# El aprendizaje autónomo, favorecedor de la experiencia adaptativa en alumnos y docentes: la división con números decimales

Autonomous learning helps out adaptive expertise of students and teachers: the division with decimal numbers

Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón<sup>1</sup> David Alfonso Páez<sup>2</sup> Daniel Eudave Muñoz<sup>3</sup> Felipe Martínez Rizo<sup>4</sup>

Resumen: El estudio presente tiene el propósito de explorar cómo el aprendizaje autónomo favorece la experiencia adaptativa en alumnos y maestros de educación primaria. En la investigación participaron 30 alumnos de sexto grado y 12 maestros de 1er. a 6to. grados, ambas poblaciones de distintas escuelas ubicadas en México. Los participantes trabajaron fichas didácticas diseñadas para promover el aprendizaje autónomo mediante la creación de diferentes procedimientos no convencionales al resolver problemas de división. En estas fichas se pide estimar el cociente antes de efectuar operaciones aritméticas, esto como una forma de iniciar la comprensión del problema. En los diversos procedimientos generados por los participantes encontramos la estrategia de colocar las restas en los dividendos decimales parciales, la cual,

Fecha de recepción: 13 de noviembre de 2017. Fecha de aceptación: 27 de enero de 2019.

Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aquascalientes. mmramiremx@yahoo.com.mx orcid.org/0000-0003-4260-4884

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. dapaez@correo.uaa.mx orcid.org/0000-0002-4499-4452

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. deudave@correo.uaa.mx orcid.org/0000-0003-4070-3109

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Departamento de Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma de Aguascalientes. felipemartinezrizo@gmail.com orcid.org/0000-0002-7519-4247

consideramos es una contribución a la docencia, debido a que les resultó eficaz para comprender el algoritmo estándar de la división con punto decimal. Para los maestros fue relevante analizar videograbaciones de sus clases y reflexionar sobre los procedimientos creados por sus alumnos.

**Palabras clave:** desarrollar la autonomía del aprendiz, procedimientos significativos, restas en los dividendos decimales parciales, reflexión docente.

Abstract: The present study has the purpose of exploring how the autonomous learning helps out adaptive expertise in elementary school students and teachers. The research involved 30 students of 6th grade and 12 teachers of 1st to 6th degrees, both populations of different schools located in Mexico. Participants solved worksheets designed to promote autonomous learning by creating different unconventional procedures to solve division problems. On these worksheets is requested to estimate the quotient before performing arithmetic operations, in order to start understanding the problem. In various procedures generated by the participants, we find the strategy of placing subtractions in the decimal partial dividends. We think this strategy is a contribution to teaching because it was effective in understanding division with decimal point. The teachers considered important to analyze their teaching practice through videotaping and reflect on solution procedures of their students.

**Keywords:** developing learner autonomy, significant procedures, subtractions in the decimal partial dividends, teacher reflection.

### INTRODUCCIÓN

En diversas investigaciones (Brousseau, 2002; Brousseau, Brousseau, y Warfield, 2014; Graeber y Tirosh, 1990; Hiebert, 1992; entre otras) se ha mostrado que los alumnos tienen dificultad de resolver divisiones con números decimales, pues, por ejemplo, multiplican por potencias de diez tanto las cantidades del divisor como las del dividendo sin saber por qué, de modo que se vuelve complejo para ellos trabajar el algoritmo de la división. Ésta es una de las causas por las cuales nos parece

pertinente tratar este contenido con alumnos y maestros desde un aprendizaje autónomo, pues de esta forma los participantes pueden mostrar procedimientos diferentes del canónico y poner en práctica su capacidad de reconocer y emplear diversos procedimientos que le sean significativos (experiencia adaptativa).

En adhesión con lo precedente, vinculamos la autonomía al aprendizaje de la división con números decimales en el divisor, porque existe un vacío en el tratamiento de este contenido en los libros de texto vigentes para el maestro de educación primaria en México, editados por la Secretaría de Educación Pública (SEP). En ellos se inicia el algoritmo en la galera en tercer grado (8 años) con base en ir seccionando el dividendo y dividiendo de manera parcial con un dígito en el divisor, manteniendo la resta en los dividendos parciales. Se continúa en cuarto grado (9 años) con este procedimiento, llamado "algoritmo desarrollado", con dos dígitos en el divisor, y observamos que en lecciones posteriores del libro de texto se les muestra el algoritmo convencional a través del valor posicional de la cantidad del dividendo y sin la resta incluida, lo cual consideramos no guarda relación con lo que se ha trabajado en lecciones precedentes (véase SEP, 2014a, 2014b, pp. 138-144 y 233-246, respectivamente).

En relación con las cantidades decimales, éstas se trabajan en el dividendo propuesto para tratarse en quinto grado (10 años), donde se explican mediante las anotaciones "décimos" o "centésimos" en los dividendos parciales del algoritmo convencional para indicar el porqué del punto decimal en el cociente, lo cual puede no ser significativo para comprender la cantidad decimal obtenida (SEP, 2014c, pp. 88, 91 y 92). Finalmente, en sexto grado (11 años) se les pide a los alumnos tratar problemas como la conversión entre euros y dólares (SEP, 2014d, p. 97) y a los maestros se les menciona que los estudiantes pueden recurrir a dividir dos cantidades decimales, por ejemplo, \$17.51 entre \$13.63 (SEP, 2014e, p. 152), pero no hay orientaciones precisas de cómo guiarlos en el tratamiento de la división con estas características, sólo se presenta el contenido "Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural" (SEP, 2011, p. 79).

Para conocer cómo se había trabajado la división con decimales buscamos libros de texto de épocas recientes anteriores y encontramos que el tratamiento didáctico de este tipo de división se iniciaba en los últimos grados (cuarto, quinto o sexto grados), teniendo en común la memorización de reglas para convertir la cantidad decimal del divisor en cantidad entera, multiplicando por potencias de diez, tanto del divisor como del dividendo. Además, si éste último quedaba con fracción decimal se les indicaba que sólo "subieran" el punto en el cociente

(SEP, 1960, 1969, 1974). Esta manera de suprimir el punto en el divisor a través de un razonamiento proporcional conlleva varios procesos cognitivos interrelacionados que pocos estudiantes alcanzan a comprender y por ello sólo memorizan la regla "se recorre el punto decimal tantas cifras..." y terminan operando con números enteros una situación que involucra cantidades decimales, donde puede existir la posibilidad de distanciar la situación planteada con las cantidades que se operan (Hiebert, 1992).

De acuerdo con lo anterior, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: ¿qué papel juega el aprendizaje autónomo de la división para que el alumno llegue a comprender y emplear el algoritmo convencional de la división con números decimales?, ¿qué procedimientos alternativos al algoritmo canónico muestran los alumnos al resolver problemas de división con números decimales?, y ¿qué opinan los maestros acerca de lo que puede surgir en su grupo mediante un aprendizaje autónomo de sus alumnos? Esta última interrogante nos parece conveniente, porque nuestro interés es que el docente se observe y reflexione<sup>5</sup> en y sobre su práctica docente, de modo que planee de acuerdo con lo que puede manifestarse en su grupo de alumnos.

### MARCO CONCEPTUAL

Iniciaremos mencionando que en el contexto de la educación, Carter y Fleener (2002), Kamii (1994) y Piaget e Inhelder (1993), entre otros, señalan que la autonomía significa que los aprendices gobiernan sus propias acciones sin depender de otros, al mismo tiempo que se autorregulan conforme a un núcleo de conocimientos y valores (respeto mutuo, cooperación, libertad de elección y toma de decisiones), lo cual amplía su potencial creativo en un ambiente social (Aebli, 1991; Solé, 1999). Estos aprendices elaboran razonamientos propios, empleando estrategias de manera flexible y favoreciendo su reflexión respecto de qué procedimientos parecen funcionar mejor en los distintos problemas tratados (Berk, Taber, Carrino, y Poetzl, 2009; NCTM, 2015).

Es importante subrayar que la autonomía se puede dar mediante un trabajo colaborativo, donde los aprendices comparten, comunican y evalúan diferentes maneras de resolver un mismo problema, y con ello promueven el conocimiento

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> La reflexión le proporciona al profesor el conocimiento de saber cómo actúa en sus clases y cómo aprender de su práctica docente y del aprendizaje de sus alumnos (Bruno, Galuppo, y Gilardi, 2011; Lerman, 2001).

desde diversos puntos de vista, con lo que se favorece la independencia de los educandos, además de explorar los algoritmos generados por los propios alumnos (Ambrose, Baek, y Carpenter, 2003; Brousseau, 2000; Carter y Fleener, 2002; Rubenstein, 1998), y donde el papel del docente es transferir al escolar el control de su aprendizaje por medio del uso de estrategias o instrumentos de autoevaluación como el portafolios (Airasian, 2002; Martínez-Rizo, 2012). Además que el maestro debe crear las condiciones para devolver al alumno la necesidad de aprender, para lo cual requiere que el escolar haga anticipaciones y verifique sus conclusiones. Al final, el docente institucionaliza el conocimiento adquirido por la dinámica de la situación (Brousseau, 1988).

Coincidimos con Fagginger, Hickendorff y Van Putten (2016), quienes advierten que no basta con dar ejemplos, sino que se requiere que el escolar explore las características del problema y el docente observe este desempeño. En esta dirección Carrol y Poster (1998, p. 112) señalan que cuando se consideran separadamente los dígitos del dividendo, por ejemplo, "847 entre 9, los alumnos preguntan, ¿cuántas veces cabe el 9 en el 84?" dejan de lado el valor posicional de cada dígito. En relación con esto, Ramírez (2012) investigó sobre el aprendizaje autónomo de la división con dos dígitos en el divisor y encontró que en la mayoría de los algoritmos alternativos se consideraba la cantidad total del dividendo a través de resultados parciales, y ningún alumno separó los dígitos del divisor.

Respecto de la división con decimales, los docentes desean que sus estudiantes lleguen a comprender la división con decimales por su cuenta a través de la exploración, pero consideran que el tiempo es una dificultad a la que se enfrentan y por eso piden que los alumnos que resuelven primero los problemas correctamente expliquen a sus compañeros cómo lograron llegar al resultado, así la mayoría de los escolares están poco tiempo en un conflicto productivo (Hooper, 2015); sin embargo, no consideran que estas estrategias dan lugar a ideas significativas para el escolar, además que este tiempo se compensa al no tener que volver a enseñar y remediar algunos errores sistemáticos a los que se incurre por un algoritmo convencional que no se ha comprendido (Hierbert, 1992).

Por ello, consideramos fundamentales los procedimientos generados de manera autónoma, a través de la experiencia adaptativa personal, definida como la capacidad de reconocer y emplear múltiples procedimientos significativos de manera apropiada y creativa (Fagginger et al., 2016; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, y Van Dooren, 2009). Complementando esta misma línea de ideas, Verschaffel et al. (2009) señalan que por medio de la dualidad flexibilidad-adaptabilidad se selecciona, consciente o inconscientemente, la estrategia de solución más

apropiada en un contexto sociocultural dado; también Mercier y Higgings (2013) destacan la importancia de que el docente potencie esta dualidad estimulando y reconociendo la variedad de procedimientos autoconstruidos por los alumnos de educación elemental y dé oportunidades de reflexionar sobre los diversos procedimientos con el fin de que cada uno escoja alguno.

La precedente concepción acerca de reflexionar en su actividad tiene también cabida en el docente, la cual Schön (1987) define como un proceso de *reflexión* en la acción, donde el profesor debe analizar y buscar estrategias o soluciones que satisfagan las necesidades reales de sus alumnos de forma eficaz. Él presenta un modelo con tres fases: *conocimiento en la acción, reflexión en y durante la acción, y reflexión sobre la acción y sobre la reflexión en la acción.* Shön propone la cultura de aprender del otro, quien puede aportar ideas e iniciativas que sirvan para encontrar soluciones innovadoras a los problemas de la práctica y a ello llama *desacuerdos productivos*, los cuales son fuente de ideas creativas. Conjuntamente, investigadores como Cheng (2015) menciona que el uso del vídeo, como un recurso, ayuda al profesor a analizar en colegiado lo que acontece dentro del aula y, con ello, promover la reflexión tanto de su práctica como la de otros docentes. En esta línea de ideas, Murray (2015) formula un ciclo colaborativo de enseñanza reflexiva que comprende planear, enseñar y reflexionar.

### DISEÑO METODOLÓGICO

La investigación aquí reportada es de corte cualitativo (Taylor y Bogdan, 1990). Se llevó a cabo con dos poblaciones diferentes en dos escuelas primarias públicas del estado de Aguascalientes (México) y en un ambiente de resolución de problemas: en una de ellas, con 30 alumnos de sexto grado (11-12 años) con intervención didáctica y en la otra con 12 maestros (de 1er. a 6to. grados) en la modalidad de curso-taller. En ambas poblaciones se usó el procedimiento "de resultados parciales" (Ramírez, 2012) para mostrar las operaciones subsumidas en la operación de dividir (suma, resta y multiplicación) sintetizadas en el algoritmo convencional. Ello con la finalidad de posteriormente dotar de sentido al algoritmo de división con decimales.

La toma de datos con los alumnos fue durante 25 sesiones y usamos cuestionarios (inicial y final) y 15 fichas didácticas<sup>6</sup> (10 de trabajo y cinco de

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Algunas de ellas fueron adaptadas de Ramírez (2012), véase Apéndice A.

autoevaluación) diseñadas con base en las fases de Polya (1965/2001): comprender el problema, trazar un plan con base en las relaciones entre los elementos que intervienen en el problema, implementar el plan y una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla para validar la respuesta con una visión retrospectiva.

En las fichas didácticas planteamos problemas relacionados con la vida cotidiana, evitando incluir datos irrelevantes, con un vocabulario comprensible para los alumnos y con tareas orientadas hacia un aprendizaje autónomo. Antes de resolver cada ficha didáctica se pedía a varios alumnos que leyeran en voz alta la situación y después a otros se les solicitaba que explicaran con sus palabras de qué trataba el problema, esto con la finalidad de contar con la certeza de que habían entendido la actividad, pues coincidimos con Aebli (1991, p. 154), quien señala: "una tarea especial de la lectura [es] que los alumnos aprendan a manejar de manera autónoma los textos y que aprendan a contemplar y comprender por sí mismos el asunto". Además en algunas fichas se pedía a los participantes re-escribir el problema, incluyendo la solución encontrada, esto lo usamos como una manera de regresar al problema para repensarlo y verificar si la solución encontrada correspondía a la situación planteada (última fase de Polya), y poner de manifiesto cómo fue entendida.

Las fichas eran calificadas al final de cada sesión puesto que dicha valoración servía de referencia para la escritura del diario escolar, donde anotaban sus reflexiones acerca de lo aprendido, lo que se le había dificultado, e incluso escribir algunos ejemplos de lo tratado en la sesión (Flückiger, 2005). En la sesión siguiente se realizaba la retroalimentación individual y grupal para lo cual se solicitaba a varios alumnos anotar su procedimiento en el pizarrón con la finalidad de que explicaran cómo habían resuelto el problema de división planteado en su ficha didáctica, y después se preguntaba al grupo si tenían maneras diferentes para que las mostraran a los demás y, finalmente, comparaban dichas soluciones.

Consideramos que de esta manera promovimos que los participantes conocieran diversos modos de solución para un mismo problema y favorecimos su comprensión al procurar entender las explicaciones de los demás. Concordamos con Yackel y Cobb (1996) en que en estas discusiones el maestro dota de sentido las argumentaciones de los alumnos y puede seleccionar otras situaciones más desafiantes en relación con las soluciones expuestas. Estas discusiones o normas sociomatemáticas influyen en las oportunidades de aprendizaje para que los alumnos logren ser intelectualmente autónomos.

De las 25 sesiones, con una duración aproximada de 90 minutos cada una, se eligieron cuatro de ellas para ser videograbadas<sup>7</sup> porque consideramos que aportan información relevante en nuestra investigación como: explicar los conocimientos producidos por otro compañero o los argumentos que dan los alumnos acerca de su aprendizaje de la división respecto de los distintos procedimientos generados por los participantes. Además de promover la comprensión conceptual a través de dar oportunidad a los estudiantes de preguntar, discutir, explicar y compartir sus estrategias (An, 2009). Las primeras cinco sesiones fueron para trabajar el sistema de numeración decimal y operaciones de suma, resta y multiplicación con cantidades decimales dadas con materiales manipulativos a través del juego "El banco". Al respecto, Brousseau, Brousseau y Warfield (2004) señalan que los números decimales se utilizan en la vida cotidiana.

La toma de datos con los maestros se realizó durante 12 sesiones, de 90 minutos cada una, aproximadamente. Los instrumentos usados son ocho fichas didácticas de trabajo que también fueron implementadas con los alumnos pero con algunas modificaciones; estas fichas se trataron durante la primera fase del curso-taller, y en la segunda recurrimos a tres guías de retroalimentación<sup>8</sup> para analizar en colegiado la actuación de cada profesor en dos clases grabadas en vídeo, las cuales fueron editadas para que cada una durará como máximo 15 minutos. Las retroalimentaciones se efectuaron a nivel grupal (Apéndice B), entre pares (Apéndice C) e individual (Apéndice D). Como apoyo para sus reflexiones cada docente contó con un cuaderno de notas y en la última sesión incluimos a un Observador para que registrara lo que considerara más relevante en dicha sesión.

Esta toma de datos la llevamos a cabo mediante un curso-taller, con la finalidad de que los participantes reflexionaran y establecieran estrategias para enriquecer su práctica docente y fortalecer el aprendizaje autónomo de sus alumnos. El curso-taller se efectuó en dos fases para que los maestros *reflexionaran antes, durante y después* de realizar intervenciones didácticas con su grupo respectivo.

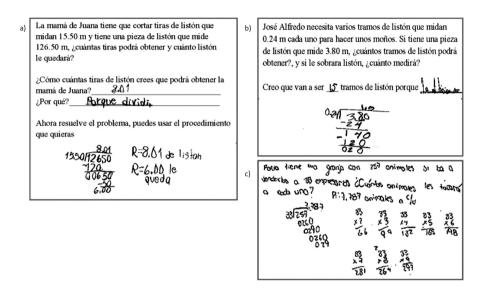
<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Se contó con dos Observadores no participantes.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> Observaciones que nos sirven para que avancemos del punto en que nos encontramos y tienen un carácter formativo.

- Primera fase, cinco sesiones: (a) actividad para trabajar el enfoque didáctico de las matemáticas presente en el Programa de estudios vigente (SEP, 2011); (b) seis fichas didácticas sobre significados de la división e importancia del residuo, así como distintos procedimientos para aprender de manera autónoma la división con dos dígitos en el divisor, y (c) dos fichas didácticas para dar sentido a la división con números decimales.
- Segunda fase, siete sesiones: (a) videograbación de una clase de matemáticas de cada maestro participante y análisis en colegiado de su vídeo (editado) para aportar y recibir retroalimentación; (b) lectura del enfoque didáctico de matemáticas, enfatizando sobre los cinco desafíos mencionados; (c) videograbación de otra clase de matemáticas de cada uno de los maestros participantes y análisis entre pares del mismo grado del vídeo (editado) de cada participante para reflexionar acerca de su práctica docente y el aprendizaje autónomo de sus alumnos; (d) análisis individual de sus dos vídeos (editados), y (e) elaboración de un escrito titulado "Reflexiones sobre mi práctica docente" donde considere las retroalimentaciones recibidas, el análisis de sus vídeos y la actuación de sus alumnos.

#### RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS ALUMNOS

Mostramos a continuación diversos procedimientos generados por los alumnos: suma/resta iterativa, relaciones proporcionales entre dos cantidades con la posibilidad de extender dichas relaciones a otros pares de cantidades (Lamon, 2007; Lampert, 1992), diversas representaciones de cocientes parciales y del algoritmo convencional (con restas en los dividendos parciales). Al inicio de nuestra investigación, la mayoría de los estudiantes usó el algoritmo convencional al resolver problemas de división con números decimales y presentaron algunos errores como separar la cantidad decimal, "recorrer y subir" el punto decimal sin conservar las equivalencias correspondientes o no dar sentido a las cifras decimales (figura 1). Estos equívocos pueden ser consecuencia de aprender sólo procedimientos rutinarios sin comprensión, por ejemplo: "divide, multiplica, resta y baja la cifra siguiente" (Lamb y Brooker, 2004, p. 178) limitando la creación de procedimientos propios de los alumnos de acuerdo con su experiencia adaptativa.



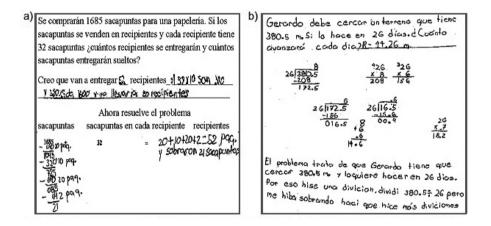
**Figura 1.** Dificultades de los alumnos en la división con números decimales. (a) Dividir de manera alternada la parte entera y la decimal, (b) recorrer el punto decimal de forma mecanizada y (c) no otorgar sentido a las cantidades decimales.

En los ejemplos precedentes se advierte la necesidad de otro tratamiento didáctico hacia el algoritmo de la división con decimales, por ello quisimos propiciar un pensamiento flexible entre los participantes, por lo cual les solicitamos resolver algunos problemas de división sin emplear el algoritmo estándar, con la finalidad de que produjeran procedimientos alternativos los cuales después compartirían entre ellos; además, introducimos el procedimiento "de resultados parciales" para que los escolares se dieran cuenta que la sustracción en la división sirve para ir quitando a la cantidad total lo que se va repartiendo o agrupando y ello es factible porque se va descomponiendo el dividendo.

En la siguiente figura (2) podemos observar cómo dicho procedimiento potenció futuros aprendizajes como el establecer relaciones proporcionales (figura 2a) o efectuar varias divisiones usando el algoritmo estándar al implementar el

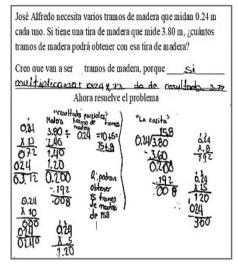
<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> Este procedimiento tiene sus antecedentes más remotos en los antiguos egipcios y se eligió porque permite que cada alumno vaya resolviendo la división con los conocimientos obtenidos en otros grados anteriores.

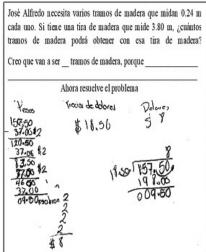
principio de exhaustividad (residuo menor que el divisor) mediante la sucesión de divisiones parciales (figura 2b). Al mismo tiempo promovimos que los alumnos estimaran un posible resultado y encontramos que la mayoría de ellos escriben el resultado calculado o describen el algoritmo efectuado y sólo algunos efectúan estimaciones como una forma de iniciar a comprender la situación (figura 2a). Asimismo, nos percatamos de que la re-escritura del problema fue un recurso para que los alumnos revisaran la solución hallada y mostraran si habían comprendido el problema (figura 2b).



**Figura 2.** Distintos procedimientos que surgieron con base en el "de resultados parciales". (a) Relaciones proporcionales y (b) división en partes.

En la figura 3 vemos que los procedimientos alternativos generados por los alumnos sirvieron de apoyo para que llegaran al algoritmo convencional e incluyeran la resta en los dividendos parciales, incluso varios escolares movieron el punto decimal hacia la derecha, lo cual puede servirle al docente para provocar la reflexión en el grupo (Hooper, 2015).



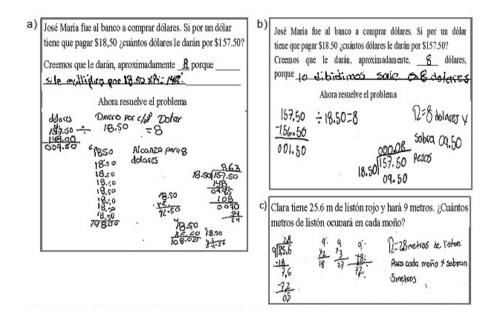


**Figura 3.** Importancia de anotar la resta en los dividendos parciales. Algunos alumnos llegan a recorrer el punto decimal.

Por las evidencias precedentes subrayamos que los alumnos anotan las cantidades decimales que van separando, por ello disentimos de que se eliminen las restas en los dividendos parciales del algoritmo canónico (SEP, 2014b, p. 233), pues algunos escolares anotan en su diario escolar "hoy aprendí que la división con decimales es más fácil con la resta" o "en los dos [procedimientos] se van restando las cantidades".

También hubo producciones donde se advierten equivocaciones en el algoritmo convencional, aun cuando en los procedimientos alternativos el resultado era correcto (figura 4) y creemos que se debe a la falta de reflexión acerca de la solución o soluciones obtenidas. Encontramos producciones (figura 4a), que los errores más frecuentes en el algoritmo estándar se relacionan con la multiplicación y la resta, reportado en Ramírez (2012). Igualmente, de la manera mecanizada y sin comprensión de colocar el punto decimal (figura 4b), donde notamos que el alumno no reparó que tenía tres distintos resultados (8, 0.8 y .08), los cuales pueden ser un recurso para que el docente provoque la discusión y reflexión en el grupo acerca de lo que significa el resultado decimal obtenido en cada uno de los distintos procedimientos. Además de que no basta que el

alumno opere correctamente el algoritmo (figura 4c), sino que tenga la oportunidad de analizar sobre la racionalidad de sus respuestas en colaboración con otros (Hooper, 2015; Rubenstein, 1998).

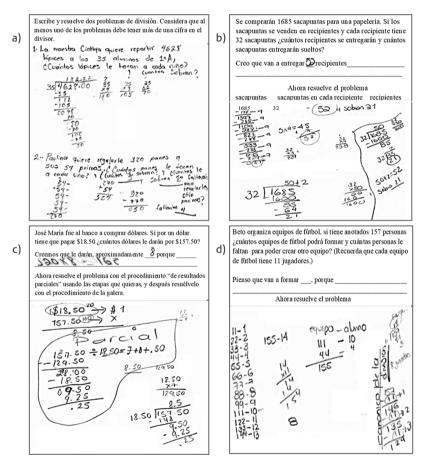


**Figura 4.** Resolución de problemas de división usando el algoritmo convencional. En (a) y (b) vemos diferentes procedimientos no convencionales al trabajar con el algoritmo convencional. En (c) faltó la comprensión de la cantidad decimal del residuo.

Es importante mencionar que los alumnos después de socializar sus producciones se percataron de otras maneras o "caminos" de resolver problemas de división y señalaron: "no siempre un camino es el más fácil, por eso es mejor tener otros".

#### RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS MAESTROS

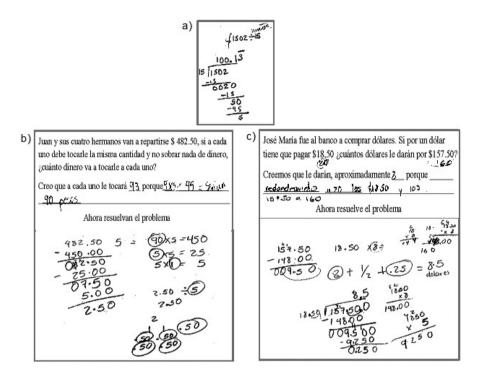
En este apartado reportamos lo hallado con los maestros en el curso-taller. Advertimos la creación de distintos procedimientos con sumas/restas iterativas, relaciones proporcionales, representaciones de cocientes parciales, etcétera, y de igual modo que los alumnos también incluyeron la resta en los dividendos parciales con punto decimal (figura 5).



**Figura 5.** Distintos procedimientos producidos por los docentes. (a) Error en el cálculo decimal y falta de sentido (fragmentar los lápices), (b) procedimientos con base en cocientes parciales, (c) "regla de tres" y (d) relaciones proporcionales.

En las producciones precedentes, los maestros manifiestan cálculos más complejos que muestran mayor dominio en los números decimales, sin embargo en sus producciones observamos la falta de estimar un posible resultado, así como no escribir el resultado después de efectuar la algoritmia correspondiente. También observamos que en el algoritmo convencional (figura 5a) el docente no registra de dónde surge el cociente decimal; consideramos que podría deberse a la manera en que aprendió, pues menciona: "enseño la división de la única manera que conozco".

A continuación presentamos producciones de los maestros. Vemos en la figura 6a cómo el profesor coloca el punto decimal en el algoritmo convencional sin indicios de dónde proviene; en las figuras 6b y 6c observamos procedimientos alternativos donde los maestros anotaron los dividendos parciales decimales, lo que les dio pié a incluirlos también en el algoritmo convencional y así encontrar la cantidad decimal del cociente del mismo modo como lo habían hecho para la cantidad entera, pero ahora considerando múltiplos del divisor menores de la unidad (figura 6c). Es importante señalar que al compartir cómo hallar la cifra decimal, los maestros mostraron interés de que coincidiera la colocación del punto con la regla "recorrer el punto..."; por ello, creemos que este hallazgo puede ser un recurso para reflexionar acerca del porqué conservar las cantidades decimales en la división sin necesidad de "recorrer" el punto a la derecha de manera mecanizada.



**Figura 6.** Diferencias entre el algoritmo convencional y los procedimientos alternativos. En (a) vemos la colocación del punto decimal en el algoritmo canónico, en (b) las operaciones subsumidas en la división y en (c) la obtención de la cifra decimal .5 del cociente.

En la figura 7 mostramos algunas reflexiones de los profesores surgidas en la segunda fase del curso-taller como consecuencia de analizar los vídeos de sus clases y observar los distintos procedimientos que surgieron en sus alumnos al darles la posibilidad de resolver problemas con sus propias estrategias con miras a fomentar aprendizaje autónomo. En el análisis de su práctica docente fueron considerados las retroalimentaciones grupales, su cuaderno de notas y las videograbaciones de sus clases.

Vo resaltaría la organización y distribucción de los alumnos al desarrollar la actividad en equipos.

El profesor los induce a crear un aprendizaje autónomo a darles libertar de utilizar diversos procedimientos que les pormiten llegar al resultado segun sus necesidades y carencias al utilizar las operaciones.

Me sorprendió un alumno que al parecer es muy inquieto y pasor al pizarron a explicar el procedimiento de su equipo lo hizo muy atento y responsable.

En la segundo gratación mi actifical fre meis sagura y cotrí las 5 desafís no comet las misman enores from otros pues al inicion la actividad les dije que para llenar un cado se octo la la multiplicación cando no detra poes el altimo delso analizar y ne frecional que operation consulto facion que operate actual de mi enor en la struiente actividad friccidados al das las Indiancions y medicanto que los alliques actuaires mejos el conocimiento pues lo pude comprobar el la presentación de sa procedimientos

Auto Reflexión

Autros video y despues

\* Se logre atraer la atención de
los alumnos mediante un prohlema
cotidiano, contextuelizado.

Yo resoltana el interes de los alumnos
por autorme a resolver el problema
lo más completado de la Sesión
co lograr que algunas alumnos
expliquen su procedimiento (laeph).

Croo que oc lograr un apre autonomo en mas alumnos sintener
que reclear errores sino acerdos
para que ellas de maina personal
ellan el procedimiento que se
les hago indo fado.

Lo que combarno de la sissón
es que combarno de la combarno

Dejar que ellos solos resolvieran el problema hizo que tovieran que comprender y el parbiteras lo logró, aunque siempre hay niñas que sólo buscan copiar a sus compañeras a simplemente no lo hacen y sucede parque no saben cómo a no tienen conocimientos prenas para poder revolver un problema de división, par lo tanta debí haber hecho adecuaciones para sas alumnas.

Figura 7. Reflexiones de los maestros con base en las retroalimentaciones grupales recibidas.

De acuerdo con las reflexiones de los profesores, consideramos que ellos se dieron cuenta de la importancia de que los alumnos elaboren sus procedimientos y los socialicen para que aprendan de manera autónoma (competencia mencionada en documentos editados por la SEP para la educación básica). Es imprescindible subrayar que los docentes reconocieron que antes no daban la oportunidad a sus alumnos de usar distintos procedimientos pues esperaban sólo algoritmos convencionales y fue mediante las retroalimentaciones entre colegas que descubrieron los cambios que tuvieron en su práctica, donde reflexionaron acerca de la necesidad de transformar su manera de enseñar para dejar que el alumno también proponga su propios procedimientos de solución. Así mismo manifestaron su asombro de la forma en que llegaron a efectuar el algoritmo convencional de la división con decimales sin necesidad de transformar las cantidades, sólo teniendo en cuenta los dividendos parciales decimales.

#### **CONCLUSIONES**

En nuestra investigación encontramos que los alumnos mostraron dificultades en el significado y uso de los números decimales, por lo cual implementamos actividades complementarias donde utilizamos el sistema monetario como un recurso para el manejo comprensivo de las cifras decimales en las operaciones de suma, resta y multiplicación. Observamos que al sumar y restar lograron colocar correctamente las cantidades decimales, considerando la alineación del punto decimal. En relación con la multiplicación, la trabajamos como suma abreviada para que se dieran cuenta dónde colocar el punto decimal en el producto.

Respecto de la división con números decimales en el divisor, encontramos que, el error más frecuente entre los alumnos fue separar o alternar las cantidades decimales de los números enteros y operar el algoritmo convencional, aparte de equivocaciones en relación con las operaciones de resta y multiplicación. Es importante señalar que varios estudiantes colocaron el punto decimal "subiéndolo" en el cociente o "recorriéndolo" en el dividendo sin saber el porqué. Otras inexactitudes se refieren a las respuestas que dieron los estudiantes participantes al problema planteado, lo cual nos hace reconocer que es necesario mayor tiempo en la comprensión de los números decimales y no sólo trabajar en su cálculo. Pensamos que en los programas de la SEP se debe reflejar una educación de calidad y que implica mayor tiempo en el tratamiento de contenidos complejos para los alumnos.

En dirección al aprendizaje autónomo de la división se logró que los participantes (alumnos y maestros) elaboraran procedimientos diferentes del canónico: representaciones gráficas, sumas/restas iteradas, agrupamientos, multiplicación y distintas representaciones de cocientes parciales –como ir seccionando y dividiendo de manera parcial o establecer relaciones proporcionales entre las dos cantidades– con lo que se abrió la posibilidad de elegir uno o más procedimientos para un problema específico. Es conveniente señalar que varios alumnos usaron más de dos procedimientos diferentes, aparte del convencional, y aunque hubo escolares que no llegaron a acceder al algoritmo estándar, sí elaboraron al menos un procedimiento no convencional. Por lo anterior, consideramos que mediante el aprendizaje autónomo de la división con decimales se conjuntó la experiencia adaptativa de cada participante al elaborar procedimientos conforme sus conocimientos previos de las operaciones subsumidas en la división con decimales.

Un hallazgo interesante, al efectuar el algoritmo canónico de la división con números decimales, es que casi la totalidad de alumnos y maestros colocaron los dividendos parciales dentro de la galera para realizar las restas indicadas y considerando la cantidad total del divisor obtener el cociente entero y decimal correspondiente. Al respecto, Brousseau et al. (2014) anotan "el uso y comprensión de la división con números decimales se facilita por su semejanza con la división larga en los números naturales" (p. 92), lo cual asombró a los maestros, quienes repararon que el conservar en todo momento las cantidades decimales —tanto en el dividendo como en el divisor— dota de sentido el tratamiento de la situación original sin necesidad de multiplicar por potencias de diez las cantidades decimales involucradas.

En relación con la reflexión de la práctica docente, a los maestros les pareció interesante analizarla en colaboración con los otros maestros de la escuela, aunque la mayor parte de ellos se les observaba un poco nerviosos de que los demás vieran sus clases, puesto que ninguno había tenido experiencia en dar y recibir retroalimentación de sus colegas. Asimismo, reconocieron que sus alumnos usaron procedimientos que ellos no esperaban y que les había sorprendido. Señalaron, por ejemplo: "Me di cuenta que mis alumnos saben más de lo que me imagino" o "Aprendí que no todos los alumnos razonan igual, que llevan un proceso, y que en el proceso van adquiriendo aprendizajes." Al final del curso-taller expresaron: "Es necesario, como docente, detenerse para reflexionar sobre el aprendizaje de sus alumnos para saber si lo aplicado está dando buenos resultados".

#### REFERENCIAS

Aebli, H. (1991). Aprender a aprender. (R. Lucio, Trad.). En *Factores de enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo* (pp. 151-175). Madrid, España: Narcea.

Airasian, P. (2002). Evaluación de desempeño. En *La evaluación en el salón de clases* (pp. 126-169). Biblioteca para la Actualización del Maestro. México: SEP/McGraw-Hill.

Ambrose, R., Baek, J-M., y Carpenter, T. (2003). Children's invention of multiplication and division algorithms. En A. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptative expertise* (pp. 50-70). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- An, S. (2009). Chinese teachers' knowledge of teaching multi-digit division. *Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 27-54.
- Berk, D., Taber, S., Carrino, C., y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teacher's flexibility in the domain of proportional reasoning. *An International Journal Mathematical Thinking and Learnig, 11*(3), 113-135. doi: https://doi.org/10.1080/10986060903022714
- Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz (Eds.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 65-93). Barcelona, España: Paidós.
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5-38. doi: 10.24844/EM
- Brousseau, G. (2002). Problems with teaching decimal numbers. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield (Eds.) *Theory of didactical situations in mathematics* (Vol. 19, pp. 120-146). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Brousseau, G., Brousseau, N., y Wargield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2. From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 281-300. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.12.001
- Brousseau, G., Brousseau, N., y Wargield, V. (2014). *Teaching fractions through situations:* A fundamental experiment. New York, United States of America: Springer.
- Bruno, A., Galuppo, L., y Gilardi, S. (2011). Evaluating the reflexive practices in a learning experience. *European Journal of Psychology of Education*, 26, 527-543. doi: 10.1007/s10212-011-0061-x
- Carrol, W., y Porter, D. (1998). Alternative algorithms for whole-number operations. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 106-114). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Carter, A., y Fleener, M. (2002). Exploring the teacher's role in developing autonomy. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting. North American chapter of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 819-829). Columbus, OH: Clearinghouse on Science, Mathematics and Environmental Education.
- Cheng, L. (2015). Developing critical reflection through audio and video technology for some Singapore primary school mathematics teachers. En S. Fong (Ed.), Cases of mathematics professional development in East Asian countries. Using video to support grounded analysis (pp. 39-60). Georgia, United States of America: Springer.
- Fagginger, A., Hickendorff, M., y Van Putten, C. (2016). Solution strategies and adaptivity in multidigit division in a choice/no choice experiment: Student and instructional

- factors. *Learning and Instruction*, 41, 52-59. doi: https://doi.org/10.1016/j. learninstruc.2015.09.008
- Flückiger, A. (2005). Macro-situation and numerical knowledge building: The role of pupils' didactic memory in classroom interactions. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 59-84. doi: 10.1007/s10649-005-5885-3
- Graeber, A., y Tirosh, D. (1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics 21*, 565-588.
- Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analyses of arithmetics for mathematics teaching* (pp. 283-320). United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hooper, S. (2015). "Move the decimal point and divide": An exploration of students' introduction to division with decimals (Tesis doctoral). Recuperada de http://scholarworks.gsu.edu/ece\_diss/24
- Kamii, C. (1994). La autonomía: el fin educativo de Piaget. En *Reinventando la aritmética II* (pp. 65-73). Madrid, España: Aprendizaje Visor.
- Lamb, J., y Booker, G. (2004). The impact of developing teacher conceptual knowledge on students' knowledge of division. En M. J. Hornes y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 177-184). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lampert, M. (1992). Teaching and learning long division for understanding in school. En G. Leinhardt, R. Putman y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 221-282). United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lerman, S. (2001). Cultural discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 87-113.
- Martínez-Rizo, F. (2012). La evaluación formativa. En *La evaluación en el aula. Promesas y desafíos de la evaluación formativa* (pp. 71-146). México: Universidad Autónoma de Aguascalientes.
- Mercier, E., y Higgings, S. (2013). Collaborative learning with multi-touch technology: Developing adaptive expertise. *Learning and Instruction*, 25, 13-23. doi: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.10.004

- Murray, E. (2015). Improving teaching through collaborative reflective. Teaching cycles. *Investigations in Mathematics Learning* 7(3), 23-29. doi: https://doi.org/10.1080/247 27466.2015.11790343
- National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]. (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* México: Editando libros.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1993). Sentimientos y juicios morales. En *Psicología del niño* (pp. 123-130). Madrid, España: Ediciones Morata.
- Polya, G. (1965/2001). Cómo plantear y resolver problemas (pp. 17-53). México: Trillas.
- Ramírez, M. (2012). El aprendizaje autónomo de la división en cuarto grado de primaria. (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. México.
- Rubenstein, R. (1998). Historical algorithms. Sources for student projects. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 99-105). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Schön, D. A. (1987). La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona, España: Paidós.
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (1960). *Mi libro de cuarto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza.* México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
- Secretaría de Educación Pública (1969). Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la naturaleza. México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos
- Secretaría de Educación Pública (1974). *Matemáticas*. *Sexto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Sexto Grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública (2014a). *Desafios matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública (2014b). *Desafios matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública (2014c). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. México: Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública (2014d). *Desafios matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública (2014e). *Desafios matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.

- Solé, I. (1999). Disponibilidad para el aprendizaje y sentido del aprendizaje. En *El constructivismo en el aula* (pp. 25-46). Barcelona, España: Graó.
- Taylor, S., y Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. (pp. 15-27). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., y Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, XXIV*(3), 335-359.
- Yackel, E., y Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(4), 458-477.

#### MERCEDES MARÍA FUGENIA RAMÍREZ ESPERÓN

**Dirección:** Av. Manuel González # 150, Edif. San Luis Potosí, B-205. Col. Tlatelolco.

Alcaldía Cuauhtémoc, CP. 06900

Tel. celular: 55 3109 4347

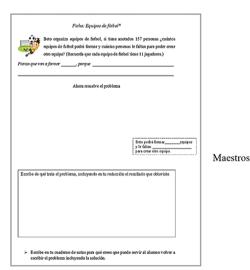
### APÉNDICE A

#### EJEMPLOS DE FICHAS DIDÁCTICAS CON SU PROPÓSITO RESPECTIVO

Alumnos



Explorar qué significados da el alumno a la operación de división.



Considerar la importancia del residuo y la re-escritura para la verificación de resultados



Conocer qué aprendizaje ha logrado o está en proceso de adquisición.



Fortalecer el aprendizaje del alumno mediante las producciones elaboradas de otro compañero.

## APÉNDICE B

### Guía para analizar en colegiado el vídeo (editado) de su clase

### REFLEXIÓN SOBRE SU PRÁCTICA DOCENTE

Escriba en su cuaderno de notas:

I. Antes de ver el vídeo de su clase ¿Qué aprendizajes cree haber logrado en sus alumnos durante la sesión?
<ul> <li>II. Después de ver el vídeo de su clase</li> <li>- ¿Qué resaltaría de su clase?</li> <li>- ¿Qué fue lo que se le hizo más complicado durante la sesión?</li> <li>- ¿Le sorprendió algo durante la sesión?, ¿por qué?</li> <li>- ¿Cambiaría algo de la sesión?, ¿por qué?</li> <li>- ¿Qué aprendizajes logró en sus alumnos?</li> <li>- ¿Considera haber fomentado en sus alumnos un aprendizaje autónomo?</li> <li>, ¿por qué?</li> </ul>
III. Posterior a la lectura de las observaciones de sus colegas Escriba una reflexión que dé cuenta de la retroalimentación que recibió.
IV. Análisis en colegiado Anote acerca del análisis en colegiado respecto del aprendizaje autónomo de sus alumnos.
Retroalimentación en colegiado
Escriba en las hojas proporcionadas:  I. Después de ver el vídeo de su colega  — Nombre del colega de quien observó la clase  — ¿Qué resaltaría de su clase?  — ¿Qué fue lo que cree se le hizo más complicado durante la sesión?  — ¿Le sorprendió algo durante la sesión?, ¿por qué?  — ¿Cambiaría algo de la sesión?, ¿por qué?

- ¿Qué aprendizajes cree que su colega logró en sus alumnos?
- ¿Considera que su colega fomentó un aprendizaje autónomo en sus alumnos?\_\_ ¿por qué?
- Il. Favor de entregarla la retroalimentación a su colega. Es decisión propia escribir el nombre de quien efectúo la retroalimentación.
- III. Argumentar en plenaria acerca de lo observado en los vídeos.

### APÉNDICE C

### Guía para analizar entre pares el vídeo (editado) de su clase

En esta segunda fase van ustedes a recibir retroalimentación de su colega de grado, ello con la finalidad de reflexionar acerca de semejanzas y diferencias entre sus prácticas docentes de acuerdo con los criterios establecidos en el grupo. Para ello le solicitamos lo siguiente:

- 1. Antes de ver el vídeo de su clase
- Escriba en su cuaderno de notas ¿cuáles considera que son los elementos fundamentales en su práctica docente?
- Revisen el documento ENFOQUE DIDÁCTICO (de matemáticas) del Programa de Estudio 2011 de su grado correspondiente y en colegiado comenten acerca de los cinco desafíos que ahí se mencionan.
- II. Después de ver el vídeo de su clase

Para retroalimentarse mutuamente, analicen y escriban semejanzas y diferencias que hayan encontrado entre sus prácticas docentes en relación con los cinco desafíos mencionados en su Programa de Estudios 2011.

### APÉNDICE D

### GUÍA PARA EL ESCRITO "REFLEXIONES SOBRE MI PRÁCTICA DOCENTE"

En esta última sesión va a reflexionar acerca de su práctica docente apoyándose en la revisión de su cuaderno de notas y en los dos vídeos de los cuales ya recibió retroalimentación de sus colegas.

Elabore un escrito al que titule Reflexiones sobre mi práctica docente para lo cual:

I. Revise su cuaderno de notas y retome sus reflexiones en relación con el objetivo general del curso-taller:

Se espera que los docentes participantes reflexionen antes, durante y después de realizar sus intervenciones didácticas para observar qué cambios realizaron y cómo ello se vio reflejado en el aprendizaje de sus alumnos

II. Después de ver los dos editados de sus clase incluya:

Qué diferencias encuentra en su actuación entre su primera y segunda grabación respecto de

- elementos que haya incorporado conforme con las retroalimentaciones recibidas.
- manejo del error,
- decisiones tomadas en el transcurso de la clase,
- otros aspectos que considere importantes mencionar.
- III. Muestre algún procedimiento del alumno o de los alumnos que le haya sorprendido

Argumente el porqué eligió este ejemplo.

IV. Mencione en su escrito

Características que considera hacen valiosa su participación dentro de la comunidad escolar donde labor.