

# Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación

An introduction to the concept of derivative in high school students

Rebeca Antonio Zambrano<sup>1</sup>  
Dinazar Isabel Escudero Ávila<sup>2</sup>  
Eric Flores Medrano<sup>3</sup>

**Resumen:** En México, en el curriculum de Cálculo de nivel medio superior, el concepto de derivada se muestra normalmente a los estudiantes como una recta tangente a la curva y, posteriormente, se proporciona su tratamiento analítico. Esto genera que la comprensión de dicho concepto se reduzca a la memorización de expresiones algebraicas y cálculos algorítmicos, lo que conlleva a no relacionarlo con fenómenos físicos que presentan variaciones y cambios, así como pensar que la derivada es únicamente un límite indeterminado. Dentro de las investigaciones en Matemática Educativa, el concepto de derivada ha sido ampliamente estudiado por su importancia dentro de la matemática y la dificultad que se observa en su enseñanza y su aprendizaje. Estas investigaciones aportan información suficiente a profesores para utilizar y diseñar actividades en torno al concepto, apoyándose en los resultados de investigación. En este artículo se presenta una secuencia didáctica cuyo objetivo

---

**Fecha de recepción:** 24 de noviembre de 2017. **Fecha de aceptación:** 28 de septiembre de 2018.

<sup>1</sup> Preparatoria Emiliano Zapata, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, azare82@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-7743-6126

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, eadinazar@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-6380-9016

<sup>3</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ericfm\_0@hotmail.com, orcid.org/0000-0002-6134-729X

es introducir el concepto de derivada a través de un fenómeno que presenta variaciones y cambios, buscando, además, la coordinación entre los registros de representación en estudiantes de bachillerato que tienen un primer acercamiento a este concepto.

**Palabras clave:** *derivada, variación y cambio, registros de representación, secuencia didáctica, bachillerato.*

**Abstract:** In Mexican's Calculus curriculum of High School level, the derivative concept is commonly shown to the students as a tangent line to the curve and later it is provided its analytical treatment. That reduces its understood to the memorization of algebraic expressions and algorithmic calculations, which don't leads to the concept of physical phenomena that present variations and changes, as well as thinking that the derivative is only an indeterminate limit. Within the Mathematics Education research, the concept of derivative has been studied for its importance in mathematics and the difficulty observed in its teaching and learning. These inquiry already provide enough information to teachers to use and design activities around the concept based on research results. In this article, a didactic sequence is presented whose objective is to introduce the concept of derivative through to a phenomenon that presents variations and changes, which also allows the coordination between representation in high school students who have a first approach to this concept.

**Keywords:** *derivative, variation and change, register of representation, didactic sequence, High School.*

## INTRODUCCIÓN

Dentro del curriculum mexicano de Cálculo de nivel medio superior, se trabaja por primera vez el concepto de derivada y suele hacerse mediante una definición de límite indeterminado para después proporcionar una serie de reglas que permitan derivar funciones.

De acuerdo con Vrancken y Engler (2014), el cálculo es la matemática de la variación. Por medio de conceptos como el de derivada podemos modelar, expresar, y predecir situaciones que presentan variaciones y cambios. Sin embargo,

algunos autores (e.g. Artigue, 1998; Salinas y Alanís, 2009; Vrancken y Engler, 2014) mencionan que la enseñanza del cálculo se sigue centrando en prácticas algorítmicas y estructuras formales de la matemática que no aportan un significado al estudiante. Específicamente, la enseñanza del concepto de derivada tradicionalmente se basa en que el estudiante domine los procesos para obtener derivadas de expresiones algebraicas por medio de fórmulas sin lograr la comprensión de este concepto (Dolores, 2009).

Existen diversos trabajos de investigación dedicados a explorar el concepto de derivada, en su mayoría, con estudiantes de licenciatura que ya han tenido contacto con este concepto (e.g. Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez, 2018). En Educación Matemática, particularmente, dichas investigaciones analizan y/o promueven la comprensión del concepto a partir de distintos ámbitos según sus intereses (e.g. Robles, Del Castillo y Font, 2012).

De acuerdo con algunos de estos resultados de investigación, hemos diseñado una secuencia didáctica que permite introducir el concepto de derivada en estudiantes de bachillerato que por primera vez tienen contacto con el tema, a través del trabajo con contextos de variación y provocando el tránsito entre distintos registros de representación.

Con base en la problemática que hemos planteado y la literatura de investigación consultada, pretendemos que el estudiante logre comprender los fundamentos del concepto de derivada a través de dos enfoques, la idea de variación y cambio implícita en el propio concepto y el tránsito entre los diferentes registros en los que éste se puede representar, para que pueda aplicarla según el contexto en el que se encuentre.

## ANTECEDENTES

El estudio del Cálculo presenta diversas dificultades para los estudiantes, tanto en el bachillerato, como en la universidad. Tall (1993) realiza una síntesis que incluye aspectos didácticos, epistemológicos y cognitivos que causan dificultades en la comprensión de los elementos centrales de esta asignatura. En la investigación en didáctica del cálculo se han realizado propuestas para atender a las dificultades que presentan los estudiantes para su aprendizaje. Dichas propuestas han pasado por la reestructuración del currículo (e.g. Salinas y Alanís, 2009); la identificación de enfoques didácticos para la enseñanza y de sus alcances y deficiencias (e.g. Artigue, 1995; Moreno, 2005); la determinación de conocimientos

matemáticos y didáctico-matemáticos (o carencias de estos) de profesores en servicio o en formación (e.g. Pino-Fan, Godino y Font, 2018), y diversas propuestas para el aprendizaje de conceptos del Cálculo (e.g. Orts, Llinares y Boigues, 2016).

Por otra parte, Moreno (2005) menciona que, en la literatura concerniente a la didáctica del cálculo, existen dos enfoques con distintos objetivos para la enseñanza: que los estudiantes hagan matemáticas por medio de aplicaciones y comprendan la relación entre los elementos que conforman el cálculo o que los estudiantes formulen, propongan, conjeturen, validen, argumenten y discutan con sus compañeros de clase. Además, Artigue (1995) menciona un enfoque distinto en el cual se propone que el estudiante, desde un inicio, coordine los registros algebraico, numérico y gráfico de los conceptos y procesos que están aprendiendo. La autora propone trabajar las intuiciones y concepciones de los estudiantes para que éstas logren evolucionar a través de situaciones adaptadas.

Asimismo, García y Dolores (2016) trabajan el concepto de derivada con estudiantes de primer año de licenciatura a través de secuencias didácticas, basadas en lo que denominan Pensamiento y Lenguaje Variacional. Los autores diseñaron una secuencia para cada una de las tres fases graduales en las que dividieron la toma de datos. En la primera fase se trabajaron conceptos iniciales y fundamentales (¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?), para que más adelante estos fueran utilizados al relacionarlos con el concepto de derivada, en la segunda fase se trabajaron actividades para la formación del concepto de derivada y sus características. En la última fase se diseñó la secuencia de manera que se estableciera la asimilación y repaso del concepto. En estas actividades se trabajaron los registros: verbal (que se presenta propiamente como el lenguaje matemático), numérico (al trabajar con sucesiones numéricas), gráfico (al trabajar con figuras o imágenes) y algebraico (con el uso de expresiones algebraicas).

Mientras que, en Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) se estudia la comprensión del desarrollo del esquema de la derivada en el nivel bachillerato y primer año de la universidad. Se muestra, además, que los estudiantes pasan de un nivel a otro en el esquema a partir de la forma en que realizan la representación. Las características de los elementos matemáticos que conocen los estudiantes los ayudan a obtener nueva información para la resolución de problemas al establecer la relación lógica que se da entre dichos elementos. Otro de los resultados es que los estudiantes presentan dificultades para establecer relaciones entre comportamientos puntuales y globales del concepto, además de que existe una construcción progresiva del esquema y los modos de representación para el concepto.

En cuanto a las propuestas de enseñanza y aprendizaje del tema de derivadas, encontramos que, en gran parte de éstas, las gráficas son utilizadas para analizar comportamientos de funciones como concavidades, crecimiento, máximos o mínimos. Por ejemplo, Flores (2007) menciona que las gráficas funcionan como estrategia para el análisis de funciones en contextos matemáticos y extra-matemáticos. Él trabajó con estudiantes de nivel medio superior para conocer la interpretación que los estudiantes proporcionan al analizar un fenómeno que describe variaciones. En la primera parte de la actividad se solicita a los estudiantes construir una gráfica que modele los cambios en la posición de una persona que realiza un movimiento. Posteriormente, con la ayuda de sensores, se realiza la simulación para obtener la gráfica. Al realizar las simulaciones del movimiento se espera que los estudiantes describan las variaciones que se presentan y lo relacionen con la gráfica obtenida. Finalmente, se realiza una comparación entre la gráfica propuesta y la hallada con el sensor. En esta investigación se concluye que, al trabajar con situaciones como las descritas, los estudiantes adquieren aprendizajes por intuición por medio de la interpretación y construcción de gráficas.

También Vrancken y Engler (2014) trabajan con el concepto de derivada desde una perspectiva de variación y cambio. En esta investigación se trabajó con estudiantes de nivel universitario que respondieron a cuestionarios previos que ayudaron a reconocer deficiencias en la comprensión del concepto de derivada. Posteriormente se diseñó una actividad que permitiera atender estas dificultades. Los resultados obtenidos muestran que la metodología utilizada por el docente permitió a los estudiantes elaborar la definición de derivada. El trabajo grupal favoreció la comprensión de la transición entre diferentes formas de representar el concepto de derivada. Una de las dificultades detectadas fueron las deficiencias en el manejo de conocimientos previos necesarios tanto conceptuales como algorítmicos, como por ejemplo al hacer el cálculo de la velocidad instantánea.

Otros aportes esenciales de la Educación Matemática a la enseñanza y aprendizaje de la derivada son las investigaciones realizadas alrededor de la variedad de representaciones que puede tener un objeto matemático, considerándose como un elemento esencial en el pensamiento matemático la coordinación y transferencia entre los mismos (Duval, 2006). Flores (2007) utiliza el registro gráfico para el análisis de una situación que presenta variaciones y cambio y García y Dolores (2016), además de utilizar el pensamiento y lenguaje variacional, trabajan a la derivada mediante los registros numérico, algebraico y geométrico.

## MARCO TEÓRICO

La propuesta didáctica que aquí se detalla fue construida bajo la base de dos constructos teóricos principales. Por un lado, siendo conscientes de los distintos significados de la derivada (ver Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013), centramos esta propuesta en la derivada como cálculo de fluxiones (visión Newtoniana de la derivada) y el significado de Cálculo de Diferencias (visión Leibniziana de la derivada). Para ello nos valimos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Por otro lado, nuestra propuesta didáctica enfatiza en las transformaciones entre registros de representación. A continuación, detallamos los aspectos centrales de estos dos enfoques.

El Pensamiento y Lenguaje Variacional es una línea de investigación encargada de estudiar la evolución y desarrollo del lenguaje de fenómenos que presentan variaciones. Cantoral (2013) menciona que, en la educación, esta línea de investigación estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conocimientos matemáticos relacionados con la variación y el cambio. En este contexto la predicción es una herramienta para el desarrollo y la comprensión de fenómenos dinámicos, un estudiante desarrolla Pensamiento y Lenguaje Variacional cuando es capaz de predecir el cambio y cuantificarlo.

Los estudios sobre Pensamiento y Lenguaje Variacional han aportado estrategias y herramientas didácticas basadas en la idea de predicción y cuantificación. En su mayoría, se proponen secuencias didácticas para estudiar fenómenos que presentan cambios a partir de su gráfica, expresión algebraica o con el uso de software para modelar dichos fenómenos (e.g. Dolores, 2016). Estas estrategias y herramientas van dirigidas a estudiantes, profesores y profesores en formación.

En la línea del pensamiento y lenguaje variacional la derivada se trabaja a partir de los aspectos epistemológico y didáctico. Referente al aspecto epistemológico Alanís (1996) hace uso de la predicción para llegar a lo analítico, con el análisis didáctico trabajó la transición de magnitudes constantes a magnitudes variables. Pulido (1997) apoyado en el Cálculo desarrollado por Leibniz, trabaja el concepto de derivada a partir de fenómenos de física.

Con respecto a los registros de representación, nos basamos en Duval (2006), quien menciona que dichos registros de representación deben permitir la manipulación y transformación dentro de un mismo registro y/o permitir la transformación total o parcial a otro registro, puesto que, si un estudiante logra articular al menos tres registros de representación de un concepto matemático, entonces puede decirse que ha comprendido dicho concepto.

Sánchez-Matamoros, *et al.* (2008) mencionan que la clasificación que se hace en la investigación de algunos registros de representación del concepto de derivada son:

- Numérico: Se puede obtener la derivada como una sucesión de cocientes diferenciales en un intervalo, cuando una variable aumenta y la otra se queda fija.
- Gráfico: Se analiza que ocurre cuando el cambio de longitudes en el eje cambia con respecto a la longitud en el eje Y. Dentro de este registro se pueden hacer transformaciones, por ejemplo, pasar de la gráfica de la función a la gráfica de su derivada y viceversa, como pendiente de la recta tangente a una curva.
- Algebraico: Se establece como el límite del cociente diferencial cuando las diferencias en X se aproximan a cero.
- Verbal: En el que se presenta propiamente como parte del lenguaje matemático, como pendiente de una recta tangente o como razón de cambio instantáneo.

## METODOLOGÍA

### EL DISEÑO METODOLÓGICO

Esta experiencia didáctica se llevó a cabo en el contexto de un curso de Cálculo diferencial e Integral del ciclo escolar 2016-2017 en un grupo que cursa el tercer año de bachillerato general en México. La profesora responsable del curso es una de las investigadoras que participan en este escrito, por lo que se decide implementar un diseño metodológico de Investigación-Acción (Elliot, 2005) que permita a la profesora asumir una postura reflexiva y crítica ante su práctica, así como asumir una postura objetiva de profesor investigador.

El trabajo se divide en tres fases, la primera, referente al diseño de la secuencia, el cual implica una primera aproximación a los resultados de investigación referentes a didáctica del cálculo y en particular a lo que se refiere a la derivada. Este bagaje se muestra en los Antecedentes y el Marco Teórico de este trabajo. La segunda fase se refiere a la implementación de la secuencia dentro del aula como parte de los trabajos normales del curso de Cálculo diferencial. La última fase corresponde al análisis de la información y la reflexión sobre los resultados derivados de esta experiencia didáctica.

La naturaleza de los datos y el paradigma interpretativo bajo el cual hemos decidido abordar la investigación nos conduce a utilizar un enfoque cualitativo de análisis de los datos. Esto, porque estamos realizando un estudio exploratorio acerca de los procesos y conocimientos matemáticos que ponen en juego los estudiantes al trabajar con una secuencia didáctica.

Dadas las condiciones del diseño metodológico, es natural pensar en utilizar el método de observación participante (Elliott, 2005) para la implementación de la secuencia y la recolección de los datos. Además, para minimizar sesgos en la información y controlar la subjetividad del estudio se recurrió a un método de triangulación entre investigadores, en el cual participan varios observadores que opinan sobre el análisis para detectar o minimizar los sesgos que introduce la propia persona del investigador (Hammersley y Atkinson, 1995 en Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011).

#### **INFORMANTES, INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN**

Para la recolección de los datos se implementó la secuencia didáctica diseñada a lo largo de cuatro sesiones de cien minutos cada una. Se eligió como informantes a un grupo integrado por 27 jóvenes de entre 16 y 18 años de edad que están interesados en continuar estudios universitarios en carreras de Ciencias exactas o Ingeniería.

Debido a que el grupo de informantes ha trabajado con la profesora durante los meses anteriores a la aplicación de la secuencia, no se tuvo la necesidad de realizar alguna evaluación adicional de conocimientos previos.

En la primera sesión la profesora integró nueve grupos de trabajo, en los cuales intentó mantener un equilibrio en cuanto al rendimiento de los estudiantes, buscando que los equipos tuvieran estudiantes de rendimiento alto, medio y bajo, según su conocimiento y apreciación sobre sus estudiantes. Estos equipos se mantuvieron durante dos sesiones más y la última sesión el trabajo se realizó de forma individual.

Durante la implementación de la secuencia se realizaron grabaciones de audio y vídeo de todas las sesiones, las cuales fueron transcritas y codificadas para el análisis, además de recopilar todas las evidencias escritas que se hubieran generado en los equipos de trabajo durante las sesiones.



Para el análisis de la información decidimos utilizar el enfoque de la *Grounded Theory*, cuyos fundamentos están en una recolección y análisis sistemático de datos, a través de una continua interacción entre el análisis y la recolección de información, generando así una parte de la teoría a la que se quiere llegar durante el proceso de investigación, emergiendo directamente de los datos (Strauss y Corbin, 1994).

## DISEÑO DE SECUENCIA DIDÁCTICA

En esta primera fase definimos lo que entendemos por secuencia didáctica y el uso que le daremos dentro de la experiencia a realizar.

La secuencia didáctica surge de la necesidad de organizar la enseñanza y el aprendizaje y se condiciona por las personas que la elaboran de acuerdo a los objetivos que se persigan y el contexto en el cual se aplique y tiene el objetivo de unificar los procesos de investigación educativa, ser innovadoras y permitir el trabajo en equipo (Fernández, 1999).

Sobre la estructura de ésta, Tobón, Pimienta y García (2010) comentan que una secuencia es un conjunto de actividades de aprendizaje y evaluación diseñadas de forma que el docente sea el guía de los estudiantes en la adquisición de nuevos conocimientos. Además, para el planteamiento de las actividades se deben tener en cuenta tareas y preguntas que representen un reto a los estudiantes, que les supongan contradicciones y que contribuyan a que hallen soluciones o propongan conjeturas de forma independiente.

Sobre el contenido y bases teóricas de la secuencia, como hemos mencionado en los primeros apartados de este escrito, los trabajos de investigación revisados en el apartado de antecedentes sugieren la idea de realizarla tomando como base situaciones de variación y cambio que permitan identificar puntos críticos y variaciones en un contexto de movimiento, esto nos lleva a proponer la actividad sobre la base de dos constructos principales: el pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral, 2013) y el tratamiento y conversión entre distintos registros de representación (Duval, 2006). Todo esto nos permitirá introducir a los estudiantes al concepto de derivada como aquella que nos indica la razón de cambio instantánea entre dos variables.

La secuencia didáctica que diseñamos consta de tres actividades (ver Anexo 1) utilizando la siguiente situación como base para el trabajo general:

### Actividad 1. Conversión entre el registro gráfico y verbal

Instrucciones: Traza la gráfica posición – tiempo que representa el movimiento de Juan en la siguiente situación:



Juan sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero. No es necesario tomar el camión, pues su amigo vive en una colonia próxima a la suya. Cuando sale de casa contesta un mensaje avanzando con paso lento los primeros 250 metros, en cuanto envía el mensaje continúa caminando más rápido. Cuando han transcurrido 8 minutos recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo. Llega a casa, toma su libreta y, como ya es tarde, camina a la esquina y espera 3 minutos para tomar un taxi que lo lleva a la casa de su compañero.

Figura 1. Actividad 1 de la secuencia didáctica

Uno de los principales focos de atención en la secuencia es el tránsito entre registros verbales y registros gráficos que lleven al estudiante a analizar la situación de variación y así reflexionar sobre *qué* y *cómo* cambia el movimiento para después reflexionar sobre *cuánto* cambia.

Otro punto central es el análisis de representaciones gráficas dado que en Cálculo las gráficas son utilizadas como herramientas privilegiadas para analizar comportamientos de funciones como concavidades, crecimiento, máximos o mínimos, etcétera, además de usarlas para estudiar cómo varía la posición y las relaciones entre velocidad y aceleración, con lo cual se establece un significado de la variación mediante la modelación-graficación (Suárez y Cordero, 2010).

Las actividades que proponemos promueven entre los estudiantes el análisis de diferentes cualidades de variación: ¿qué magnitudes cambian?, ¿cuánto cambian? y ¿cómo cambian? En éstas, se acerca al estudiante a la necesidad de establecer una forma para analizar las variaciones entre las magnitudes, por medio del análisis de razones de cambio donde establecerá la relación entre pendiente de una curva y razón instantánea de cambio.

Tomando en consideración los resultados obtenidos por Vrancken y Engler (2014) y Dolores (2009), nuestra intención fue provocar que los estudiantes utilizaran el estudio de la variación mediante la razón de cambio, velocidad media, razón de cambio media, relación con la recta secante, velocidad instantánea, razón de cambio instantánea y relación con la recta tangente.

Se busca que la secuencia ayude a que el estudiante pueda inferir qué es lo que ocurre en diferentes intervalos de tiempo y modelar la situación a partir de una gráfica, para posteriormente analizar los intervalos de tiempo propuestos y llegar al análisis puntual. Esperábamos que a través de estas fases el estudiante lograra construir una primera noción general de derivada como aquella que nos indica la razón de cambio instantánea entre dos variables.

## RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

Como habíamos mencionado, la aplicación se llevó a cabo a lo largo de dos semanas repartidas en cuatro sesiones de 100 minutos cada una. La aplicación constaba de dos partes, una de trabajo por equipos y una puesta en común grupal a través de exposiciones en el pizarrón la cual era moderada por la profesora. Para que el lector pueda distinguir el origen que tienen los datos que se muestran en los resultados, en adelante nos referimos a las evidencias escritas de manera grupal como la participación del "Equipo #" y a las participaciones individuales de los estudiantes expuestas de forma oral como "E#".

### SOBRE LOS PROCESOS Y CONOCIMIENTOS QUE DETONA EN LOS ESTUDIANTES LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Una vez que se analizaron las evidencias, hemos podido establecer cinco categorías que engloban los procesos de resolución que realizan los estudiantes según los conocimientos que ponen en juego:

#### **Categoría 1. Identificación de la presencia de variables y relaciones entre estas**

Para poder trazar la gráfica los estudiantes tuvieron que hacer una lectura del planteamiento que modela el movimiento de Juan. En la actividad 2 también

fue necesario establecer la relación posición tiempo para poder hacer el análisis tanto global como puntual de la gráfica que se les proporcionó. Por ejemplo, en la pregunta 5 de la actividad dos, donde se solicita al estudiante identificar intervalos donde se cumple que la velocidad es menor en uno de ellos en distintas secciones, se deben elegir segmentos en la gráfica, donde la pendiente de la recta secante, sea menor que la pendiente de la recta secante en otro intervalo. Esto nos da indicios de cómo relacionan pendiente de recta secante con velocidad.

### Categoría 2. Las gráficas muestran comprensión sobre la variación en la posición

El trazo de la gráfica en la actividad 1 permite analizar si los estudiantes consideran a las variaciones constantes o no constantes. Por ejemplo, la gráfica de la figura 2 muestra variaciones no constantes. Esto nos permite decir que algunos estudiantes tienen conocimiento del tipo de gráficas que se generan con movimientos no constantes.

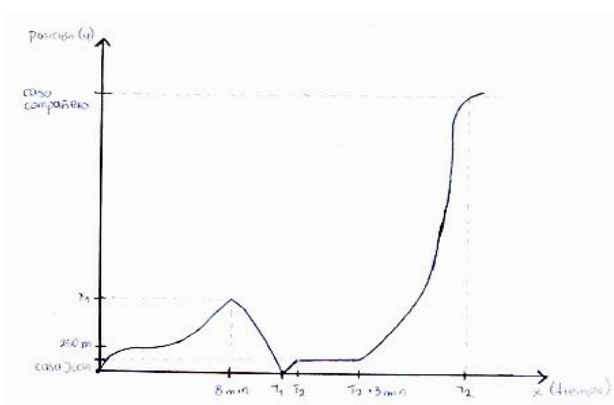


Figura 2. Gráfica posición tiempo de variaciones no constantes

Otro ejemplo, es la gráfica de la figura 3, la cual fue construida por siete de los nueve equipos. En esta se puede observar que graficaron movimientos de velocidad constante y que no tienen una idea clara de que tipo de gráficas se generan cuando los movimientos no son constantes.

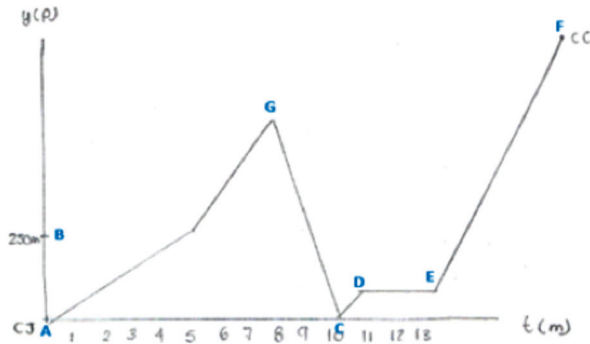


Figura 3. Gráfica que representa movimientos con variaciones constantes

### Categoría 3. Uso de conocimientos que no pertenecen a la matemática formal

En todas las actividades los conocimientos no formales dentro de la matemática fueron de gran apoyo para los estudiantes. Sin embargo, en algunas actividades este hecho es más notorio que en otras. Por ejemplo, en las preguntas 2 y 3, de la actividad 2 parte II, donde los estudiantes deben contestar cómo es la velocidad en el intervalo de  $a$  a  $b$  y cómo es la velocidad de  $b$  a  $c$ , fue de gran utilidad para los estudiantes considerar qué es lo que estaba haciendo Juan en ese momento, lo cual generó que no fuera necesario trazar intervalos y trazar rectas secantes dentro de estos intervalos. Otro ejemplo, en la pregunta 4 de la actividad 2 parte II, donde se cuestiona sobre lo que ocurre alrededor del punto de inflexión, el estudiante E13 dice:

E13: Cabe recalcar que en lo que mencionó mi compañero también utilizamos el contexto de la lectura y nos apoyamos mucho de la primera respuesta en donde vemos la gráfica. Al inicio de la gráfica [se apoya en la gráfica de la figura proporcionada en la actividad] se puede considerar en reposo y vemos cómo va acelerando de cierta manera hasta llegar a una aceleración máxima que en la gráfica sería el punto  $b$  y al finalizar vemos que va desacelerando hasta de nuevo quedar en un estado de reposo. Al analizar también lo que sería el problema vemos que, del punto  $a$  al punto  $b$ , está llevando cierta aceleración, está tratando de ir más rápido, por eso podemos inferir que va más rápido que de  $b$  a  $c$ .

En este caso, la experiencia sensorial de movimiento y las relaciones con velocidad y aceleración, son los elementos no formales de la matemática en los que se basa el estudiante para generar su explicación.

#### **Categoría 4. Uso implícito del concepto de pendiente**

En algunos equipos no se utilizó propiamente el término pendiente, pero se habló sobre la inclinación de la recta o inclinación de la curva como un sinónimo de pendiente de la recta, usado para poder realizar la comparación entre las velocidades. Ejemplo de ello es la respuesta del Equipo 3:

Equipo 3: Entre más vertical sea la curva la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo es mayor. Como en la sección II la curva está más inclinada podemos decir que su razón de cambio es más pequeña. Tomamos razón de cambio como sinónimo de velocidad.

Esta afirmación muestra evidencia de que se establece una relación entre la velocidad y la idea de variación, además de proporcionar un indicio de que en este equipo podrían tener conocimiento acerca de que la pendiente de una recta también nos proporciona información sobre la velocidad.

#### **Categoría 5. Relación de conceptos pendiente de recta secante-velocidad promedio y pendiente de recta tangente-velocidad en un punto**

La relación entre estos conceptos se notó con mayor claridad en las actividades 2 y 3. Por ejemplo, en la pregunta 5 donde se solicita identificar algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII, el Equipo 2, comenta que “la sección inicial del intervalo VII entre los puntos (C, D) tiene una velocidad menor al intervalo (A, B) pues la pendiente de la recta  $\overline{AB}$  es mayor a la pendiente de la recta  $\overline{CD}$ ”. Se apoyan en la Figura 4.

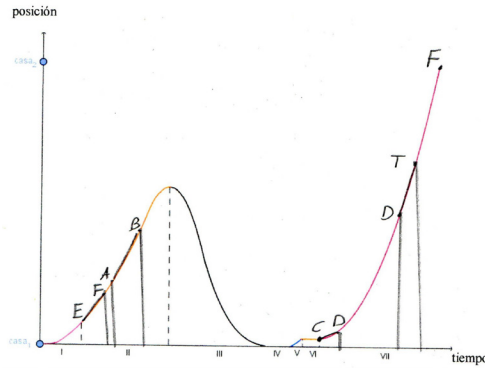


Figura 4. Comparación de velocidades.

Otro ejemplo de esta categoría se observa cuando, en la puesta en común para las preguntas 5 y 6 de la actividad 2 parte I, se retomó la respuesta de la pregunta 4, dado que no en todo el intervalo de la sección II se cumple que la velocidad es menor con respecto a la velocidad de la sección VII. Cuando se preguntó si existía alguna contradicción entre la respuesta dada a la pregunta cuatro y las preguntas cinco y seis, los estudiantes comentaron:

E13: Es posible, cuando hablamos de la velocidad entre dos tiempos distintos, sólo se hace un promedio de la velocidad que hubo en un intervalo. Podemos decir que hablamos de una velocidad promedio.

Durante esta misma discusión, el estudiante E10 complementa la participación del estudiante E13 y explicita la forma en que se relaciona la pendiente de la recta secante y la velocidad promedio.

E10: Se puede expresar como un  $\Delta x$  [cambio en la posición] sobre un  $\Delta t$  [cambio en el tiempo]. Que también es igual a la velocidad media y a la pendiente de la recta secante, porque la pendiente es el cambio en Y, que en este caso es el cambio en la posición, sobre el cambio en X, que por ahora es el cambio en el tiempo. Para nuestro problema nos va a quedar, posición final menos posición inicial todo entre tiempo final menos tiempo inicial igual a la velocidad promedio. [Escribe en el pizarrón la relación  $\frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \bar{v}$ ].

Las cinco categorías en las que englobamos el comportamiento matemático de los estudiantes frente a nuestra propuesta didáctica nos dan muestra de cuán benéfico es el manejo de gráficas en la comprensión del concepto de derivada, lo cual coincide con lo reportado por Borji *et al.* (2018). Asimismo, es de resaltar cómo la situación contextual permitió que los estudiantes hicieran un contraste entre sus gráficas y las respuestas que daban a los cuestionamientos.

Si bien es cierto que los estudiantes no habían tenido contacto con el tema de derivada, los temas que habían trabajado en sus cursos de física clásica les permitieron comprender y cuestionar las gráficas. En dicho curso se hablaba sobre velocidades promedio e instantánea, pero no se formalizaba con la noción de derivada, ya que eso era curricularmente incompatible.

## REFLEXIONES FINALES

La contribución didáctica que se presenta aquí, trata de romper con el ímpetu curricular en el que la introducción al concepto de derivada se realiza mediante un tratamiento algorítmico que se desvincula de los significados del propio objeto matemático, tal como ha sido reportado en diversas investigaciones (e.g. Salinas y Alanís, 2009). Nuestra propuesta trata de favorecer el desarrollo de pensamiento variacional y el tránsito entre registros de representación. A continuación, detallamos cómo estos elementos se vieron favorecidos.

### SOBRE EL USO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL PARA EL ANÁLISIS DE SITUACIONES DE VARIACIÓN

Las actividades propuestas en la secuencia permitieron al estudiante trabajar una situación en la que identificó los distintos cambios de velocidad. Por ejemplo, en la actividad 1, los estudiantes construyeron gráficas que modelan distintas velocidades en cada momento donde Juan cambia de posición, como lo muestra la figura 3. En esta figura, si bien no se está considerando las variaciones naturales en la velocidad de Juan, sí se consideran diferentes pendientes que se corresponden con la situación contextual. Lo cual nos permite interpretar que los estudiantes de este equipo están empleando nociones (básicas) de variación y cambio.



Otra evidencia que muestra cómo los estudiantes trabajaron el concepto de variación, es que en todo momento utilizaron el planteamiento, donde saben que se modelan cambios, para contestar las preguntas o para ratificar su respuesta.

Al analizar las evidencias hemos notado que las actividades 1 y 2 permiten a los estudiantes hacer uso de estrategias de trabajo, que están ligadas a pensamiento y lenguaje variacional, sin embargo, parece que esta idea se rompe en la actividad 3, dado que se limitan a la representación geométrica de la derivada sin atender el comportamiento de variación que surge alrededor de un punto. Constatamos que los conocimientos de la asignatura de física fueron determinantes en el uso de esta representación dejando a un lado el análisis de variación alrededor de un punto para determinar la velocidad puntual, como lo muestra la figura 5 y la explicación proporcionada por el estudiante E2.

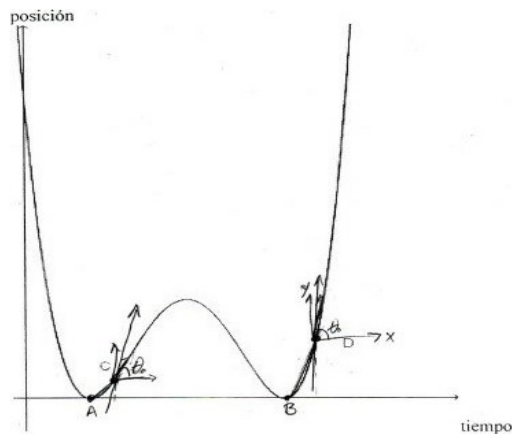


Figura 5. Comparación de la velocidad en dos puntos.

E2: La velocidad del punto D es mayor a la velocidad del punto C, debido a que, si se traza una recta tangente que sólo toca a esos puntos, se puede obtener la velocidad de cada punto; después se pueden comparar los grados de inclinación de ambas pendientes tangentes y así se nota cuál de los puntos tiene mayor velocidad.

## SOBRE EL TRÁNSITO Y CONVERSIÓN ENTRE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En la primera actividad se buscó, entre otras habilidades, que los estudiantes realizaran el tránsito entre el registro verbal y el registro gráfico con la representación del movimiento de Juan. Para ver si este se realizó, al analizar las evidencias de esta actividad consideramos los siguientes aspectos: identificación de momentos clave, puntos de referencia y gráficas que representan movimientos constantes y no constantes.

En el problema se pueden observar siete momentos clave: (i) Sale de su casa y camina a paso lento porque envía el mensaje, (ii) avanza más rápido, (iii) recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo, (iv) se mantiene en su casa para buscar la libreta, (v) camina a la esquina, (vi) espera el taxi y (vii) toma el taxi y se va a casa de su amigo.

De los nueve equipos, dos consideraron todos estos momentos y los equipos restantes omitieron el momento en el que Juan regresa a casa y toma su libreta. Ejemplo de esta gráfica es la que se muestra en la figura 6.

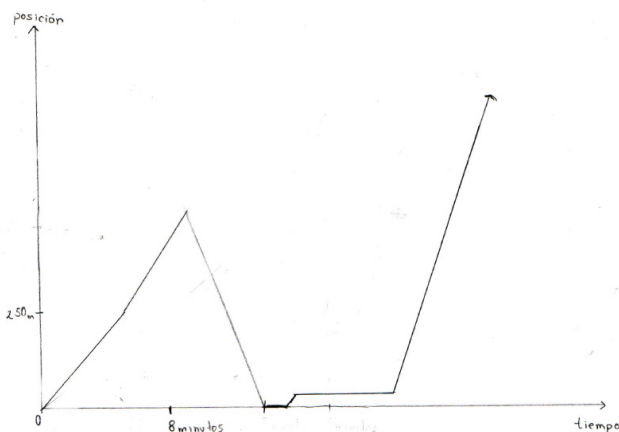


Figura 6. Posición de Juan.

De la misma forma nos fijamos en los puntos de referencia, sobre todo en la ubicación de las casas de Juan y de su compañero. Consideramos que estos son determinantes en la forma de construir la gráfica. Durante la puesta en

común de la gráfica, se cuestionó acerca de la colocación de estos puntos. El estudiante E22 menciona que tuvieron problema al colocar la casa de Juan porque cuando regresa a ella pensaron que debería regresar al origen. La explicación que proporciona el estudiante E10 es:

E10: Bueno, es que de lo que decía de la casa de Juan, yo creo que no hay conflicto de que digas que la casa de Juan es el origen porque entonces estarías regresando a la posición cero en un tiempo cero. Pero, por ejemplo, en un determinado tiempo puedes regresar a la posición donde iniciaste, en  $t=3$ , las coordenadas son  $(3, 0)$  y eso significa que pasados tres minutos él regresa a esa posición, no regresa al origen. Nosotros lo tomamos así y no tuvimos ningún conflicto.

Esta discusión llevó al grupo a establecer que la gráfica debe ser una función y que, además, considerando que el tiempo es una variable, no se puede regresar de manera horizontal. En la Figura 7 también se observa que se representaron movimientos constantes y además se observa cómo hay un cambio de velocidad de un momento a otro.

En la actividad 2 y 3 pudimos observar que se promovió el tránsito entre el registro gráfico, verbal y analítico. Por ejemplo, en la actividad 3, durante la puesta en común, el estudiante E11 nos explica:

E11: Yo recuerdo que en Física vimos que la velocidad en un punto es la velocidad instantánea y se puede encontrar con un límite, el  $v_{ins} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\bar{v}]$  y sabemos que la velocidad promedio es posición final ( $x_f$ ) menos posición inicial ( $x_i$ ) entre un tiempo final ( $t_f$ ) menos un tiempo inicial ( $t_i$ ) y entonces el límite anterior nos queda como:  $v_{ins} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]$  pero necesitamos conocer a las posiciones o una función para calcular a la velocidad.

En esta explicación se hace presente el registro algebraico y el registro verbal. También en la figura 6, que corresponde a la actividad tres de la secuencia, se puede observar cómo está presente el registro geométrico. Dadas las evidencias podemos decir que nuestra secuencia sí permite (y promueve) el tránsito entre los registros de representación para la derivada, aunque estos se logren sólo de forma parcial por los estudiantes.

## **SOBRE ASPECTOS GENERALES DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA**

Con respecto a la primera actividad los estudiantes establecieron relaciones entre las variables del problema de Juan para plasmarlos en el plano cartesiano utilizando expresiones que están relacionadas con la idea de variación y cambio. En todos los equipos de trabajo se mencionó a la función de primer grado como la herramienta principal para modelar cambios constantes y las curvas para cambios variables, además de reconocer a la pendiente de la recta como el elemento que nos modela dichos cambios.

Se tuvieron algunas dificultades en la segunda parte de la actividad 2, puesto que no se comprendía lo que se solicitaba. Al parecer, aunque hay un cambio de concavidad de la gráfica que se muestra en la actividad 2 parte II, éste no es muy notorio y esto no fue de ayuda al pensar que los estudiantes iban a tomar intervalos a la izquierda y derecha del punto de inflexión. Aún con estas dificultades los equipos se apoyaron en conocimientos previos para hacer uso de los conceptos recta secante y velocidad promedio. Pese a las dificultades, los estudiantes lograron establecer la comparación de la velocidad entre las diferentes secciones de una gráfica.

Ninguna de las soluciones de los estudiantes a la actividad 3 satisface nuestros objetivos puesto que, aunque en la mayoría de equipos se empleó a la pendiente de la recta tangente para calcular velocidades instantáneas, no se utilizó el proceso de acercarse al punto C y al punto D, fijando un intervalo y luego hacer que la longitud de tiempo se hiciera cada vez más pequeña de acuerdo a lo que se hizo en la actividad 2 parte II.

En general la secuencia didáctica nos permitió observar el proceso de transición de los estudiantes entre el registro verbal, gráfico, analítico y geométrico. Analizar el comportamiento de la velocidad en secciones, alrededor de un punto de inflexión y en un instante dado, nos ayudó a poner atención en aspectos concretos del comportamiento gráfico (¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, crece, decrece, aceleración, velocidad promedio, velocidad en un instante), lo cual forma parte esencial de la construcción de los distintos significados del concepto de derivada.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo brindado por el Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP), de la Subsecretaría de Educación Superior de México, para el desarrollo y presentación de este trabajo.

## REFERENCIAS

- Alanís, J.A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis doctoral inédita. México, D. F.: Cinvestav.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las aportaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55.
- Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(6), 2301-2315.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México, D. F.: Gedisa.
- Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Memorias del XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 99-116). Ciudad Real, España: SEIEM.
- Dolores, C. (2009). Usos de las gráficas y sus representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20 (pp. 499- 503). Camagüey, Cuba: Clame.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Elliott, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid, España: Ediciones Morata.

- Fernández, J. (1999) *¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras?* Sevilla, España: Diada Editora.
- Flores, C. (2007). Las Formas Básicas de Graficación y su Relación con Situaciones de Movimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20 (pp. 485-489), Camagüey, Cuba: Clame.
- García, M., y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la enseñanza del concepto de derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 46, 45-70.
- Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96), Córdoba, España: SEIEM.
- Orts, A., Llinares, S., y Boigues, J.F. (2016) Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta Tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 111-134.
- Pino-Fan, L., Castro, W.F., Godino, J.D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123 – 150.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(1), 63-94.
- Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en Física y la matemática escolar*. Tesis doctoral inédita. México, D. F.: Cinvestav.
- Robles, M., Del Castillo, A., y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática*, 24(1), 5-41.
- Salinas, P., y Alanis, J.A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2). 267-296.
- Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N. Denzin, y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, C.A.
- Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 319-333.
- Tall, D. (1993). Students' difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992*, 13-28, Quebec, Canadá: ICME.

Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletín de Educación Matemática*, 28(48), 449-468.

DINAZAR ISABEL ESCUDERO ÁVILA

**Dirección:** Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP  
FM-9 303 Av. San Claudio y 18 sur.  
Col. San Manuel. Ciudad Universitaria.  
C.P. 72592

**Teléfono:** 222 9 55 00 ext. 7509