Sólo sucesiones	Sólo funciones	Ambos tópicos
1933-1939	2	1	2	2	1	2
1949-1966	0	1	3	0	0	3
1967-1974	1	1	2	1	1	2
1975-1994	4	2	9	0	0	9
1995-2005	5	5	2	5	3	2
Subtotal	12	10	18	8	5	18

Reparto de libros de la muestra, y sus respectivas editoriales, por periodos educativos y por tópicos

5.2 RECUENTOS DE FENÓMENOS Y COMPARACIONES

5.2.1 Sucesiones

Después de efectuar un análisis detallado de los libros de texto, teniendo en cuenta los cuatro criterios señalados anteriormente, hicimos un primer recuento por fenómeno observado (distinguiendo los 8 códigos de fenómeno que le corresponden) y un segundo recuento, más detallado, de esa misma información por periodo educativo. Los resultados obtenidos se detallan en las siguientes tablas.

Tabla 3

Códigos de fenómeno	a.si v-e	a.si v-d	a.si t-e	a.si t-d	a.si g-e	a.si g-d	a.si s-e	a.si s-d
Frecuencias	26	7	12	0	36	0	0	0

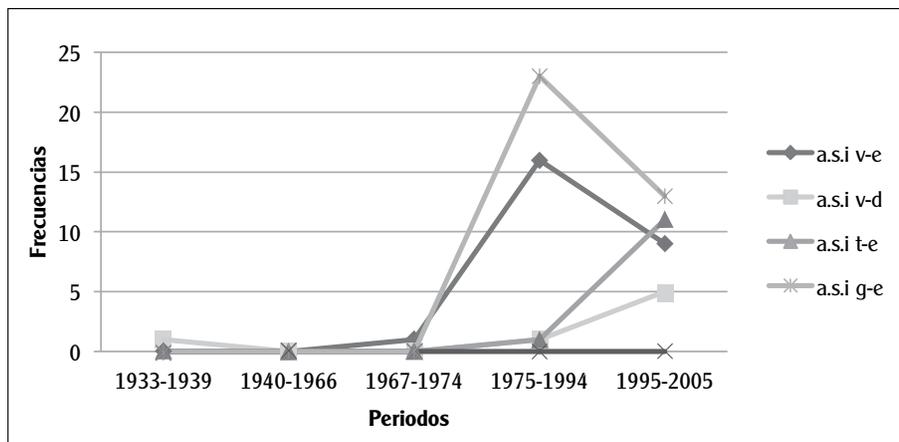
Fenómeno a.si: recuento de códigos de fenómeno

Tabla 4

	1933-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Subtotal por código de fenómeno
a.s.i v-e	0	0	1	16	9	26
a.s.i v-d	1	0	0	1	5	7
a.s.i t-e	0	0	0	1	11	12
a.s.i t-d	0	0	0	0	0	0
a.s.i g-e	0	0	0	23	13	36
a.s.i g-d	0	0	0	0	0	0
a.s.i s-e	0	0	0	0	0	0
a.s.i s-d	0	0	0	0	0	0
Subtotal por periodo	1	0	1	41	38	81

Fenómeno a.s.i: recuento por período de códigos de fenómeno

Figura 1



Fenómeno a.s.i: Evolución por períodos de los códigos de fenómeno.

La figura 1 resume la evolución a lo largo de los diferentes periodos educativos de los códigos de fenómeno a.s.i. Para hacer más cómoda la observación de esta figura hemos omitido las filas con todas sus entradas nulas en la tabla 4.

Respecto al fenómeno i.v.s obtenemos los resultados que se muestran de manera resumida en las tablas 5 y 6 y en la figura 2.

Tabla 5

Códigos de fenómenos	i.v.s v-e	i.v.s v-d	i.v.s t-e	i.v.s t-d	i.v.s g-e	i.v.s g-d	i.v.s s-e	i.v.s s-d
Frecuencias	13	25	1	0	7	7	36	16

Fenómeno i.v.s: Recuento de códigos de fenómeno

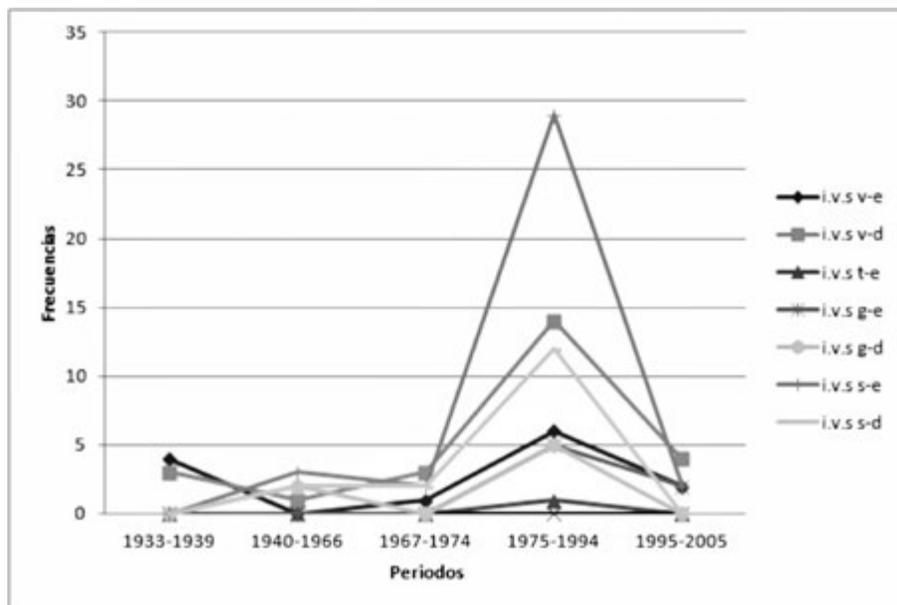
Tabla 6

	1933-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Subtotal por código de fenómeno
i.v.s v-e	4	0	1	6	2	13
i.v.s v-d	3	1	3	14	4	25
i.v.s t-e	0	0	0	1	0	1
i.v.s t-d	0	0	0	0	0	0
i.v.s g-e	0	0	0	5	2	7
i.v.s g-d	0	2	0	5	0	7
i.v.s s-e	0	3	2	29	2	36
i.v.s s-d	0	2	2	12	0	16
Subtotal por periodos	7	8	8	72	10	105

Fenómeno i.v.s: Recuento por período de códigos de fenómeno

La figura 2 resume la evolución a lo largo de los diferentes periodos educativos de los códigos de fenómeno i.v.s. Para hacer más cómoda la observación de esta figura hemos omitido la fila con todas sus entradas nulas en la tabla 13.

Figura 2



Fenómeno i.v.s: Evolución por periodos de los códigos de fenómeno.

Si comparamos los resultados de los fenómenos a.s.i e i.v.s respecto a los diferentes periodos educativos podemos establecer las siguientes conclusiones:

En los periodos 1933-1939, 1940-1966, 1967-1974 apenas se observa el fenómeno a.s.i, mientras que el fenómeno i.v.s se presenta en bastantes más ocasiones, siendo las relaciones entre ambos: 1:7, 0:8 y 1:8, respectivamente.

En el periodo 1975-1994, el fenómeno i.v.s supera en frecuencia al fenómeno a.s.i siendo la relación aproximada entre ellos 1:1,75.

En el periodo 1995-2005 se produce un cambio en el uso de los fenómenos a.s.i e i.v.s en los libros de texto pasándose a un mayor uso de los primeros; se invierte la relación que teníamos en periodos anteriores, pasando ahora a 3,8:1. Es decir: en los últimos diez años estudiados se usa casi cuatro veces más el fenómeno a.s.i en los libros de texto que el fenómeno i.v.s.

5.2.2 Funciones

Los resultados respecto al fenómeno ADI se recogen en las siguientes tablas y en la gráfica correspondiente, las cuales vienen a mostrar cómo el fenómeno ADI ha evolucionado en los diferentes periodos educativos. Estos resultados señalan la abundancia de los sistemas de representación que van asociados a este fenómeno en los últimos años y que debido a su importancia en los libros de texto, pensamos que es necesario considerarlos en el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite finito de una función en un punto.

Tabla 7

Códigos de fenómenos	ADI v-e	ADI v-d	ADI t-e	ADI t-d	ADI g-e	ADI g-d	ADI s-e	ADI s-d
Frecuencias	31	18	22	0	14	2	0	1

Fenómeno ADI: Evolución por periodos de los códigos de fenómeno

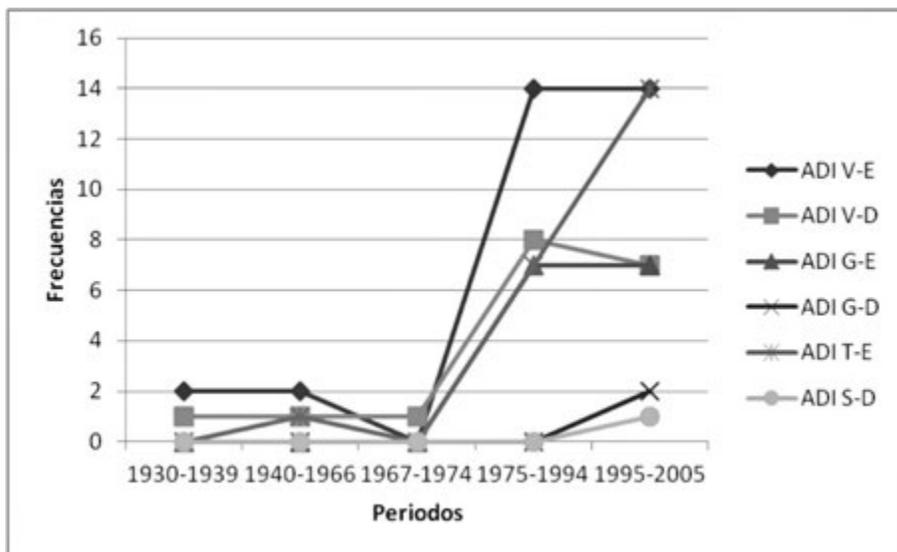
Tabla 8

	1930-1940	1940-1967	1967-1975	1975-1995	1995-2005	Recuento por código de fenómeno
ADI V-E	2	1	0	14	14	31
ADI V-D	1	1	1	8	7	18
ADI T-E	0	1	0	7	14	22
ADI T-D	0	0	0	0	0	0
ADI G-E	0	0	0	7	7	14
ADI G-D	0	0	0	0	2	2
ADI S-E	0	0	0	0	0	0
ADI S-D	0	0	0	0	1	1
Recuento por periodo	3	3	1	36	45	88

Fenómeno ADI: Recuento por periodo de códigos de fenómeno

La figura 3 resume la evolución a lo largo de los diferentes periodos educativos de los códigos de fenómeno ADI. Para hacer más cómoda la observación de esta figura hemos omitido las filas con todas sus entradas nulas en la tabla 8.

Figura 3



Fenómeno ADI: Evolución por periodos de los códigos de fenómeno

Los resultados relativos al fenómeno IVF se detallan a continuación Ver tablas 9 y 10 y figura 4.

Tabla 9

Códigos de fenómenos	IVF v-e	IVF v-d	IVF t-e	IVF t-d	IVF g-e	IVF g-d	IVF s-e	IVF s-d
	Frecuencias	31	18	22	0	14	2	0

Fenómeno IVF: Evolución por periodos de los códigos de fenómeno

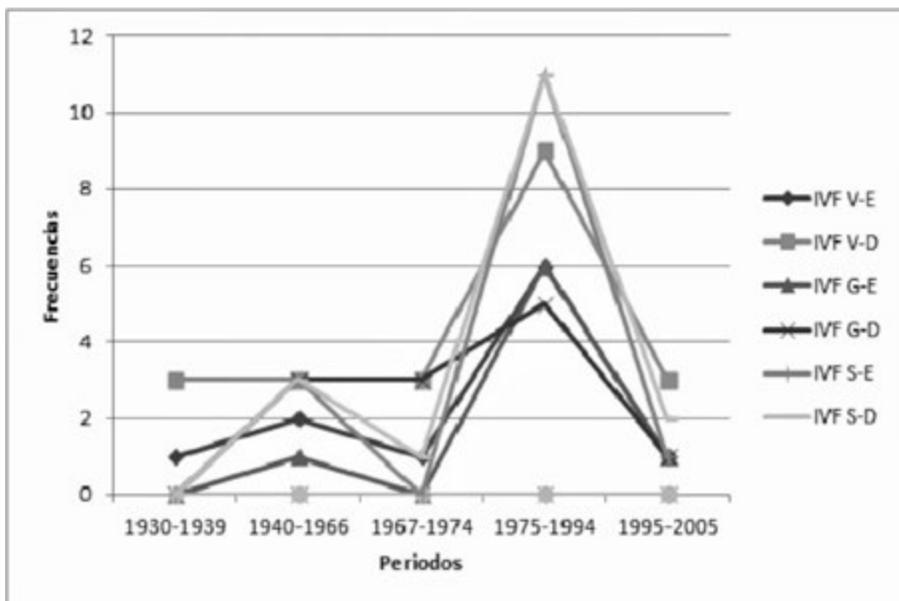
La figura 4 resume la evolución a lo largo de los diferentes periodos educativos de los códigos de fenómeno IVF. Para hacer más cómoda la observación de esta figura hemos omitido las filas con todas sus entradas nulas en la tabla 10.

Tabla 10

	1930-1940	1940-1967	1967-1975	1975-1995	1995-2005	Recuento por código de fenómeno
IVF V-E	1	3	1	6	1	12
IVF V-D	3	3	3	9	3	21
IVF T-E	0	0	0	0	0	0
IVF T-D	0	0	0	0	0	0
IVF G-E	0	1	0	6	1	8
IVF g-d	0	3	3	5	1	12
IVF S-E	0	3	0	11	1	15
IVF S-D	0	3	1	11	2	17
Recuento por periodo	4	16	8	48	9	85

Fenómeno IVF: Recuento por período de códigos de fenómeno.

Figura 4



Fenómeno IVF: Evolución por períodos de los códigos de fenómeno.

Si comparamos los resultados correspondientes al fenómeno ADI y al fenómeno IVF podemos obtener las siguientes conclusiones:

- En los periodos 1933-1939, 1940-1966 y 1967-1974 apenas se da el fenómeno ADI, mientras que el fenómeno IVF se presenta en bastantes más ocasiones, siendo las relaciones entre ambos: 3:4, 3:16 y 1:8, respectivamente.
- En el periodo 1975-1994, el fenómeno IVF supera en frecuencia al fenómeno ADI siendo la relación aproximada entre ellos 3:4.
- En el periodo 1995-2005 se produce un cambio en el uso de los fenómenos ADI e IVF en los libros de texto pasándose a un mayor uso del primero; se invierte la relación que teníamos en el periodo anterior, pasando ahora a ser de 5:1. Es decir se usa cinco veces más el fenómeno ADI en los libros de texto que el fenómeno IVF. Esto viene a mostrar el carácter más intuitivo que se le está dando al límite finito de una función en un punto en detrimento del desarrollo de los aspectos más formales del mismo. Esto es debido al periodo educativo en el que nos encontramos, el cual impulsa un desarrollo más intuitivo y menos formal de los conceptos. Por lo tanto cualquier profesor que se ocupe de la enseñanza del límite debe tener en cuenta que además de las dificultades propias del concepto matemático, se encontrará con el hecho de que los alumnos no están acostumbrados al desarrollo formal de conceptos.

5.3 COMPARACIÓN DE LOS TÓPICOS “LÍMITE DE UNA SUCESIÓN” Y “LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO”

En este apartado realizamos una comparación entre el estudio del límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto, en los libros de texto, atendiendo a dos características principales: periodos educativos y fenómenos

5.3.1 *Periodos educativos*

Con la excepción del fenómeno a.s.i en el período 1940-1966, todos los fenómenos se observan en los periodos educativos considerados.

Durante los tres primeros periodos educativos el fenómeno a.s.i aparece con muy poca frecuencia mientras que el fenómeno ADI tiene una frecuencia

bastante mayor que el fenómeno a.s.i; sus respectivas frecuencias agregadas son 2 y 7, respectivamente. En valores relativos, este hecho no es tan marcado en el caso de la comparación en estos tres primeros periodos entre el fenómeno i.v.s y el fenómeno IVF siendo la frecuencia agregada del primero 23 y la del segundo 28.

Si se considera solamente la evolución del uso de los fenómenos, es posible reducir el número de periodos educativos, modificando su rango. De esta manera distinguimos tres periodos educativos.

El primer periodo abarca desde 1933 hasta los años 70, y se caracteriza por la preponderancia en el uso del enfoque formal sobre el intuitivo. Las razones respectivas de uso son, para las sucesiones, de 12 a 1 (i.v.s : a.s.i \leftrightarrow 12 : 1), aproximadamente y, para las funciones, de 4 a 1 (IVF : ADI \leftrightarrow 4 : 1). Posiblemente, la preponderancia de los enfoques formales que los autores de libros de texto dan a la noción de límite, se derive de requerimientos legislativos.

El segundo periodo abarca desde los años 70 hasta principios de los 90. En el caso de las sucesiones, observamos un mayor uso del fenómeno i.v.s respecto del fenómeno a.s.i (relación 1,75:1 aproximadamente), pero la relación de uso está más próxima a 1 que en el período anterior, lo que corresponde a una disminución relativa en el uso del fenómeno i.v.s y un aumento relativo en el uso del fenómeno a.s.i. En el caso de las funciones, a pesar de que hay una preponderancia del fenómeno IVF respecto al fenómeno ADI (relación 1:0,75 aprox.) el fenómeno ADI ha aumentado notablemente su frecuencia respecto al periodo anterior, pasando de 7 a 36 ocurrencias. Caracterizamos este período por la *neutralidad* o equilibrio que los autores de libros de texto asignan al uso de los diferentes fenómenos. El enfoque intuitivo y el enfoque formal, en cierto modo, están “compitiendo” en los diseños de libros de texto de secundaria. Esta competición se resuelve en el periodo siguiente

El tercer periodo abarca desde principios de los noventa hasta 2005 y en él constatamos el cambio de tendencia “anunciado” en el período anterior. El período se caracteriza por la preponderancia en el uso del enfoque intuitivo sobre el formal. En el caso de las sucesiones podemos destacar un aumento en el uso del fenómeno a.s.i respecto al fenómeno i.v.s (la relación entre i.v.s y a.s.i es de 3,8:1 aprox.) y en el caso de las funciones un aumento del fenómeno ADI respecto al fenómeno IVF (la relación entre IVF y ADI es de 5:1 aprox.). En ambos tópicos (sucesiones y funciones) observamos una reducción drástica en el uso de los sistemas de representación, que se limitan prácticamente al sistema de representación verbal. El cambio de tendencia creemos que deriva también de

requerimientos legislativos; la ley educativa LOGSE recomienda un tratamiento intuitivo del límite de sucesiones y de funciones para, posiblemente, resolver dificultades que había presentado la enseñanza y aprendizaje de la Definición 1S, la Definición 1F o equivalentes.

5.3.2 Fenómenos

En este apartado se presentan características generales del estudio de libros de texto. Sin distinguir periodos educativos, se analiza el uso de los fenómenos en los sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y en los formatos (ejemplo y definición).

En los libros de texto de la muestra se usa, preferentemente, el sistema de representación verbal para el fenómeno ADI y el gráfico para el fenómeno a.s.i. Por lo que respecta a los formatos la razón del número de ocurrencias entre el formato ejemplo y el formato definición es alta en ambos casos: de 6:2, para el fenómeno ADI y de 10:1, para el fenómeno a.s.i. Esto indica que los autores invierten mucho más esfuerzo en dar ejemplos que susciten la intuición del límite de sucesiones que el límite de funciones; interpretamos este resultado aceptando que son arrastrados por la “discretización” arriba mencionada (véase Sánchez, 2012), lo que lleva a suponer, con ingenuidad, que los ejemplos de sucesiones “valen también” para las funciones cuando, como hemos visto, solamente valen para un modo de acercamiento que, precisamente, se aleja de la intuición de la continuidad de la recta.

En lo relativo a los fenómenos IVF e i.v.s observamos que se utilizan preferentemente los sistemas de representación verbal y simbólico. Por lo que respecta a los formatos, la razón del número de ocurrencias entre el formato ejemplo y el formato definición es del orden de la unidad: de 3:2, para el fenómeno IVF y de 1:1, para el fenómeno i.v.s. Interpretamos que hay una confianza plena en la definición usada y en su redacción.

De los ocho casos posibles que podemos formar considerando el fenómeno ADI, los sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y los formatos (ejemplos y definición), aparecen seis casos en los libros de textos.

Los códigos de fenómenos que no aparecen se muestran con una “X” en las tablas siguientes:

Tabla 11

Fenómenos	Verbal		TABULAR		GRÁFICO		SIMBÓLICO	
a.s.i				X		X	X	X
ADI				X			X	
	E	D	E	D	E	D	E	D

Fenómenos de aproximación intuitiva no encontrados

Tabla 12

Fenómenos	Verbal		TABULAR		GRÁFICO		SIMBÓLICO	
i.v.s				X				
IVF			X	X				
	E	D	E	D	E	D	E	D

Fenómenos de retroalimentación no encontrados

Notamos en la tabla anterior la escasa trascendencia que tiene el sistema de representación tabular en los fenómenos de retroalimentación.

Al reunir información, de sucesiones y funciones observamos:

Tabla 13

Fenómenos	Límite finito de una función en un punto		Limite finito de una sucesión	
Fenómenos	ADI	IVF	a.s.i	i.v.s
Frecuencias	88	85	81	107

Frecuencias totales de los fenómenos

Si observamos esta tabla, concluimos que el límite finito de una sucesión tiene un carácter más formal que viene determinado por el mayor uso del fenómeno i.v.s en detrimento del fenómeno a.s.i. Sin embargo en el caso del límite

finito de una función en un punto el peso asociado a cada fenómeno intuitivo (ADI) y formal (IVF) es prácticamente el mismo.

6. CONCLUSIONES

Hemos encontrado evidencias de los fenómenos de aproximación intuitiva (a.s.i y ADI) y de retroalimentación (i.v.s e IVF) en libros de texto de secundaria en diferentes sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y en diferentes formatos (ejemplo o definición).

El fenómeno a.s.i aparece en los sistemas de representación verbal, gráfico, tabular pero no en el simbólico. Observamos dicho fenómeno tanto en ejemplos como en definición pero en mayor medida en el formato ejemplo.

El fenómeno i.v.s aparece en todos los sistemas de representación y se observa asociado a los formatos ejemplo y definición. En ambos casos (ejemplos y definiciones) la frecuencia es muy similar.

El fenómeno ADI aparece en todos los sistemas de representación aunque la frecuencia es menor en el sistema de representación simbólico. Observamos dicho fenómeno en los formatos ejemplo y definición pero, al igual que sucede con el fenómeno a.s.i, su frecuencia es mayor en el formato ejemplo.

El fenómeno IVF aparece en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico, pero no en el tabular. Observamos dicho fenómeno tanto en el formato ejemplo como en el definición, pero su frecuencia es mayor en el caso del formato definición.

Hemos establecido que basta considerar tres periodos temporales para describir la evolución de uso de fenómenos intuitivos y de retroalimentación en libros de texto españoles de secundaria, tanto en el límite finito de una sucesión como en el límite finito de una función en un punto: en el primer periodo, que comprende desde 1933 hasta 1974, hay una preponderancia de fenómenos de retroalimentación; en el segundo periodo, que abarca desde 1975 hasta 1994, observamos un mayor uso de ambos fenómenos tanto de retroalimentación como de aproximación intuitiva, aunque siguen prevaleciendo en frecuencia, los primeros; el tercer periodo corresponde al intervalo 1995-2005 y en él prevalecen los fenómenos de aproximación intuitiva debido principalmente a un periodo en el que el límite es introducido en el currículo de manera más intuitiva.

Respecto a sucesiones y funciones señalamos que el fenómeno de retroalimentación se usa con más frecuencia que el fenómeno intuitivo; en cambio, en

el caso de las funciones la frecuencia del fenómeno intuitivo supera a la del fenómeno de retroalimentación.

Para concluir, anotamos tres reflexiones finales:

1. Nos encontramos actualmente en un periodo en el que prevalece la introducción intuitiva del concepto de límite en detrimento de su desarrollo formal. Este hecho puede hacer que los alumnos no lleguen a tener una comprensión completa del concepto de límite.
2. El desarrollo intuitivo del concepto de límite, unido al uso amplio de diferentes sistemas de representación, hace que el alumno pueda tener una fenomenología más amplia de dicho concepto.
3. Los fenómenos de aproximación intuitiva deben preceder a los fenómenos de retroalimentación y formalización en el desarrollo de una secuencia didáctica sobre la enseñanza del límite y deben ser tenidos en cuenta tanto unos como otros para llegar a tener un aprendizaje significativo sobre dicho concepto.

REFERENCIAS

- Abellanas Cebollero, P., García, J., Rodríguez, A., Casulleras, J. y Marcos de Lanuza, F. (1967). *Bachillerato superior. Matemática moderna 5º curso*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Abellanas Cebollero, P., García Rúa, J., y otros (1969). *Bachillerato superior, Matemática moderna, 6º Curso*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Alonso Misol, F. (1934). *Elementos de análisis matemático y sus aplicaciones. Libro primero: Teoría general de funciones y derivadas*. Madrid: Sucesores de Rivadeneyra.
- Álvarez, F., García, L., Garrido, A. y Vila, M. (1987). *Matemáticas. Factor-2*. Barcelona: Vicens-Vives.
- Baratech Montes, B. y Zalama Miguel, C. (1938). *Matemáticas sexto curso del bachillerato*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Belmonte, J.M., Montero, G., Negro, A. y otros (1989). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Madrid: Editorial Alhambra.
- Bescos, E y Pena, Z. (1998). *Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Editorial Oxford Educación.
- Bescos, E y Pena, Z. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato. Humanidades y Ciencias Sociales*. Madrid: Editorial Oxford Educación.

- Bescos, E y Pena, Z. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología*. Madrid: Editorial Oxford Educación.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). "Los sistemas de representación en la enseñanza del límite". *RELIME*, 4(3), 219-236.
- Blumovicz de Siperstein, S. y Alonso, S.(1974). *Matemáticas I*. México, D.F: Editorial U.T.E.H.A.
- Borrás Vesés, E. y Carrillo Quintela, M. E. (1982). *Matemáticas de Bachillerato*. Volumen 2. Barcelona: Editorial Teide.
- Calvo Escandón, M. (1976). *Matemáticas 2º B.U.P.*, León: Editorial Everest
- Cámara Meseguer, M.T., Monteagudo Martínez, M.F. y Paz Fernández, J.(1997). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Zaragoza: Editorial Luis Vives.
- Caruncho Castro, J. y Gutiérrez de Sande, M. (1986). *Matemáticas 2º B.U.P.*, Madrid: Editorial Santillana.
- Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.
- Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X*, 157-171.
- Claros, Sánchez y Coriat (2013). *Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica. Enseñanza de las ciencias*. Barcelona, v. 31, n. 2, p. 113-131.
- Colera, J., García, R. y Oliveira, M. J. (2002). *Matemáticas I*. Madrid: Editorial: Anaya
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- González, M. T. y Sierra, M. (2003). "El método de investigación histórico en la enseñanza del Análisis Matemático". *Investigación en Educación Matemática*, VII, 109-130.
- González, F. y Villanova, J. (1987). *Curso práctico de matemáticas 2º B.U.P.* Madrid. Editorial: Edunsa
- Guillén Barona, J., Navarro R. y otros (1976). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Madrid. Editorial: Magisterio Español.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Jiménez, P., Lozano, F. y Miñano, A. (1997). *Matemáticas 2*. CCSS. Madrid: Santillana.
- Lazcano Uranga, I. y Barolo Babolin, P.(1980). *Matemáticas. Área Básica FP2*. Zaragoza: Editorial Luis Vives.
- López, V. y Sánchez Martín, J.(1977). *Matemáticas 2 Bachillerato*. Madrid: Editorial S.M.
- Marín, D. (1939). *Tratado elemental de Matemáticas*. Valladolid: Librería Santarén.
- Martín Robles, I. (1936). *Elementos de Matemáticas (Cuarto Curso)*. Madrid: Editorial Ministerio de Educación y Ciencia.

- Martín, M. A. y Morán, M. (2001). *Matemáticas 1º Bachillerato Ciencias de la Salud, Naturaleza y Tecnología*. Madrid: Bruño.
- Martínez Losada, A, Hernández Aina, F. y Lorenzo Miranda, F.(1976). *Matemáticas 2º B.U.P.*, Madrid: Editorial Tecnibán.
- Navarro Borrás, F. y Ríos S. (1944). *Curso preliminar de Análisis Matemático*. Madrid: Editorial: Stylos.
- Negro, A y Benedicto, C. (1987). *Matemáticas 2º B.U.P.*, Editorial Alhambra.
- Negro, A, Benedicto, C., Martínez , M. y Poncela, J. M. (1996). *Matemáticas 1. CCNN*. Madrid: Santillana.
- Negro, A, Benedicto, C. y otros. (1997). *Matemáticas 2. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Editorial Santillana.
- Negro, A, Nevo[†], A, Rodríguez, R., Soler, J. y Delibes, A. (2002). *Matemáticas aplicadas a las CCSS 1*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, SAU.
- Pérez Cacho, S. y Negro, A.(1985). *Matemáticas 2º B.U.P*. Editorial Alhambra.
- Pérez Carranza, E. (1969). *Matemáticas. Sexto Curso*. Editorial: Summa.
- Primo, Á. (1987). *Matemáticas C.O.U*. Madrid: S.M.
- Raman, M.(2002). "Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages". *The Journal of Mathematical Behavior* 21(2), pp. 135-150.
- Rey Pastor, J (1933). *Curso Cíclico de Matemáticas. Cálculo Infinitesimal*. Tomo II. Cuenca: Editorial Ruiz de Lara.
- Rey Pastor, J. y De Castro Brzezicki (1963). *Elementos de Matemáticas*. Madrid. Editorial: Saeta.
- Ríos, S. y Rodríguez Sanjuán A. (1966). *Matemáticas sexto curso de bachillerato. Nociones de cálculo infinitesimal y geometría analítica*. Madrid: Editorial Ministerio de Educación y Ciencia
- Sánchez, M^ª T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.
- Segura, S. (1973). *Matemáticas*. Valencia: ECIR.
- Sierra, M, González, M. T. y López, C. (1999). "Evolución histórica de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U)". *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.
- Spivak, M. (1991). *Calculus*. Barcelona: Editorial: Reverté.
- Terrisse Jardi, M y Dávila Garcia-Miranda, M.(1976). *Matemática Curso 2º B.U.P.*, Zaragoza: Editorial Librería General.
- Vizmanos, José R, Anzola, M. y Primo Martínez A. (1981). *Funciones-2 Matemáticas 2º B.U.P. Teoría y Problemas*. Madrid: Editorial S.M.

Vizmanos, José R. y Anzola, M. (1998). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Editorial S.M.

Vizmanos, J. y Anzola, M. (2004). *Algoritmo. Matemáticas aplicadas a las CCSS 1*. Madrid: S.M.