

UMA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERIODICIDADE

Sonner Arfux de Figueiredo, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, Universidade Anhanguera de São Paulo-UNIAN. (Brasil)
sarfux@uems.br, nielce.lob@gmail.com

Resumo

Neste artigo, investigamos em um experimento de ensino, como alunos de Licenciatura em Matemática constroem e consolidam o conceito de periodicidade. No estudo se desenhou uma investigação contemplando a caracterização do mecanismo cognitivo centrado na relação atividade-efeito em uma trajetória hipotética de aprendizagem (*Hypothetical Learning Trajectory*-HLT), segundo Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004). A metodologia foi o *Design Based Research* e os sujeitos foram dezesseis acadêmicos ingressantes no curso. Os resultados indicaram que interações dinâmicas na HLT favoreceram a construção do conhecimento em um processo de abstração reflexiva nas fases de participação e antecipação consolidando uma generalização necessária no processo de abstração reflexiva.

Palavras-chave: ciclo trigonométrico, processo de generalização, experimento de ensino, trajetória hipotética de aprendizagem

Abstract

In this article, we investigate, through a teaching experiment, how students of Mathematics degree course build and consolidate the concept of periodicity. In the study, an investigation was designed contemplating the characterization of the cognitive mechanism centered on the activity-effect relation in a hypothetical learning trajectory (HLT), according to Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004). A design-based research methodology was used with sixteen students entering the course. The results showed that dynamic interactions in HLT favored the construction of knowledge in a process of reflexive abstraction in the participation and anticipation phases, consolidating a necessary generalization in the process of reflexive abstraction.

Keywords: trigonometric cycle, generalization process, teaching experiment, hypothetical trajectory of learning

■ Introdução

A problemática aqui discutida surgiu no seio de uma pesquisa de doutoramento sobre uma metodologia para a formação inicial de professores de Matemática, e tem como sujeitos alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática numa instituição pública do interior do Estado de Mato Grosso do Sul, Brasil. Nosso trabalho se enquadra nas investigações que se preocupam em compreender como estes alunos constroem os significados em uma situação de aprendizagem com interações dinâmicas com o

Software GeoGebra em um estudo exploratório do conceito de periodicidade e, em particular, de modo a analisar como este ajuda a relacionar a compreensão do argumento de funções trigonométricas no ensino superior.

O conhecimento da gênese histórica dos conceitos matemáticos pode ser uma ferramenta de grande valia para levar o aluno à compreensão mais aprofundada desses conceitos e para o desenvolvimento da linguagem matemática. Em particular, o conceito de periodicidade em funções trigonométricas, tendo percorrido muitos séculos desde as suas primeiras noções intuitivas, só em 1710 aparece a primeira menção a esse conceito feita por Thomas-Fanten de Lagny (Lobo da Costa, 2003).

O ensino e a aprendizagem de trigonometria têm sido objeto de debate e investigação nas últimas décadas e constitui uma parte importante nos cursos de Licenciatura de Matemática, servindo como um dos conteúdos de transição da matemática da Educação Básica para o Ensino Superior. Assim, este é um dos conteúdos cujo estudo se inicia no Ensino Médio e retorna na pauta do curso de Licenciatura em Matemática, servindo como base de sustentação para as demais disciplinas do curso como, por exemplo, o Cálculo, a Física, a Geometria, a Geometria Analítica, entre outras. Com aplicação incontestável nas diversas áreas das ciências exatas, seu estudo deve atender a compreensão das ideias e conceitos básicos, sua aplicação na resolução de problema, na manipulação de algoritmos e a no estudo de Cálculo e em outras disciplinas.

Alguns estudos didáticos sobre o uso das tecnologias da informação na educação têm se apresentado de forma constante na literatura. Pesquisas assinalam as contribuições do uso desse recurso na aprendizagem de conceitos matemáticos evidenciando que o uso das tecnologias, possibilita ao aluno identificar representações equivalentes na definição de um mesmo conceito, além de favorecer a interação e o dinamismo.

Nosso trabalho se enquadra nas investigações que se preocupam em compreender como o acadêmico constrói os significados em uma situação de aprendizagem em uma Trajetória Hipotética de aprendizagem em um estudo exploratório dos conceitos de trigonometria no ciclo trigonométrico.

A investigação a que nos propusemos teve a finalidade de explorar a construção do significado do conceito de funções trigonométricas a partir de diferentes registros (compreensão). Neste aspecto, seguimos Duval (1998) para o qual a compreensão de um conceito requer a coordenação de diferentes registros de representação, pois somente com um registro não se explora toda a complexidade do conceito.

■ Marco Teórico

A perspectiva teórica adotada procede a uma particularização da ideia de abstração reflexiva elaborada a partir das ideias de Piaget (1977) sobre abstração reflexiva, utilizada por Simon e Tzur (2004). Estes autores apontam que as ações dos estudantes produzem diferentes efeitos que podem ser considerados por ele no desenvolvimento de seus processos de abstração.

O um enfoque proposto por Simon (1995) e por Simon e Tzur, (2004), a teoria sobre desenvolvimento profissional propõe um modelo de análise da prática do professor que permite, com posterioridade, incorporar resultados aos programas de formação de professores. Explicam os autores ainda que enquanto

os alunos concentram em suas atividades em relação à sua meta, criam registros mentais, a atividade de experiência é gravada e desenvolve uma interação da atividade ligada ao seu efeito.

Este mecanismo baseia-se na descrição de Piaget (1977), sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, onde as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) de ações na próxima. O segundo aspecto é um reflexo, onde uma reorganização entre ações ocorre. O autor faz uma distinção entre os dois tipos de reflexão realizados pelos estudantes em seus registros da experiência.

Tzur e Simon, desde a noção de abstração reflexiva de Piaget, assumem que os processos mentais dos estudantes são elementos constituintes da compreensão de um objeto que envolve duas fases: a fase participativa, onde o estudante desenvolve diferentes atividades guiadas por um objetivo de resolver uma tarefa matemática; a fase antecipatória, em que antes de uma determinada tarefa cuja resolução envolve o uso de um conceito matemático pelo aluno que deve considerar pertinente o uso do conceito matemático na resolução dessa tarefa. Neste caso, o aluno pode usar o conceito de forma adequada, independentemente do contexto ou da tarefa.

■ Mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito na HLT

O Mecanismo de reflexão sobre a atividade-efeito é uma trajetória hipotética de aprendizagem (HLT - *hypothetical learning trajectory*) proposta por Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004), elaborada a partir das ideias de Piaget sobre abstração reflexiva. Esse mecanismo identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo da abstração.

Para alcançar seu objetivo, o estudante realiza uma determinada tarefa (atividade dirigida por um objetivo) proporcionando a possibilidade de prestar atenção nos efeitos da atividade realizada (efeito das atividades), neste processo de observação dos efeitos na atividade o estudante cria registros mentais (registro da relação atividade-efeitos). Assim para entender o desenvolvimento das estruturas mentais por parte dos estudantes, ou seja, estabelecer explicitamente as relações entre as características da HLT de estudantes e características de sequências de ensino (identificar os objetivos de aprendizagem, definir fluxos de trabalho e contribuir para uma avaliação detalhada dos entendimentos de matemática do estudante).

Para os autores as tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem dos conceitos matemáticos específicos e, portanto, são elementos chave no processo de ensino. Dada a natureza hipotética inerentes ao processo, o professor se verá obrigado a modificar constantemente cada aspecto da HLT.

Ainda sobre as tarefas matemáticas, Simon e Tzur (2004) identificaram tipos de tarefas que podem propor aos alunos para que desenvolvam suas capacidades. Chamam de *tarefas iniciais* as que podem ser realizadas por estudantes que usam seu conhecimento prévio, já as tarefas que permitem que os alunos reflitam sobre ela própria relacionando-a para gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito, os autores denominam de *tarefas de reflexão* e caracterizam ainda as *tarefas de antecipação* realizadas

durante uma HLT às quais, para realização necessitam que o aluno tenha produzido uma abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

As tarefas iniciais são usadas para a criação e o reconhecimento de certas experiências; as tarefas reflexivas são para direcionar a atenção dos alunos para a relação atividade-efeito e as tarefas de antecipação têm o intuito de levar os estudantes a identificar e analisar regularidades. Segundo Simon e Tzur (2004), as metas de aprendizagem que os alunos podem alcançar estão relacionadas com suas concepções correntes e com as tarefas que lhes são disponibilizadas. Assim sendo, para o professor, entra em cena o mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito quando consideramos sua necessidade de selecionar, entre as atividades disponíveis, tarefas que possam impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos.

■ Participantes e desenho do experimento de ensino

No experimento de ensino elaboramos uma HLT para o estudo dos conceitos de funções trigonométricas e nele utilizamos tarefas matemáticas envolvendo recursos tecnológicos, na concepção de formação inicial de professores para uso da informática integrada à prática pedagógica.

A metodologia da pesquisa foi o *Design Based Research*, segundo Coob *et al* (2003) e os sujeitos de pesquisa foram dezesseis acadêmicos de uma turma ingressante na Universidade no curso de Licenciatura em Matemática. O experimento teve duração de 12 seções de 50 minutos divididos em quatro módulos, sendo que os módulos I e III foram com duas seções cada e os módulos II e IV com quatro sessões cada. As tarefas se articularam, com o uso da tecnologia e da exploração gráfica com o *software GeoGebra*, a partir dos conceitos de funções trigonométricas no ciclo trigonométrico; do conceito de periodicidade, da exploração e conjecturas para a validação entre o argumento de uma função trigonométrica e seu período. Cabe destacar que neste artigo trazemos a discussão em torno do conceito de periodicidade.

■ Discussão

As tarefas propostas se dividiram em quatro momentos distintos: (1) estudo da periodicidade com o uso de um vídeo e por meio da exploração de um *applet* no *GeoGebra* o qual esboçava esse movimento periódico; (2) vivência de um bingo de funções trigonométricas contendo funções com diferentes períodos; (3) confecção de um esboço de roda gigante com materiais recicláveis e exploração de um *applet* no *GeoGebra* que simulava o movimento de uma roda gigante; (4) plotagem de gráfico de funções trigonométricas e investigação sobre a relação entre o argumento e o período. No primeiro momento ficou caracterizada a “fase de participação” do licenciando em Matemática.

Foi possível analisar a compreensão sobre o argumento de uma função trigonométrica. No primeiro momento, a tarefa foi movimentar o ponto P e observar a figura no *applet* $P=A$ que começa a se movimentar sobre a circunferência no sentido anti-horário até completar a tabela e o gráfico como segue no *applet*, os alunos fazem inferências e conjecturas, generalizando as suas propriedades sejam elas algébricas ou geométricas.

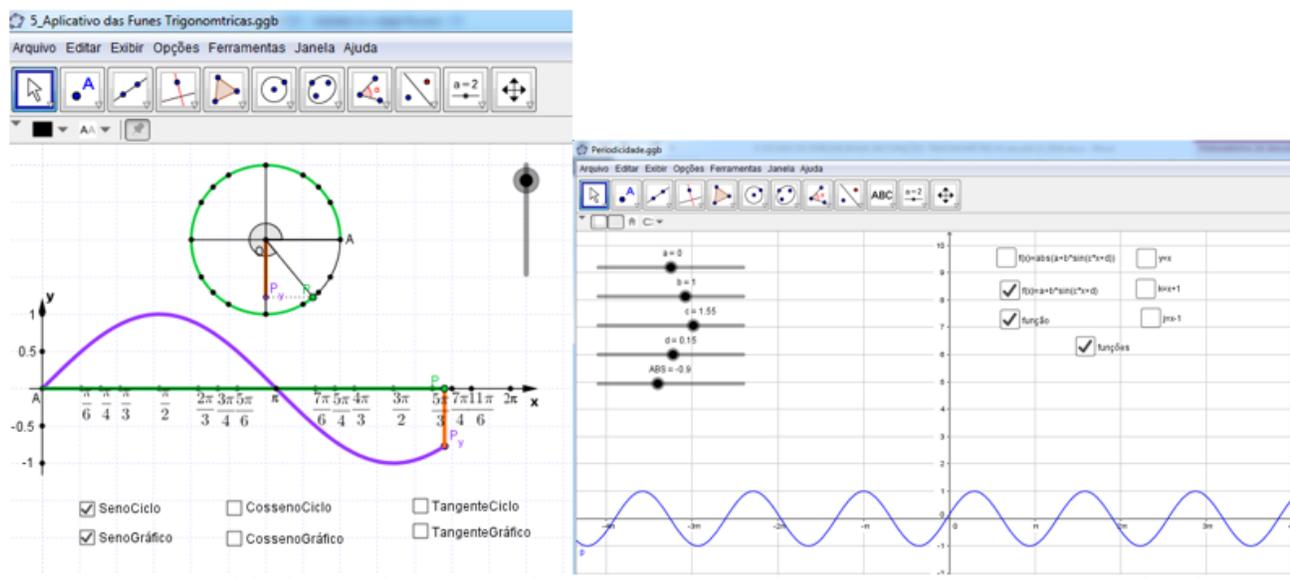


Figura 1: Applet que caracterizou a fase de participação
 Fonte: Figueiredo, 2015

Ainda caracterizando a fase participativa do aluno usamos um jogo de bingo trigonométrico. A atividade consistiu em utilizar cartelas com as funções trigonométricas e o professor projetava o gráfico da função em um Data Show; os licenciandos marcava m na cartela a expressão algébrica da função projetada (para isto foi determinado 1 minuto após exposição do gráfico para que o licenciando interpretasse a função). Cabe ressaltar a boa interação e interesse por parte dos licenciandos pela atividade e as anotações realizados com relação a esta atividade. O diálogo abaixo ilustra essa afirmação

Licenciando A: *na aula passada vimos função trigonométrica no software, onde construímos as funções, nesta o professor inverteu, e escrevia no software e nós a função, no jogo de bingo, foi muito difícil porque não consigo interpretar rápido o domínio e a imagem e período da função. (grifo nosso)*

Licenciando C: *o jogo foi outra maneira do professor fazer com que nós aprendêssemos funções, muito bom.*

Licenciando F: *através do jogo combinamos os resultados do gráfico no software com a escrita, levou a gente a analisar como funciona a função seno, cosseno e tangente com o jogo e o software, muito bom.*

Nesta atividade nos permitiu levar o licenciando a analisar o comportamento da função trigonométrica a partir de uma visualização geométrica para uma analítica expressando a lei da função. Destacamos nestes dois momentos o processo de transição da “fase de participação” em um HLT para a “fase de antecipação” entre os módulos I e II do experimento sob a coordenação de diferentes registros (DUVAL, 1988).

A “fase de antecipação” se caracterizou quando utilizamos o bingo de funções trigonométricas, no qual o aluno plotou o gráfico de cada função utilizando o *GeoGebra* e explorou as características a partir do *software*; desta forma entendemos que o aluno foi consolidando os conceitos trigonométricos.

No módulo 3, foi proposta a confecção de um esboço de roda gigante com materiais recicláveis e a exploração de um *applet* no *GeoGebra* que simulava o movimento de uma roda gigante. Assim discutimos todo o conteúdo de trigonometria e dispusemos para esta etapa final de atividades com todos os materiais

utilizados durante as aulas para o ensino de trigonometria. Com isto, nosso objetivo foi fomentar as ações cognitivas necessárias para o sistema semiótico relacionando todos os tipos de representações, a fim de construir a concepção de períodos no estudo de funções trigonométricas.

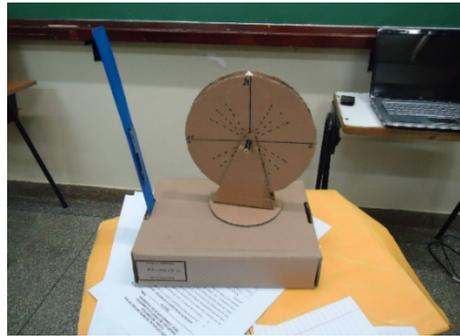


Figura 2: Roda gigante confeccionado em papelão
Fonte: Figueiredo, 2015.

Para estabelecer se os alunos haviam respondido corretamente as tarefas da atividade sobre funções trigonométricas desde sua expressão gráfica até a algébrica, decidimos encontrar evidências na fase de antecipação. Assim, no modulo 4 a plotagem do gráfico de uma função trigonométrica e a investigação sobre a relação entre o argumento e o período da função nas respostas dos alunos, identificamos os conceitos, as ideias utilizadas e os argumentos propostos pelos alunos como sendo: do tipo gráfico, do tipo algébrico e de um tipo que combinava os dois anteriores que chamamos de solução harmônica.

O objetivo foi levar o licenciando a fazer uso do processo de antecipação a partir de dados sobre o comportamento de uma função trigonométrica para que ele pudesse generalizar a partir de uma abstração de regularidades na relação atividade-efeito.

Assim, os resultados mostraram que os alunos responderam majoritariamente usando o processo de construção cognitiva que se refere ao estágio participativo caracterizado por ações cognitivas como classificação dos registros mentais da atividade-efeito ou elementos que combinam estruturas mentais para atingir um determinado objetivo e a coordenação de informações por meio de uma comparação, ou argumentos para gerar uma nova estrutura.

Neste novo estado cognitivo, os alunos foram capazes de reconhecer a estrutura matemática na definição de funções trigonométricas (objeto, propriedade, relação, etc (figura 3)) como antecipação na situação, o que mostra certa semelhança com alguma situação de experiência anterior (estudos oriundos da Educação Básica e módulos iniciais), permitindo seu uso do estágio antecipatório. Por exemplo, na anotação do aluno sobre as propriedades das funções, antes de serem plotadas no *GeoGebra*, foram destacadas o conjunto imagem, informação não fornecida no enunciado, o qual está a seguir:

Enunciado: Considerando as observações realizadas no item 1 e a função $f(x) = \text{sen } x$, apresente a lei da função M sabendo que seu gráfico da função é uma curva que está deslocada verticalmente 3 unidades para cima em relação ao gráfico da função f e possui domínio \mathfrak{R} , amplitude 1 e período 2π .

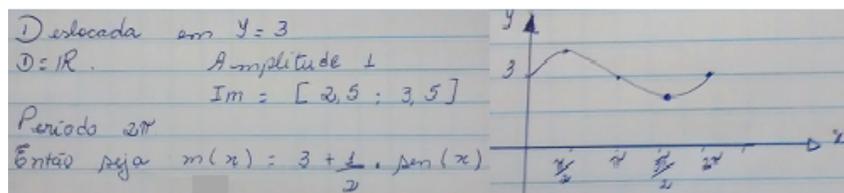


Figura 3: Resposta do aluno do enunciado da tarefa
Fonte: FIGUEIREDO, 2015.

Nos protocolos das telas de dois alunos, caracterizaram e evidenciaram a construção do significado do argumento de funções trigonométricas na THA; desconsideramos as respostas como parâmetro da função seno x , pois todos construíram no *GeoGebra* esta função; esta tentativa foi desconsiderada para análise. Na figura 4 observando a janela algébrica, percebemos as tentativas de acerto da tarefa de cada aluno.

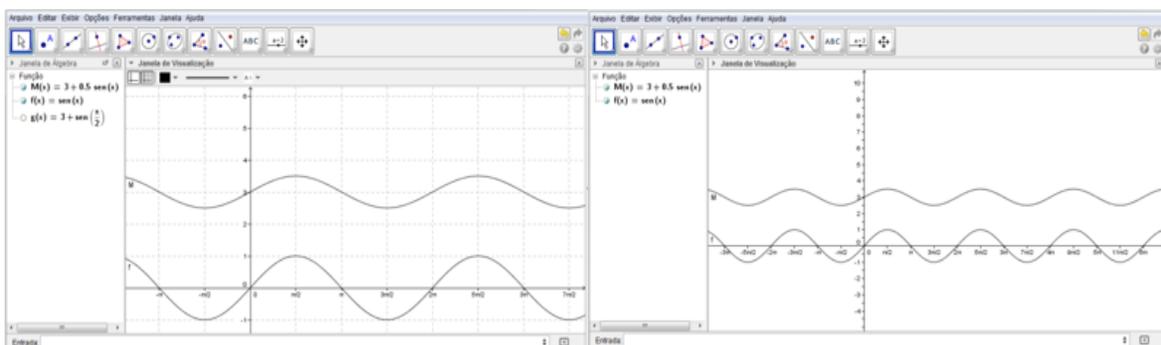


Figura 4: Duas respostas de alunos para obter a Função M
Fonte: FIGUEIREDO, 2015.

No terceiro momento os alunos confeccionaram um modelo de roda Gigante e investigaram o comportamento da função trigonométrica representada na simulação com o *applet*; neste sentido houve formulação de conjecturas, validação de respostas e desenvolvimento do significado de argumento de funções trigonométricas, nesta tarefa consideramos que o aluno esteve na “fase participativa” em função de as ideias pertinentes estarem para a resolução só disponível para o contexto da tarefa. No último dos quatro momentos, ao relacionar o período e o seu argumento o aluno, em um “processo de antecipação”, pôde abstrair regularidades na relação atividade-efeito ao plotar o gráfico no *GeoGebra*.

■ Considerações Finais

Os resultados indicaram que as interações dinâmicas com o sistema tecnológico na HLT puderam favorecer a generalização necessária para o desenvolvimento de processos de abstração reflexiva que incidem na elaboração dos conceitos relacionados às características de funções trigonométricas, tais como, por exemplo, a periodicidade. Concluímos que muitos alunos têm dificuldades em compreender o conceito de periodicidade que pode estar vinculado à necessidade de quantificação a partir de uma concepção

dinâmica. Neste sentido, as tarefas matemáticas propostas, utilizando a dinamicidade do software e o modelo de material reciclável, parecem ter apoiado os alunos a iniciar a coordenação dos argumentos trigonométricos. O processo de construção descrito na investigação proporcionou uma fina descrição da maneira pela qual os alunos evoluíram da “fase de participação” da HLT para a “fase de antecipação” determinada pela coordenação de registros relacionados à modificação dos parâmetros relativos ao argumento trigonométrico de modo a expressá-la analiticamente e geometricamente e, na sequência, estender as conclusões para casos gerais.

A interação e dinamismo nas ações com relação a buscar e estender, auxiliaram os licenciandos no entendimento das informações e registros nas relações entre a atividade-efeito na THA com o *software* GeoGebra como, por exemplo, na tarefa 4, cinco dos dezesseis licenciandos compreenderam o comportamento da Função M e ambos realizaram os esboços do gráfico no *software*, definiram o seu comportamento de forma algébrica sem dificuldade em consequência das funções propostas anteriormente nas tarefas dois e três. Enfatizamos que intervenções do professor são também responsáveis pelo resultado, no caso, levando o licenciando a fazer uso do processo de antecipação a partir de dados sobre o comportamento de uma função trigonométrica. Contudo, esta reflexão fica para uma posterior análise deste experimento dos fatores na sequência de ensino que parecem influenciar no processo de construção do conceito de funções trigonométricas na THA.

■ Referências bibliográficas

- Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003.). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, v.32(n.1), pp. 9-13.
- Duval, R. (1988). *Geometry from a cognitive point of view*. En C. Mammana and Villani (eds.) *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.
- Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. And Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.
- Piaget, J. (1977). *Studies in Reflecting Abstraction*. Sussex: Psychology Press.
- Lobo da Costa, Nielce M. *A história da trigonometria*. SBEM. Ano 10 –nº13, março de 2003, pág.60 a 68.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 26, No. 2, 114-145.
- Simon, M. A., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Simon, M. A., Tzur, R, Heinz, K and Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.