 DOI: 10.24844/EM2902.03

Intertextualidad sobre números negativos en niños de primaria: un acercamiento histórico

Intertextuality about Negative Numbers in Elementary School's Children: An Historical Approach

Aurora Gallardo Cabello[1]
José Luis Mejía Rodríguez[2]
Gil Arturo Saavedra Mercado[3]

Resumen: Se analizan los procesos cognitivos de un estudiante de primaria en relación a las ideas informales con enteros. Se recurre a dos conceptos fundamentales: *la intertextualidad* y los *sentidos de uso* de los negativos. El conocimiento de las ideas intuitivas del alumno respecto a los negativos sienta las bases para guiar una posible instrucción futura, con miras a una introducción temprana de los enteros. Se exponen los conflictos de los matemáticos del pasado con respecto a la aceptación de los números negativos. El análisis semiótico nos permitió observar la perspectiva del estudiante al resolver las tareas planteadas. Este trabajo tiene carácter histórico y permite la comprensión profunda del pensamiento de un alumno de bajo desempeño académico, en su apego a los números naturales, respecto a ciertos temas de los enteros. Se pone al descubierto cómo el alumno solo exhibe el sentido del sustractivo, es decir, el primer nivel de aceptación del número negativo.

Fecha de recepción: 25 de agosto de 2016. **Fecha de aceptación:** 11 de abril de 2017.

[1] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. Instituto Politécnico Nacional, México. agallardo@cinvestav.mx

[2] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. Instituto Politécnico Nacional, México. jlmejia@cinvestav.mx

[3] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. Instituto Politécnico Nacional, México. gsaavedra@cinvestav.mx

Palabras clave: *Números enteros, intertextualidad, historia de los números negativos, educación primaria, semiótica.*

Abstract: We analyze the cognitive processes of an elementary school student in relation to informal ideas with integers. The study is grounded on two fundamental theorical concepts: intertextuality and the senses of use of negatives. The intuitive ideas about negative numbers from this student suggest a possible teaching trajectory for the learning of integers, pointing to an earlier introduction of this concept. In addition, we used semiotic analysis to observe the student's perspective in solving problems. We discuss historical conflicts of the mathematicians in the acceptance of negative numbers. This work has historical character and allows the deep understanding of a student with low academic performance, in his adherence to natural numbers, with respect to integers. We discuss how the student exhibits only the sense of the subtractive, that is to say the first level of acceptance of the negative number.

Keywords: *Integers, intertextuality, history of negative numbers, elementary school, semiotics.*

INTRODUCCIÓN

Investigaciones realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas han reportado grandes dificultades, por parte de los estudiantes de educación básica, en la comprensión de los números enteros, particularmente los enteros negativos. Gallardo (2002), después de un periodo de instrucción recibida por alumnos de secundaria, exhibe las dificultades profundas en la aceptación de la solución negativa en problemas de enunciado verbal. Asimismo el autor indica que, al no haber consolidado el lenguaje algebraico, los alumnos necesitan una justificación en contexto, además de la comprobación de la solución sustituyendo en la ecuación el valor encontrado.

Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle, Lewis (2014) advierten cómo los estudiantes de primaria cometen errores en la resolución de operaciones con negativos, al basarse en ideas intuitivas, tales como identificar el número con la magnitud, o al rechazar estos números. Bofferding (2014) muestra también que algunas dificultades persisten en la conceptualización de los negativos en niños de ese nivel académico, a pesar de haber recibido una instrucción detallada respecto a los enteros, en relación con la naturaleza unaria y binaria del signo "menos".

A pesar de las dificultades detectadas en alumnos de diferentes edades, es perentoria la necesidad de un buen desempeño en el uso de los números enteros, en su conjunto, por parte de los alumnos, para la comprensión futura del álgebra. De hecho, la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros durante el proceso por el cual estudiantes de 12-13 años de edad adquieren el lenguaje algebraico, constituye un elemento esencial para lograr la competencia algebraica en la resolución de problemas y ecuaciones (Gallardo, 2002: 171).

Una lección insoslayable para los profesores es que, históricamente, la aceptación de los números negativos por parte de los matemáticos fue causa de serios conflictos. Estos números pusieron en tela de juicio los pilares esenciales de la filosofía de las matemáticas, obligando de manera implícita a comprenderlas ya no como la ciencia de las cantidades, porque ninguna realidad externa podía asignársele a estos números (Shubring, 1998).

Consideramos que las dificultades que bloquearon la comprensión de este tema en su evolución histórica pueden también bloquear el entendimiento en los estudiantes de hoy. Nuestros mecanismos cognitivos están relacionados de manera crucial con una dimensión histórica conceptual incrustada de manera inevitable en nuestras prácticas sociales y en los signos y artefactos que las median (Radford, 2006: 148). Sin embargo, también debemos aceptar la existencia de diferencias socioculturales entre los alumnos actuales y los matemáticos de pasado.

Es importante mencionar algunas de esas diferencias: los matemáticos del pasado sabían calcular con los números negativos, a diferencia de los estudiantes de hoy, quienes tienen dificultades al respecto. Aquellos tuvieron como obstáculo principal la aceptación de esas entidades que encajaban perfectamente en un cuerpo teórico, pero que no podían recibir el estatus de número porque contrariaban la idea de que las matemáticas debían tener un referente en el mundo físico. Por otra parte, los autores históricos no poseían la tecnología actual de los alumnos de hoy; en fin, aquellos debían descubrir las matemáticas, estos solo intentan comprender y re-descubrir algo que ya existe.

Según Hefendel-Hebeker (1991) el conflicto entre los negativos y las nociones de magnitud ha acompañado la historia de estos números. Insistimos en que Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle, Lewis (2014) encontraron que uno de los obstáculos más importantes que presentan los niños de 6 a 10 años al resolver problemas con enteros es *el n*úmero como magnitud, el cual corresponde al mostrado por los matemáticos del pasado en la aceptación de los negativos. Si los números representaban una cantidad de objetos y los números negativos eran menos que nada, entonces no se puede tener un número de objetos que sea menor que la ausencia de los mismos.

Este trabajo se basa en la hipótesis de que una exposición prolongada de los niños a tareas que solo impliquen números naturales, cimienta los obstáculos desprendidos de la visión del número como magnitud y las correspondientes ideas erróneas, tales como las que suponen que la adición solamente aumenta la cantidad y la sustracción solo la disminuye. Se muestra el surgimiento de estas ideas en un niño de 9 años de edad con bajo desempeño académico, al resolver problemas elementales en relación al valor y orden, y la operatividad con números negativos.

La presente investigación surge de los trabajos sobre álgebra temprana (*early algebra*) donde autores como Butto, Rojano (2010), Radford (2012), y Molina, Castro (2006) reportan avances en la comprensión de temas algebraicos por parte de niños de primaria, particularmente en tópicos como variación funcional, generalización de patrones y la idea de equivalencia del signo de igualdad. Las indagaciones anteriores, y otras acerca de ideas como el valor, el orden y la adición de números enteros por parte de niños de primaria de entre 6 y 10 años de edad (Bishop *et al.*, 2014, Bofferding, 2014), nos condujeron a resultados sobre el aprendizaje temprano de los números negativos, enfocándonos en una perspectiva histórica-semiótica.

Para nuestro caso, elegimos el análisis de los procesos cognitivos informales desde una perspectiva histórica porque creemos en las aportaciones didácticas que nos dejan las lecciones del pasado. También nos hemos decidido por una visión semiótica porque los signos utilizados por los estudiantes no son todos de naturaleza lingüística (Filloy, Rojano, Puig, 2008).

Con base en el problema didáctico de la adquisición conceptual y operativa de los números negativos, así como su posible naturaleza epistemológica, nos proponemos analizar los procesos cognitivos de un alumno de cuarto grado de primaria al resolver tareas elementales, antes de alguna instrucción formal, a través de un análisis histórico y de un estudio semiótico, basado en la noción de intertextualidad.

ANTECEDENTES

Presentamos en este apartado las investigaciones más importantes sobre la didáctica de los números negativos. Glaeser (1981) se propone buscar en las huellas del tiempo los obstáculos que se oponen a su comprensión y aprendizaje. Lo primero que le sorprende es la gran lentitud del proceso para construir el concepto de número negativo. Del análisis de textos en distintas épocas, Glaeser descubre los siguientes obstáculos:

a) Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.
b) Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.
c) Dificultad para unificar los números negativos en una sola recta numérica.
d) La ambigüedad de los ceros, o la dificultad para pasar de un cero absoluto a un cero elegido arbitrariamente.
e) El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Creer que una noción matemática debe tener un referente en el mundo físico que le dé sentido.
f) Deseo de un modelo unificador. La búsqueda de un buen modelo concreto que justifique no solo la estructura aditiva, tal como lo hace el modelo de *ganancias y pérdidas*, sino también la estructura multiplicativa de los enteros, al mismo tiempo y de manera comprensible para los aprendices.

Al respecto, Gallardo (2002) realiza un estudio histórico-epistemológico con la finalidad de analizar la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros en la transición de la aritmética al álgebra, por parte de estudiantes de educación secundaria (12-13 años de edad). La autora pone de manifiesto los diferentes niveles de aceptación de los números negativos en problemas verbales contenidos en textos históricos, a saber:

- Número sustractivo: la noción de número se subordina a la de magnitud (por ejemplo, en $a - b$, a siempre es mayor que b, donde a y b son números naturales).
- Número relativo o dirigido: la idea de cantidades opuestas en relación a una cualidad surge en el dominio discreto, y la idea de simetría aparece en el dominio continuo. Por ejemplo, un déficit es una cantidad opuesta a una ganancia (dominio continuo) y -4 es el simétrico de +4 (dominio continuo).
- Número aislado: es el resultado de una operación, o la solución de un problema o ecuación.
- Número negativo formal: es la noción matemática de número negativo, dentro de un concepto más amplio de número que abarca números positivos y negativos (los enteros de hoy). (Gallardo, 2002: 179).

En la contraparte empírica de esta investigación, Gallardo (2002) descubre que los tres primeros niveles mencionados son alcanzados por estudiantes de secundaria al enfrentar la resolución de problemas matemáticos en textos históricos; el cuarto nivel no es comúnmente logrado por alumnos de esta edad, si bien reconoce que el surgimiento de los niveles es muy dependiente del contexto, es decir, que un estudiante puede presentar el nivel sustractivo para un problema, y el mismo alumno mostrar el número relativo, para otro.

Un resultado importante de Gallardo (2002) es que el lenguaje algebraico, mientras no se encuentre bien establecido en el alumno, no es suficiente para aceptar la solución negativa. El número negativo, solución de un problema o ecuación, requiere aún de una contextualización, o sea una situación cercana a su entorno para otorgar sentido a dicha solución. Ahora bien, para profundizar en el análisis vinculado a las dificultades en la resolución de problemas de enunciado verbal que contienen negativos, Gallardo y Mejía (2015) enfocan esta problemática en la concepción de obstáculo epistemológico.

Brousseau (1981) retoma la noción de obstáculo epistemológico (Bachelard, 1938/2011) para explicar el mecanismo de la adquisición de conocimientos en la enseñanza y el aprendizaje. Los obstáculos epistemológicos no son externos, como la complejidad o fugacidad de los fenómenos, ni se deben a la debilidad de los sentidos; aparecen en el acto mismo de conocer, por una especie de necesidad funcional, como causas de inercia, de estancamiento y de retroceso (Bachelard, 1938/2011).

Brousseau indica, asimismo, que los obstáculos didácticos de origen epistemológico son aquellos a los cuales uno no puede ni debe escapar, por su papel constitutivo en el conocimiento. Se manifiestan por sus errores, que no se deben al azar, no desaparecen de un golpe sino que resisten, resurgen, se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto los ha rechazado. Estos errores, en un mismo sujeto, tienen siempre una fuente común: una manera de conocer, una concepción antigua coherente y correcta que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones. Por tanto, un obstáculo epistemológico es siempre un conocimiento, no una falta de este (Brousseau, 1981).

Gallardo y Mejía (2015), basándose en Brousseau (1981), ponen al descubierto las dificultades de alumnos de secundaria en la aceptación de la solución negativa, a pesar de ya haber recibido instrucción en la operatividad de los números enteros y la resolución de problemas de enunciado verbal. En consecuencia, este estudio confirma a los números negativos como obstáculos de carácter epistemológico.

Por otra parte, Freudenthal (1983) indica que el origen de los números negativos se encuentra en el álgebra de ecuaciones, cuyos métodos de resolución fueron desarrollados y gradualmente automatizados, progresando hacia la extensión de su dominio de validez. Sin embargo, aunque se originaron en una necesidad algebraica formal para la validación general de fórmulas de resolución, fue hasta la algebrización de la geometría cuando los números negativos se volvieron realmente efectivos, tornándose indispensables para describir líneas rectas o curvas. El hecho de que los negativos se hayan introducido no significa que esto fuera suficiente para declarar su existencia, lo cual –dice Freudenthal– es constantemente pasado por alto en la didáctica.

Gallardo y Damian (2011) exploran el plano bidimensional para la introducción de los números negativos en la escuela secundaria, basándose en las ideas de Freudenthal (1983). Este trabajo reporta la necesidad de considerar el principio de permanencia geométrico-algebraico, para una mejor comprensión de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Sin embargo, también exhibe que para un estudiante de bajo perfil académico, el plano cartesiano se convirtió en un obstáculo, no permitiéndole relacionar las expresiones algebraicas elementales y las familias de rectas trazadas en dicho plano.

La historia de las matemáticas puede convertirse en una fuente de ideas para mejorar la enseñanza. La introducción –en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas– del concepto de obstáculo epistemológico destaca la importancia de la dimensión histórica y epistemológica del conocimiento matemático (Thomaidis, 1993). Él mismo se pregunta acerca de la naturaleza de los problemas a través de los cuáles los números negativos obtienen su significado, desde el momento en que empiezan a ser usados sistemáticamente. Esta pregunta de naturaleza epistemológica es fundamental en la elección de las situaciones de enseñanza de estos números.

Lam Lay-Yong (1979) y Gallardo (2002) coinciden al señalar el origen de los negativos en la cultura china, con el uso de números barra, rojos para designar los negativos y negros para los positivos, en un tablero de cálculo donde se resolvían problemas de enunciado verbal. El planteamiento y la resolución de estos problemas se asemejan a los sistemas de ecuaciones de hoy, donde los números se manipulaban ya desprendidos de sus significados concretos.

Otro escrito que menciona las dificultades intelectuales en la comprensión de los números negativos es el de Hefendehl-Hebeker (1991), quien propone el caso del escritor francés Stendhal como ejemplo significativo de esos conflictos. Describe que el escritor nunca encontró, ni en los libros ni en las explicaciones de su maestro, una justificación satisfactoria de la regla de los signos de la multiplicación. Su experiencia con los números negativos incrementó su entusiasmo por las matemáticas, al igual que su permanente respeto por los maestros de esta disciplina.

La autora cita las palabras de Stendhal:

> Imaginen cómo me sentí cuando me di cuenta que nadie podía explicarme porqué menos por menos resulta más. Que esta dificultad no me fue explicada ya era malo para mí. Pero fue peor que me lo explicaran por medio de razones que obviamente no fueron claras ni para aquellos quienes las emplearon. (Hefendehl-Hebeker, 1991: 27).

Las investigaciones hasta aquí mencionadas realizaron trabajo empírico con alumnos de secundaria (12-14 años). Ahora se describe un análisis histórico elaborado por Bishop *et al.* (2014) con niños de primaria (6-10 años) y relacionado con obstáculos y formas productivas de pensamiento en el ámbito de los enteros. Consideramos este trabajo un antecedente directo del presente. Bishop *et al.* (2014) incluyen dos tipos de métodos para la obtención de los datos: un análisis de textos históricos en relación con las dificultades de los matemáticos respecto a la aceptación de números negativos y una serie de entrevistas no estandarizadas con niños de 6-10 años de edad en las que estudian sus formas de pensamiento al resolver operaciones numéricas con enteros, donde los alumnos completan el cuadrito vacío para que las expresiones sean correctas.

Salvando las diferencias que implican las situaciones del contexto histórico y del actual, por ejemplo el hecho de que los matemáticos del pasado sabían calcular con números enteros en situaciones mucho más complejas que las propuestas a nuestros alumnos, pero también considerando que –a diferencia de nuestros estudiantes– ellos no poseían nuestros medios tecnológicos, Bishop *et al.* (2014) descubren similitudes entre los matemáticos de la antigüedad y los niños actuales, no únicamente en forma de obstáculos, sino también como pensamiento creativo (*affordances*[4]) que les permitió superarlos y eventualmente aceptar los números negativos. Estos investigadores encuentran tres obstáculos

[4] Gibson (1986) explica esta palabra con un ejemplo: una silla, un estante e incluso una piedra pueden permitir sentarse, solo si se percibe que el objeto puede usarse para eso. Bishop *et al.* (2014) entienden el término como una forma de razonamiento, por parte de los niños, que los conduce al éxito en la resolución de problemas con enteros, o que les ofrece la habilidad sin la cual no serían capaces de hacerlo.

en los textos históricos: El número como magnitud, Quitar más de lo que se tiene y Situaciones contra-intuitivas en relación a la adición y sustracción. Asimismo, proponen cuatro vías para superarlos: Razonamiento de cálculo, Razonamiento basado en el orden, Necesidad lógica de formalismos y Magnitud. Como puede apreciarse, la magnitud es tanto un obstáculo como una posibilidad de inducir a una acción.

LA PERSPECTIVA TEÓRICA

El enfoque semiótico

Este trabajo se fundamenta en dos conceptos teóricos: la *intertextualidad* y los *sentidos de uso* de los números negativos. Ambas nociones son de carácter semiótico, aunque la segunda tiene también carácter histórico. Para comprender la intertextualidad debemos referirnos a los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) (Filloy *et al.*, 2008), que involucran las ideas de texto, espacio textual, significado y sentido. Estos conceptos parten de las nociones de Peirce (1982) en relación con el signo, donde se otorga un papel fundamental a los procesos, más que a los propios signos.

Al dar importancia a los procesos Peirce (1982) considera que el signo no representa el clásico par significado/significante, sino que pertenece a una relación triádica donde uno de los componentes es el interpretante, es decir, la cognición producida en alguna mente. Dicha relación se establece entre el signo (S), su objeto (O) y una mente, el interpretante (I), en la cual el signo se relaciona con su objeto de tal forma que este (el signo) se puede tratar como si fuera el otro (el objeto).

Los fenómenos ocurridos en los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas se deben estudiar a partir de la semiótica y no desde la lingüística, porque no todos los signos utilizados por los estudiantes en dichos procesos son de naturaleza lingüística, y la semiótica es la ciencia de los signos en general. Además, dichos fenómenos pueden considerarse procesos de significación y comunicación, y es precisamente con procesos de ese tipo con los que trata la semiótica (Filloy *et al.*, 2008). Es justamente desde estas ideas que Filloy *et al.* (2008) proponen la noción de Sistema Matemático de Signos (SMS).

Los SMS implican que los textos producidos por los alumnos, cuando están aprendiendo algún contenido matemático, se componen de signos heterogéneos.

Para los procesos de significación deja de ser importante la distinción entre los signos de naturaleza estrictamente matemática y otros, como aquel de algún lenguaje vernáculo. Lo importante es tomar al sistema de signos como un todo, de tal forma que lo considerado matemático es el sistema y no los signos individualmente, pues es el sistema el responsable del significado de los textos. De ahí, el poner énfasis en los signos individuales oculta el hecho de que en ningún texto, matemático o no, existen signos aislados (Puig, 1994).

Para comprender la idea de SMS deben aclararse las nociones de texto, espacio textual, significado y sentido. Filloy *et al.* (2008) advierten que la palabra texto, en calidad de noción semiótica, no debe entenderse como un texto escrito comúnmente conocido, sino que es *el resultado de una labor de lectura/transformación realizada sobre un espacio textual* (Talens y Company, 1984: 32). Esta manera de entender el texto nos permite analizar una práctica de producción de sentido. De hecho, el objetivo de la lectura/transformación no es extraer un significado inherente al espacio textual, sino producir sentido. Por su parte, el espacio textual tiene una existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a la persona que lo lee; el texto, una nueva articulación del espacio textual hecha por una persona como el resultado de un acto de lectura, es individual e irrepetible.

Además, la condición de texto y espacio textual es intercambiable, porque una vez realizada la lectura/transformación sobre el espacio textual, el resultado –el texto– funge otra vez como espacio textual para un nuevo lector. Filloy *et al.* (2008) indican que los procesos educativos son esencialmente procesos de comunicación y producción de sentido, de donde se sigue que leer/transformar un espacio textual o un modelo de enseñanza, usado para el proceso de enseñanza/aprendizaje de contenidos matemáticos, significa fundamentalmente producir sentido y no necesariamente obtener un significado.

La intertextualidad

Al centro de todos estos conceptos semióticos se encuentra la noción de intertextualidad. Según Rojano *et al.* (2014), el término intertextualidad es antiguo, surge alrededor de los años 1960, pero esta idea es nueva en los procesos educativos si la consideramos como una noción teórica útil en el análisis de las producciones textuales de los estudiantes en los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Su utilidad proviene de suponer la naturaleza histórica, social y cultural de las relaciones de un texto con otros textos. La intertextualidad no es simplemente una relación entre textos separados, sino que se produce dentro de un solo texto (Rojano *et al.*, 2014), y es la forma en la cual un texto lee la historia y la inserta dentro de sí mismo (Kristeva, 1969).

A partir de la noción de intertextualidad –la cual asegura que en cada texto hay una red de otros textos pertenecientes a una cierta cultura, sociedad y época histórica determinadas–, puede derivarse el concepto de intertexto de un texto concreto, para referirse al campo de textos con el cual dicho texto interactúa dentro de sí mismo (Rojano *et al.*, 2014). Si recordamos la idea de texto (Filloy *et al.*, 2008) no como el texto escrito convencional, podemos ya percibir el poder de este nuevo concepto en el análisis de las actuaciones de los estudiantes al resolver situaciones problemáticas, con la finalidad de volverse competentes en ciertos contenidos matemáticos. Es el intertexto, la red de textos con los cuales el texto se relaciona dentro de una cultura o comunidad, lo que posibilita leerlo. Descubrir los distintos textos con los cuales el texto interactúa, permite entender claramente la actuación de un estudiante.

Rojano *et al.* (2014) aclaran que para estudiar los procesos de enseñanza/aprendizaje es necesario mirar al intertexto no solo como la posibilidad de leer un texto en una cultura o comunidad, sino también de leerlo como persona. Esto nos permite tomar en cuenta los textos que un individuo en particular enlaza al texto a cuya lectura se enfrenta, con la finalidad de producir sentido. Es el intertexto personal el que le ofrece a un lector, a un estudiante específico, la posibilidad de realizar la lectura/transformación del texto que se constituye como espacio textual. Más adelante, en el análisis de las producciones de los estudiantes, se clarifican estas nociones semióticas.

El enfoque histórico

Para Filloy (1999), los fenómenos correspondientes a los procesos educativos de las matemáticas deben estudiarse desde cuatro componentes interrelacionados: la competencia formal, los procesos cognitivos, la enseñanza y los procesos comunicativos. La *enseñanza* se realiza mediante modelos, ya sean concretos o formales, con los cuales el aprendiz intentará volverse *competente* respecto a los contenidos matemáticos en cuestión. En este proceso, el estudiante despliega una serie de estrategias relativas a sus *procesos cognitivos*, realizando la codificación y descodificación de los textos que componen el modelo de enseñanza vía un proceso de *comunicación* entre el aprendiz y el enseñante, y donde este también debe contar con competencias para descodificar el texto que el estudiante ha producido.

Filloy señala, asimismo, que deben construirse modelos para cada uno de los cuatro componentes cuando se analizan las actuaciones de los estudiantes en los procesos de enseñanza/aprendizaje, de manera que al examinar sus interrelaciones se arroje luz sobre el fenómeno estudiado. Lo que permite hablar del modelo de competencia o del modelo de los procesos cognitivos, y comparar el desempeño de los estudiantes con el del modelo. En sus estudios sobre el álgebra educativa Filloy señala que los alumnos muestran una serie de situaciones cuando están tratando de pasar de un estrato de SMS más concreto a uno más abstracto, con el fin de volverse competentes en el uso del lenguaje algebraico. A dichas situaciones las llama *tendencias cognitivas* debido a su estabilidad, entre las que se encuentra la Tendencia Cognitiva Dos*: Dotación de sentidos intermedios,* la cual significa que los estudiantes, antes de llegar al significado formal de los contenidos matemáticos, otorgan diversos sentidos de acuerdo con su campo semántico personal, proveniente de su experiencia.

Los sentidos de uso de los negativos

Retomando la Tendencia Cognitiva Dos, Gallardo (2002) explica los niveles de aceptación del número negativo, a los cuales denomina *sentidos de uso*, término que corresponde a la semiótica y señala la forma de cómo un sujeto se apropia del significado de los números enteros. Pone de manifiesto, como se ha mencionado, que en el transcurso de la historia, los matemáticos mostraron cuatro niveles de aceptación; los primeros tres fueron exhibidos también por alumnos de secundaria. Estos sentidos de uso proporcionan el carácter histórico al presente documento y constituyen una herramienta teórica fundamental en el análisis de las producciones de nuestro sujeto de estudio.

El surgimiento de estos sentidos de uso, depende del contexto de la tarea planteada.

EL MÉTODO

La presente es una investigación de tipo cualitativo, en la que ponderamos la entrevista en profundidad como el principal instrumento metodológico. Esta clase de entrevista consiste en encuentros cara a cara entre el investigador y el participante; se asemeja más a una situación entre iguales que a un intercambio formal de preguntas y respuestas, donde no es el protocolo de la entrevista sino el mismo investigador quien se convierte en el instrumento de investigación: él es quien debe saber qué y cómo preguntar (Cohen, Manion, Morrison, 2007).

En las investigaciones de tipo cualitativo es importante la validez del estudio, que se obtiene mediante la llamada triangulación de métodos, consistente en aplicar dos o más métodos de recogida de datos para trazar o explicar de manera más completa la riqueza y complejidad del comportamiento humano; la aplicación de un solo método proporciona una visión limitada de dicha situación. La validez se asegura cuando la triangulación produce en esencia los mismos resultados. Es más, el uso de métodos de contraste asegura que los hallazgos considerados consistentes, no se deban a la semejanza de los métodos (Cohen, Manion, Morrison, 2007).

Usamos dos instrumentos de recolección de datos: el cuestionario y la entrevista en profundidad; ambos fueron sometidos a una prueba piloto con dos niños de la misma edad y nivel escolar que los del grupo de estudio, pero que no pertenecen al mismo. La finalidad del pilotaje de los instrumentos fue, por un lado, medir el tiempo y, por otro, conocer la comprensión de las instrucciones proporcionadas, entre otros detalles. Gracias a esta prueba se determinó eliminar del cuestionario algunos ítems, tales como la resolución de problemas de enunciado verbal o aquellos que requerían expresar un problema dada una operación, porque los estudiantes o bien no los resolvían, o lo hacían con números naturales. De esta manera se incrementó el número de operaciones en cuanto a su variabilidad. Cabe mencionar que en el protocolo de entrevista sí se incluyen problemas de enunciado verbal, ya que en situación de diálogo es posible conducir a los alumnos hacia su resolución, además de advertir la forma en que la llevan a cabo.

El cuestionario definitivo consta de 30 preguntas acerca de los siguientes temas: orden, valor numérico, adición y sustracción de números enteros. El protocolo de entrevista definitivo contiene los mismos temas aunque, como ya se mencionó, se agregaron problemas de enunciado verbal y representación de situaciones con números enteros. Algunos ejemplos de las preguntas incluidas en el cuestionario y/o en el protocolo de entrevista son los siguientes:

De valor y orden:

1. Ordena los números de manera que vayan del más chico al más grande:
   2, -3, 0,-9, 3, 8, -5

2. Encierra el número que sea mayor o escribe el signo = si son iguales:
   -5 -15

De operatividad:

1. ¿Cuál es el número que sumado a 5 resulta 2?___________
2. Escribe en el espacio el número correspondiente para que la operación sea correcta: 6 + _____ = 4
3. Resuelve correctamente la operación: -11 + 6 =

Problemas de enunciado verbal:

1. En una ciudad la temperatura se encontraba a 9 grados por la tarde, para la noche bajó 17 grados. ¿A qué temperatura se encontraba en la noche?

El escenario de la investigación es una escuela primaria pública de la Delegación Iztapalapa en la Ciudad de México, con nivel socioeconómico bajo. El cuestionario fue aplicado a un grupo de cuarto grado (9-10 años) del turno vespertino, compuesto por 14 estudiantes de ambos sexos, quienes lo resolvieron individualmente por escrito y simultáneamente en un mismo espacio durante 40 minutos, aproximadamente. Elegimos tres alumnos de diferente nivel de desempeño para hacer entrevistas individuales video-grabadas, con duración de 45-60 minutos.

En este trabajo reportamos las producciones del alumno de bajo rendimiento porque presenta mayor cantidad de ideas informales acerca de los números enteros, y permite analizar los intertextos de un sujeto con escaso conocimiento formal de los números negativos. Nos centramos en el componente de los *procesos cognitivos... que dan preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar los mensajes matemáticos... diferentes estrategias para resolver problemas* (Filloy, 1999: 5). Consideramos también las producciones verbales y escritas del estudiante, plasmadas en el cuestionario y el protocolo de la entrevista.

Nuestro modelo de los procesos cognitivos está constituido por los *sentidos de uso* de los números negativos: número sustractivo, número signado, número relativo y número aislado. Los alumnos que logran ser competentes en el manejo de los números enteros, conceptualizan de manera amplia estos cuatro niveles (Gallardo, 2002).

El modelo de competencia está formado por los contenidos de los libros de texto de secundaria y del programa de estudios, ya que –como dice Filloy (1999)– están escritos en un SMS más abstracto, lo cual permite interpretar lo que realizan los estudiantes. El componente de enseñanza entrará en juego en la segunda fase del estudio, donde se pretende poner en marcha una *ruta didáctica* (Gallardo y Basurto, 2009). Por el momento, nos conformaremos con describir los intertextos de los alumnos con respecto a los números enteros.

El componente de comunicación que aquí se propone es, precisamente, el concepto de intertextualidad como una noción muy apropiada para descodificar y explicar los mensajes emitidos por los estudiantes cuando se enfrentan a un campo numérico desconocido o poco conocido. Esta fase es importante para el diseño de la ruta didáctica, y para no hacer suposiciones acerca del conocimiento de los números enteros por parte de los niños de cuarto grado de primaria. Como vimos anteriormente, la noción de intertextualidad está en el centro de las otras nociones semióticas, y es plausible porque de lo que se trata es de observar cómo los alumnos de primaria otorgan sentido a los enteros.

A continuación exhibimos el análisis intertextual de las producciones del alumno con bajo desempeño, basándonos en Rojano *et al.* (2014) y señalando los intertextos personales, es decir los textos producidos por él, imbuidos de sentido por medio de su entretejimiento intertextual con otros textos, producidos previamente. Además, señalamos los *sentidos de uso* (Gallardo, 2002) dados por el estudiante a cada una de las tareas relacionadas con los siguientes temas: el límite del dominio numérico, valor numérico y orden, adición y sustracción, y resolución de problemas verbales. Los ítems se obtuvieron, con algunas modificaciones, de Bishop *et al.* (2014), Bofferding (2014).

Se designa con *A* al alumno y con *E* al entrevistador en los diálogos de la entrevista.

LOS RESULTADOS

El límite del dominio numérico

Los ítems correspondientes a este tema fueron diseñados para detectar si el alumno es capaz de ir más allá del cero. El patrón en el cual descienden las series numéricas es fácil de hallar, sin embargo, para asegurarnos de que dicho patrón no era el impedimento, diseñamos el de contar de regreso de uno en uno.

Tarea 1. En cada inciso escribe los números que siguen:

a) 12, 9, 6, 3, ______, ______.
b) 10, 8, 6, 4, ______, ______, ______, ______.

A: Es que van de tres en tres, pongo el cero (en el primer espacio), *pero ¿aquí que pondría?* (en el segundo espacio).
E: Pues... lo que tú creas que es correcto.
A: La verdad no sé qué poner.
E: ¿Se te ocurre algo?
A: Yo creo que irían cincuenta.
E: ¿Por qué cincuenta?
A: Porque van de tres números y después del cero siguen cincuenta, ¿no? Cincuenta centavos.
E: ¡Cincuenta centavos!, ¿y en el inciso b)?
A: Van de dos, después el siguiente es cero, después diez centavos, después veinte.
E: A ver, otra vez, empieza en diez, sigue ocho, luego seis, cuatro, ¿qué número seguiría?
A: El cero, ¡ah, no!
E: ¿Entonces?
A: El dos.
E: ¡Claro! ¿Y luego?
A: El cero.
E: ¿Y en los siguientes espacios?
A: (Escribe: 10, 20).
E: ¿Por qué escribiste diez y veinte?
A: Porque aquí van de dos, después sigue el cero, después empiezan los centavos.

Al no conocer los números negativos, el estudiante no tiene la posibilidad de recurrir a un texto relacionado con este ámbito numérico. Entonces apela a un texto proveniente de las ventas, donde existen los centavos para dar cambio. Una posible explicación al comportamiento del niño se presenta en el hecho de que su familia se dedica al comercio. Sin embargo, referir este intertexto es solo un intento para explicar su actuación, porque los niños en general tienen contacto con situaciones monetarias. El alumno no se percata de su error al suponer que 50, 20 o 10 centavos son menores que cero. Este error proviene del límite de su dominio numérico. Además, al intentar ingresar a los negativos, ya no sigue el patrón descubierto en los naturales.

Tarea 2. Empieza en cinco y cuenta hacia atrás en voz alta hasta donde puedas.

A: Cuatro, tres, dos uno, cero.
E: Cuenta más atrás aún.
A: No puedo.
E: ¿Por qué?
A: Porque... porque es el último número de... es el último número del... es el menor número de todos.

El texto al cual recurre el estudiante es al de los números naturales y el cero. En la historia de la aceptación de los números negativos, los matemáticos del pasado consideraban que no podían existir números menores que la nada. Los números, en general, se admitían como magnitudes, entidades que servían para contar objetos, por tanto, no podía existir un número de objetos menores que la nada (Bishop *et al.*, 2014).

Valor numérico y orden

Respecto al primer ítem, el alumno resolvió 10 incisos de comparación de números. Presentamos solo los ítems donde su razonamiento es diferente. Debido al probable desconocimiento de los símbolos de comparación, solamente se indicó el uso del signo "igual", y se pidió encerrar el número que consideraran mayor. Además de la comparación, a la que llamamos valor numérico, se trataba de conocer la competencia de los niños para ordenar números dentro y fuera de la recta numérica.

Tarea 1. Encierra en un círculo el número que sea mayor o escribe el signo = si las cantidades son iguales.

a) 0 -7

E: En el primero pusiste que los dos números (0 y -7) *son iguales. ¿Por qué?*
A: Porque el menos siete es como si lo restaras y se vuelve cero.

E: ¿Cómo si lo restaras de qué?
A: Como si restaras siete menos siete.

Aquí el estudiante recurre a un texto enseñado en la primaria: la resta de números naturales. En este ítem el signo "menos" conduce al alumno a inventar una resta para darle sentido a estos números. Lo interesante es que el sujeto, en lugar de ver -7 como 0 − 7, como lo hacen comúnmente los alumnos de secundaria (Mejía, 2009), lo equipara con la sustracción 7 − 7, dando por hecho que el *lugar vacío* de la sustracción es el mismo número. Sin embargo, en otro ítem sí recurre a ver *el espacio vacío* como cero.

Surge en este intertexto el número negativo como *número sustractivo*, representado por la sustracción 7 − 7, donde el *signo menos* se usa solo para restar cuando el minuendo es mayor o igual al sustraendo, y ambos son números naturales.

b) -100 -5

E: En el siguiente consideras que este (-5) *es mayor que éste* (-100). *¿Por qué?*
A: Porque este es menos cien y es como si restaras por cien, se convierte en cero y este (-5) *es como si lo restaras por... cero, se vuelve cinco otra vez.*

Nótese nuevamente el intertexto de la resta de números naturales pero, a diferencia del ejemplo anterior, en este el alumno considera el número -5 como la sustracción 5 − 0, llenando el vacío con cero, y enseguida realizando una lectura de derecha a izquierda. El número -100 lo entiende como lo había hecho en el inciso anterior con -7. Estos son los textos a los que el estudiante logra recurrir para dar sentido a estos números.

c) -8 5

E: Ahora, ¿por qué dices que el cinco es mayor que el otro número?
A: Pues, igual que antes, es como si restaras menos ocho (señala -8) *y este* (5) *sigue siendo el mismo.*

Para el alumno los números naturales, el texto ya conocido, actúan de forma normal, *siguen siendo los mismos*, pero si se acompañan del *signo menos*, o bien se deben sustraer de sí mismos o se debe sustraer de cero. Estas situaciones son las únicas que pueden darle sentido a los números con *signo menos*.

Tarea 2. Ordena las siguientes tarjetas numéricas del número menor al mayor.

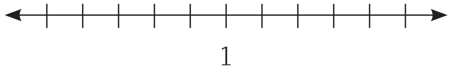
2	−3	0	−9	3	8	−5

a) ¿Cuál es el número más grande?
b) ¿Cuál es el más chico?

E: Ahora ordena de menor a mayor las tarjetas numéricas, o sea del número más chico al más grande.
A: (Ordena las tarjetas: 0, 2, 3, al llegar a este número, pregunta): *¿Esta podrá estar aquí?* (Se refiere a la tarjeta -3).
E: De hecho, tú las puedes ordenar como creas que está bien.
A: (Coloca las tarjetas con naturales en una línea: 0, 2, 3, 8; arriba, en otra línea coloca -3, -5, -9, alineando el 3 con el -3).
E: ¿Por qué las ordenaste en dos filas?
A: Porque aquí (señala la fila de abajo) *es como si fueran en más y aquí como si fueran en menos* (señala la fila de arriba).
E: ¿Podrías ordenarlos en una sola fila?
A: (Ordena las tarjetas: 0, 2, 3, -3, -5, 8,-9).
E: Explícame por qué las ordenaste así.
A: Porque usted me pidió del más chico al más grande y así debe ir la hilera.

Vemos que el estudiante recurre a un texto del orden de los números naturales, aunque hace la diferencia entre los que *son normales* (los naturales) y los que llevan un *signo menos*. Aunque no existen números positivos, él insinúa que los naturales son de una clase (*como si fueran en más*) diferente a la otra que contiene el *signo menos* (*como si fueran en menos*). No puede decirse que el alumno entienda estos números como *números signados*, pues no habla de positivos y negativos sino que más bien, como lo ha hecho anteriormente, recurre al texto de las operaciones de la adición y sustracción, entendiendo que si al negativo lo ve como sustractivo, al natural le asigna la etiqueta de suma.

Tarea 3. Escribe los números que faltan en la recta numérica.



E: Resuelve el siguiente.

A: (Silencio).

E: Fíjate que solo está escrito el uno y te pide escribir los que faltan.

A: ¿Cómo lo hago?

E: Como tú creas.

A: O sea tiene que quedar de uno en uno, así, cinco, cuatro, tres, dos, uno (señala las marcas de derecha a izquierda, pero se da cuenta que no queda en 1)... *o, seis, cinco, cuatro, tres, dos, uno* (esta vez sí queda en 1).

E: (Silencio).

A: Pero... ¿puedo ponerlos así en la misma forma los dos? (señala ambos lados de la recta en las que el 1 la divide).

E: Si quieres...

A: (Escribe los números 6, 5, 4, 3 y 2 en la recta, de derecha a izquierda, cuando llega a 1 se detiene largo tiempo). *¿Puedo poner los mismos?*

E: (Silencio).

A: (Escribe: 6, 5, 4, 3, 2, de izquierda a derecha).

E: ¿Por qué los colocaste de esa forma?

A: Yo lo tomaría así como si esto fuera de más a menos: seis, cinco, cuatro, tres, dos, uno (recorre su dedo del 6 al 1, del lado derecho) *y esto como si fuera de...* (recorre su dedo del 1 al 6, del lado izquierdo), *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.*

El desconocimiento de los números negativos conduce al estudiante a *reflejar* los números naturales tomando como eje de reflexión el número 1. Se puede notar que este problema es particularmente extraño para el alumno, lo cual indica que no conoce o conoce poco la recta numérica, es decir que los textos con los cuales puede vincular esta situación son escasos. Por un lado, liga el problema al orden de los números naturales en la parte derecha de la recta, sin embargo, esto no significa que conozca el orden en la recta, ya que no ubica el cero. El otro texto al que vincula la cuestión es el de la simetría de figuras geométricas respecto a un eje, viendo la recta numérica como una figura reflejada respecto al 1 como eje de simetría.

Adición y sustracción de enteros

A continuación se exhiben 6 de las 10 operaciones puestas a los niños en quienes se pueden notar procesos cognitivos diferentes; en el resto, las concepciones y estrategias de resolución se repiten. Se quería observar cómo reaccionaba el estudiante ante operaciones de *números con signo*.

Tarea 1. Escribe en el cuadrito vacío el número que falta para que la operación sea correcta.

Las operaciones son analizadas por bloque, según el tipo de razonamiento y operación.

a) $3 - 4 = \boxed{}$

b) $\boxed{} - 7 = -3$

c) $0 - 2 = \boxed{}$

E: ¿Por qué en la primera resultó cero?
A: Porque no se puede restar tres menos cuatro.
E: En la siguiente le pusiste cuatro. ¿Por qué?
A: Porque si restas cuatro menos siete te daban tres.
E: Luego aquí (señala la siguiente operación) *el resultado es cero. ¿Por qué?*
A: Porque cero menos dos, cero.
E: Entonces, ¿cuánto es dos menos cero?
A: (Silencio).
E: Si te pongo esta (escribe 2-0=), *¿cuánto daría?*
A: (Silencio prolongado).

En los incisos a) y c) el estudiante no puede recurrir a ningún texto que solucione las operaciones. Las vincula con la sustracción de números naturales, en su acepción de *quitar*, donde al quitar todo lo que se puede, resulta cero. Nótese que cuando E lo confronta a observar los resultados de $0 - 2$ y $2 - 0$, surgen mecanismos inhibitorios. Sin embargo, en el inciso b), donde es el minuendo el que falta, no razona de esta manera, aunque el intertexto sigue siendo el mismo (la sustracción de naturales) procede con una lectura de derecha a izquierda (intercambiando el minuendo por el sustraendo) e ignora el *signo menos* del resultado, para darle sentido a este problema. El razonamiento del alumno en los incisos a) y c) corresponde al obstáculo histórico en la aceptación de los negativos que Bishop *et al.* (2014) denominan *Quitar más de lo que se tiene*.

d) $-11 + 6 = \boxed{}$

e) $-5 - -2 = \boxed{}$

E: Ahora, en la primera, ¿por qué pusiste seis?
A: Aquí (señala -11) *es como si restara por sí mismo y… más seis es seis.*
E: ¿Y la que sigue por qué es cero?
A: Si a los dos los restas por sí mismos (se refiere al minuendo y sustraendo)… *quedan ceros, cero menos cero, queda cero.*

Reaparece el intertexto del negativo como número sustractivo, convirtiendo a -11 en 11 − 11, pero ahora el estudiante también recurre a otro texto, al de la propiedad del neutro aditivo, por lo cual -11 que se convierte en cero al sumarlo con 6, el resultado es 6. Utiliza este mismo tipo de razonamiento para resolver el inciso f), donde se esperaba que el alumno viera los negativos como magnitud para poder efectuar la resta.

f) $6 + \ = \boxed{} \quad 2$

E: ¿Por qué escribiste seis en el espacio?
A: Porque seis más seis son doce.
E: Pero el resultado no es doce, es dos.
A: El uno no se ve, pero ahí está.
E: ¿Cómo es que no se ve?
A: Porque solo así puede encontrarse el resultado.

En este diálogo se nota claramente el intertexto. La interpretación a la que recurre el estudiante tiene que ver con el algoritmo de la adición de números naturales. Al no encontrar el sentido de esta operación, el alumno imagina un 1 inexistente al lado del 2, para formar 12, con lo cual *se puede* realizar la adición. Sin el número agregado imaginariamente, la operación no tiene sentido en los números naturales. Bishop *et al.* (2014) encontraron que algunos matemáticos en la historia mostraron este mismo problema, obstáculo que ellos llamaron *situación contra-intuitiva respecto a la adición.*

Problemas de enunciado verbal

Se presentan dos problemas de enunciado verbal: el primero, una situación en el contexto de las *deudas*, cuya resolución en los números naturales no genera ningún tipo de dificultad; el segundo es de carácter histórico, resuelto por el matemático D´Alambert en el siglo XIX. Se pretendía observar si el contexto de las deudas conduce al niño a plantear una operación con negativos o, al menos, a equiparar las deudas con esos números, en el primer caso, y observar si la imposibilidad de la solución con un número natural, en el segundo, lo acerca a los negativos.

Tarea 1. Lee la siguiente situación.

Ayer tú le prestaste $8.00 a tu amigo para comprar estampas. Hoy le prestaste nuevamente $5.00 para completar para su almuerzo. ¿Cuál es la situación actual?

a) Escribe una operación que describa esta situación.
b) Algunas operaciones que otros estudiantes escribieron para describir ese hecho son las siguientes. Escribe SI frente a la operación si crees que describe la situación y NO si crees que no la describe.

-8 + -5 = -13	
8 + 5 = 13	
-8 − 5 = -13	

E: Te indica que escribas una operación que describa esa situación.
A: O sea que saque... lo que me debe, ¿no?
E: Sí.
A: (Escribe: 8
+
5
13)

E: ¿Por qué pusiste esa operación?
A: Porque si el primer día le presté ocho pesos y a los otros dos días le volví a prestar cinco pesos, podría hacer una suma y saber cuánto es lo que me debe.
E: Ahora te pide que pongas Sí o No frente a cada operación. Sí, si tú crees que esa operación describe la situación, y No, si crees que no la describe.
A: Escribo los resultados.
E: No, ya están las operaciones resueltas, que escribieron otros estudiantes, solo tienes que poner Sí o No frente a ellas.
A: (Resuelve).
E: ¿Por qué la primera dice No?
A: Porque es ocho menos (señala el -8 de la operación), *como si se restaras por él mismo y* (señala el 5) *es como si sumaras por cinco, no puede salir trece.*
E: ¿Por qué la siguiente dice Sí?
A: Porque sumas y ahí no tiene resta (se refiere al signo), *sumas ocho más cinco, igual a trece.*
E: ¿Y la última?
A: Es igual como expliqué en la otra (se refiere a la primera adición del cuadro), *no daría trece.*

En la resolución de este problema es incluso *natural* que el alumno recurra al algoritmo de la adición de números naturales, ya que es posible obtener la solución correcta mediante este procedimiento. Esto nos indica que el contexto *deudas*, o sea las palabras *deber-tener,* no conducen al niño a resolver el problema con números negativos. Esto no es de extrañarse, ya que incluso estudiantes de secundaria y en contextos más *cercanos* a los negativos, tales como la temperatura, resuelven los problemas en el campo de los números naturales, no viendo una razón para hacerlo de otra forma (Bruno, Martinón, 1997). Por otra parte, se exhibe nuevamente el *número sustractivo* cuando el alumno indica que las otras expresiones (las de la tabla, con números enteros) "tienen resta", es decir, el *signo menos* lo entiende como la operación de sustracción.

Tarea 2. ¿Cuál es el número que sumado a 100 resulta 50?

A: (Silencio).
E: Que tal si te pregunto: ¿Cuál es el número que sumado a seis resulta ocho?
A: Dos.
E: Muy bien, eso es lo que te pregunta.
A: Podría ser cincuenta ¿no?

E: ¿Por qué?
A: Porque es restado o sumado y te da cincuenta.
E: Sumado…
A: Es como si fuera una resta y como son cien, para que te de cincuenta faltan… cincuenta.
E: Pero ahí dice sumado… Entonces qué número le debes sumar a cien para que te dé cincuenta.
A: ¿Qué número le tengo que sumar a cien para que me dé cincuenta? (sorprendido)… *Pues… cincuenta menos* (agrega el signo − a 50).
E: ¿Cómo se te ocurrió?
A: Porque para que me dé cincuenta (señala 50), *tengo que poner cincuenta menos* (-50), *para que me dé… cincuenta.*
E: ¿Podrías explicarme?
A: Porque cuando dice sumar cien, que te dé el resultado cincuenta, nunca puedes sumar a un número… que te dé cincuenta, a fuerzas tienes que restar para que te dé cincuenta.

En un primer momento, el estudiante inventa una disyuntiva inexistente en el enunciado de problema, indicando que puede sumar o restar, por tanto la respuesta es cincuenta. Incluso en un segundo momento, al insistir el entrevistador en que se trata de una suma, el niño transforma la adición que representa el problema en una sustracción. Esta actitud del alumno corresponde a la del matemático histórico D'Alambert, quien decía que la solución negativa indicaba algún defecto en el enunciado de este problema, por lo cual el enunciado debía decir ¿Cuál es el número que restado a 100 resulta 50?, donde el número negativo no existiría más (Gallardo, 2002).

En un tercer momento el alumno da una respuesta correcta al problema, aunque usando la expresión *cincuenta menos*. Aquí es donde se observa la utilidad de la intertextualidad en la educación matemática, porque cuando el entrevistador espera una explicación basada en los números negativos, el estudiante *recurre al texto del número sustractivo*, indicando que esa operación es imposible y viendo al signo menos como el *signo* de la sustracción.

REFLEXIONES FINALES

El análisis de las producciones realizadas por un estudiante con bajo desempeño en situación de entrevista, pone de manifiesto la relevancia de recurrir a la noción teórica de intertexto, para comprender por qué los alumnos resuelven de determinada manera las tareas que enfrentan. En todos los casos presentados, el alumno recurre a textos ya conocidos para tratar de otorgar sentido a un campo numérico por él desconocido. La importancia de identificar los intertextos a los cuales los estudiantes recurren radica en el hecho de que nos permiten comprender sus procesos cognitivos y, por ende, saber cómo los enfocan al resolver el problema. Todos los textos a los que recurre el alumno, al enfrentar por primera vez tareas con números enteros, pertenecen al campo de los números naturales.

El análisis intertextual revela que el único texto al que se acoge el estudiante entre los sentidos de uso de los negativos, es aquel al que recurrieron los matemáticos históricos en los inicios del desarrollo de la conceptualización de los negativos: el número sustractivo, es decir, entender que el negativo únicamente funciona como una sustracción, donde el minuendo es mayor que el sustraendo y ambos son números naturales. Frecuentemente el alumno se refería a los números negativos como una sustracción cuyo minuendo es el mismo número. En consecuencia, el número relativo y el aislado no surgen en ninguna ocasión. Además, el pensamiento del niño, con ideas intuitivas acerca de los números enteros, coincide algunas veces con los obstáculos que los matemáticos históricos enfrentaron en la aceptación de los números negativos, en particular con aquellas denominadas: *situaciones contra-intuitivas acerca de la adición,* y *no se puede quitar más de lo que se tiene.*

El niño de bajo desempeño académico mostró las ideas de que la adición no puede disminuir la cantidad y la sustracción no puede aumentarla; también resolvió diversas situaciones basado en la noción de que los números representan solo cantidades y se usan para contar objetos, mostrando el nivel de *número sustractivo* como los matemáticos históricos, cuando la idea de negativo como número aún estaba en proceso.

Tal como se plantea en la hipótesis, este estudio exhibe cómo un niño con una exposición de cuatro años a una educación matemática referida solamente a los números naturales, genera obstáculos para entender los números negativos; por ello, proponemos una introducción temprana de este ámbito numérico. Hasta ahora no hemos encontrado estudios de esta naturaleza, tampoco aquellos que analicen las dificultades de los alumnos con los números negativos post-enseñanza, en este grado escolar.

El límite del dominio numérico del estudiante es el cero, porque entiende el número como magnitud (otro obstáculo histórico), pensando que no puede haber cantidades menores que nada, ya que no se puede contar un número de objetos menor que cero. En cuanto al valor numérico, el alumno recurre a dos textos: ver cualquier número negativo como la sustracción de su valor absoluto por sí mismo, o bien como la del valor absoluto al cual se le sustrae cero.

Por su parte, el orden de los números enteros es el mismo que el de los naturales. Por supuesto, el alumno percibe que no todos los números de la serie son completamente iguales, por lo que en un primer momento los coloca en dos clases: los que *están en más* y los que *están en menos*. Cuando el entrevistador pide colocarlos en una sola fila, se percibe claramente que el estudiante entiende el orden de los enteros igual que el de los naturales, ignorando el signo "menos" de algunos números e indicando que 0 es el menor número de la serie y el -9, el número mayor. En esta situación de orden, no vemos la estrategia empleada anteriormente, con la cual reconocería el -9 como $9 - 9$ o como $9 - 0$, como lo hizo con los problemas de valor numérico. Véase que tampoco la recta numérica le ayuda a ordenar los números negativos, pues desconoce su ubicación en la misma.

En cuanto a las operaciones con cuadrito vacío, además de los obstáculos mencionados, el alumno recurre a otras estrategias como la lectura de derecha a izquierda, por ejemplo cuando interpreta $\boxed{} - 7 = \boxed{}\,{-3}$ como $7 - \boxed{} = -3$ e ignora el signo unario, o imagina números donde no los hay con tal de que correspondan a algún texto previamente conocido como el del algoritmo de la adición, por ejemplo el caso de la resolución de $6 + \boxed{} = 2$, donde el alumno la transforma en $6 + \boxed{} = 12$.

Los problemas de enunciado verbal en el contexto de las deudas no conducen al estudiante a los números negativos. Más allá de la facilidad con la que puede resolverse el primer problema con números naturales, las expresiones con números negativos no le permiten establecer un vínculo entre estos números y la palabra *deber*. El segundo problema, en el cual no existe solución en los números naturales, tampoco obliga al alumno a usar los negativos, de hecho, el alumno cambia el enunciado del problema para que *tenga sentido*, surgiendo así una situación paralela con el pensamiento histórico de D'Alambert, anterior a la aceptación de los números negativos.

El matemático D'Alambert creía que la solución negativa del problema indicaba un error en su planteamiento, proponiendo un cambio en el enunciado. Por supuesto, él conocía y calculaba con los negativos, sabía la solución, pero no la aceptaba, a diferencia del estudiante, quien no conoce estos números. A pesar de esto, no puede soslayarse la similitud encontrada. Podemos afirmar que ninguno de los dos problemas, expresados en el contexto de las *deudas*, conduce al alumno a establecer una relación con los números negativos.

Un hecho destacable es que, en todos los casos, el alumno recurre a algún texto conocido en base a su experiencia, para otorgar sentido a las tareas con números naturales. El estudiante no indica no conocer dichos números en las diversas situaciones planteadas sino que, haciendo uso de la intertextualidad, los textos presentes lo conducen a algún otro conocido para transformar el texto en otro, único e irrepetible, que será la transformación del primero. Asimismo queda de manifiesto que el conocimiento, por parte del docente, de los textos con los cuales el alumno relaciona el problema dado, es indispensable para que *mire* el problema desde la perspectiva del estudiante.

REFERENCIAS

Bachelard, G. (1938/2011). La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. México: Siglo Veintiuno Editores.

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B., Lewis, M. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children´s Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 43(1), 19-62.

Bofferding, L. (2014). Negative Integer Understanding: Characterizing First Graders' Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education,* 45(2), 194-245.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4(2), 165-198.

Bruno, A., Martinón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias,* 15(2), 249-258.

Butto, C., Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática,* 22(3), 55-86.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. London and New York: Routledge.

Filloy, E., Puig, L., Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theorical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Freudenthal, H. (1983). Negative Numbers and Directed Magnitudes. En: *Didactical phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrect, The Netherlands: Reidel. pp. 432-460.

Gallardo, A. (2002). The Extension of the Natural-Number Domain to the Integers in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 49, 171-192.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2009). Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente. *Educación Matemática*, 21(3), 67-94.

Gallardo, A. y Damián, E. (2011). Los positivos y negativos como medio de organización de familias de rectas en el plano. *Números*, 78, 47-72.

Gallardo, A., Mejía, J. L. (2015). Los números negativos, ¿constituyen un obstáculo epistemológico persistente? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 28, 190-197.

Gibson, J. J. (1986). *The Ecological Approach to Visual Perception*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(3), 303-346.

Hefendel-Hebeker, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs. *For the Learning of Mathematics,* II (1), 26-32.

Kristeva, J. (1968). Problèmes de la structuration du texte. In *Tel Quel*, *Théorie d´Ensemble* (pp. 298-317). Paris: Seuil.

Lam Lay-Yong (1979). Chu Shih-chieh´s Suan hsüeh ch´i-meng (Introduction to Mathematical Studies). *Archive for History of Exact Sciences* 21(1), 1-21.

Mejía, J. L. (2009). Enseñanza y aprendizaje de los números negativos: un estudio comparativo entre los actores fundamentales del proceso didáctico en educación secundaria. Tesis de maestría no publicada. México. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, I.P.N.

Molina, M., Castro, E. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover el pensamiento relacional. *PNA*, 1(1), 33-46.

Peirce, C S. (1982). *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, 6 vols. to date. Edited by Edward C. Moore, Max Fisch, Christian J. W. Klosel *et al*. Bloomington: Indiana University Press.

Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis*, 10(1), 47-92.

Radford, L. (2012). On the Development of Early Algebraic Thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.

Rojano, T., Filloy, E., Puig, L. (2014). Intertextuality and Sense Production in the Learning of Algebraic Methods. *Educational Studies in Mathematics,* 87, 389-407.

Shubribg, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématique entre

1795 et 1845. *Actes du Premier Colloque Franco-allemand de Didactique des Mathématiques et d'l´informatique*. Éditions La Pensée Sauvage.

Talens, J., Company, J. M. (1984). The Textual Space. On the Notion of Text. *The Journal of the Midwest Modern Language Association,* 17(2), 24-36.

Thomaidis, Y. (1993). Aspects of Negative Numbers in the Early 17^{th} Century. *Science and Education*. Netherlands: Kluwer Academic. pp. 69-86.