VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE TAREAS PARA FAVORECER CONVERSIONES DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS A SIMBÓLICAS

María Andrea Aznar, María Laura Distéfano, Emilce Moler
Universidad Nacional de Mar del Plata. (Argentina)
maznar@fi.mdp.edu.ar, mldistefano@fi.mdp.edu.ar, egmoler@yahoo.com.ar

Resumen

En esta comunicación se presenta un análisis Ontosemiótico de actividades propuestas para favorecer la conversión de representaciones semióticas de curvas y regiones del plano complejo desde el registro gráfico hacia el registro algebraico. El contexto institucional corresponde a una asignatura de álgebra inicial de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. Las herramientas teóricas utilizadas provienen de la Teoría de Registros Semióticos y del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Se analiza la configuración de objetos matemáticos en la resolución de las actividades propuestas que permite describir los conocimientos implicados en estas transformaciones.

Palabras clave: números complejos, representaciones semióticas, conversiones, análisis ontosemiótico

Abstract

This paper presents an onto-semiotic analysis of proposed activities to improve the conversion of semiotic representations of curves and regions of the complex plane from the graphic register to the algebraic register. The institutional context corresponds to an initial algebra subject of engineering degree courses at the National University of Mar del Plata, Argentina. The theoretical tools used come from the Semiotic Registers Theory and the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. Configurations of mathematical objects in the resolution of the proposed activities are analyzed, which allows describing the knowledge involved in these transformations.

Key Words: complex numbers, semiotic representations, conversions, ontosemiotic analysis

Introducción

El rol de los distintos sistemas de representación de objetos matemáticos es central en el quehacer matemático. Esta es una de las razones por las que la semiótica ha adquirido notable interés en el campo de la educación matemática (Radford, 2006).

Considerando las múltiples formas de representar un mismo objeto matemático, Duval (2004, 2006) señala que toda representación semiótica es parcialmente cognitiva respecto de lo que representa y destaca que, para que los estudiantes logren la conceptualización, es necesario que distingan al objeto matemático de su representación. Por ello afirma que la comprensión de un objeto matemático requiere del estudiante la capacidad de coordinar representaciones del mismo en distintos registros de representación.

Por otra parte, coordinar diversas representaciones de un objeto matemático es relevante para la tarea de resolución de problemas pues permite al resolutor poder seleccionar la representación que más lo acerque a la resolución. Este tipo de tareas requiere de la habilidad de visualizar, es decir, interpretar, usar y reflexionar sobre figuras, imágenes o diagramas, para comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión (Arcavi, 2003).

En el contexto de la asignatura inicial de álgebra de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, dos de los registros de representación semiótica usados corresponden al registro del lenguaje algebraico y al registro gráfico. Las coordinaciones mencionadas por Duval (2004), involucran la habilidad de transformar representaciones de un objeto, efectuadas en el registro algebraico, a sus correspondientes gráficas, y transformaciones en el sentido inverso, es decir que, partiendo de la representación gráfica se puedan obtener ecuaciones o inecuaciones que la caracterice en el lenguaje algebraico. Entre los contenidos temáticos de la asignatura mencionada figura la unidad de Números Complejos, la cual tiene gran relevancia conceptual y multiplicidad de aplicaciones. En el desarrollo de dicha unidad se trabaja con representaciones de curvas y regiones en el plano complejo. Las mismas corresponden a subconjuntos de números complejos representados en el registro algebraico mediante condiciones sobre alguno de sus elementos característicos: parte real, parte imaginaria, módulo y/o argumento. Dado que las transformaciones de las representaciones de esas curvas y regiones –desde el registro gráfico hacia el algebraico– no resultan espontáneas y presentan dificultades para los estudiantes, se diseñaron actividades con el propósito de favorecer en los estudiantes la habilidad de efectuarlas.

En este trabajo se presenta un análisis de las prácticas matemáticas involucradas en algunas de las actividades diseñadas, utilizando herramientas de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004) y del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2009). El análisis combinado, utilizado ambos marcos teóricos, ya ha sido planteado y estudiado por Pino-Fan, Guzmán, Duval, y Font, (2015), quienes sostienen que, mientras que desde la TRRS la actividad cognitiva de los sujetos se analiza sin realizar valoraciones desde un punto de vista matemático, con herramientas del EOS se pueden analizar los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de tratamiento y conversión. Un objetivo similar es desarrollado por Godino, Wihelmi, Blanco, Contreras, y Giacomone (2016).

Las tareas propuestas apuntan a desarrollar prácticas matemáticas necesarias para lograr la conversión de representaciones semióticas desde el registro gráfico al registro algebraico. En particular en esta comunicación se analizan dos actividades:

- La primera está focalizada en construir parcialmente expresiones, en el registro algebraico, que expresen relaciones o características de elementos de números complejos representados en el registro gráfico.
- La segunda pretende favorecer la identificación de la unidad significante que caracteriza a conjuntos de infinitos números complejos representados en el registro gráfico (unidad significante) para su posterior expresión, representada como una ecuación o inecuación en el registro algebraico.

- El análisis de estas tareas, cuyos objetivos están planteados desde la perspectiva de la TRRS, se realiza a través de la configuración epistémica propuesta por el EOS, que caracteriza y vincula los objetos primarios involucrados.

La configuración hace visible la multiplicidad de objetos matemáticos requeridos para esa tarea, revelando y explicando la complejidad de las prácticas matemáticas requeridas para poder efectuar este tipo de conversiones.

Marco Teórico

Duval (2004,2006) desarrolla su Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) poniendo en foco el hecho de que los objetos de conocimiento matemático sólo son accesibles a través de sus variados “contextos de representación”. Al respecto señala que es necesario que un estudiante reconozca al mismo objeto matemático en distintos contextos de representación. Argumenta que no hay *Noesis* (conjunto de actos cognitivos tales como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia) sin *Semiosis* (aprehensión o producción de una representación semiótica). Duval (2004) distingue tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis reagrupadas e integradas en lo que se llaman tareas de comprensión y producción: la *formación* de representaciones en un registro semiótico particular (para expresar una representación mental o evocar un objeto real), el *tratamiento* (la transformación de una representación semiótica en otra dentro del mismo registro) y la *conversión* (la transformación de una representación semiótica en otra en un registro diferente). Existen reglas de funcionamiento que son propias a cada una de estas actividades y que dependen de los sistemas semióticos involucrados; sin embargo se señala a las conversiones como de mayor dificultad porque no pueden reducirse a codificaciones pues, en general, no tienen reglas de transformación como existen para los tratamientos. Ciertas conversiones en particular, como es el caso de las que parten del registro gráfico y arriban en el registro algebraico, presentan mayores obstáculos porque se produce un fenómeno de *no congruencia* entre representaciones: la conversión no resulta transparente pues no pueden ponerse en correspondencia unívoca los elementos que las constituyen, a los que denomina *unidades significantes*. Es en la identificación de unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada, donde reside la dificultad. Duval (2006) propone, como una de las posibles alternativas para fomentar el reconocimiento de las unidades significantes, tareas que denomina de *variaciones comparativas*, donde la variable independiente sea la variación del contenido visual del registro inicial con estas características: 1) de un gráfico a otro sólo se cambia una variable visual a la vez y no dos o tres; 2) la conversión no se realiza sobre una presentación aislada de los casos particulares y 3) la conversión se transforma en un método para analizar lo que es matemáticamente significativo en el contenido de la representación dada.

El *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* o EOS es una propuesta teórico-metodológica dentro de la Didáctica de la Matemática desarrollada por Juan Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font (2009). Se concibe a la Matemática en su triple aspecto como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. Se plantea como *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino et al., 2009, p.4). Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la denominada *configuración* de objetos primarios (Godino et al, 2009): *elementos lingüísticos*, *situaciones-problemas, conceptos-definición*, p*roposiciones*, p*rocedimientos y argumentos*.

Siguiendo lo anterior se contempla como *significado* de un objeto matemático al sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas (Godino et al., 2009). En el contexto de una clase, para un determinado objeto matemático se considera el *significado personal* que cada alumno le asigna a dicho objeto para diferenciarlo del significado fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo, como expresiones del *significado institucional* del mencionado objeto. En ese sentido, en una trayectoria de enseñanza-aprendizaje se produce un acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales y el aprendizaje se traduce en la apropiación, por parte del estudiante, de los significados institucionales (Godino et al., 2009).

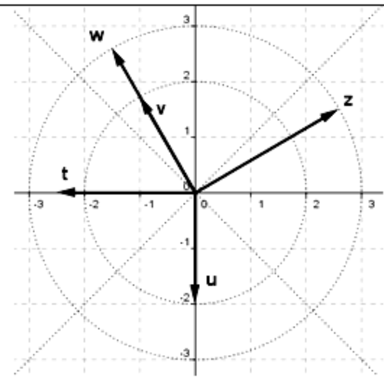
Análisis de actividades propuestas para favorecer este tipo de conversiones

Las conversiones de representaciones de curvas o regiones del plano complejo, desde el registro gráfico al algebraico, fueron analizadas en términos de la TRS (Aznar, Distéfano, Figueroa y Moler, 2010). En dicho análisis se distinguió que, para efectuar este tipo de conversiones, se requiere de dos acciones: el *reconocimiento de la unidad significante*, esto es identificar cual es el rasgo visual que caracteriza al conjunto y qué valor o valores toma, y *la representación en el registro algebraico* de la relación entre unidad significante y valores, de acuerdo con las reglas de formación de representaciones en dicho registro. Al diseñar una secuencia de actividades para favorecer en los estudiantes el desarrollo de la habilidad de realizar este tipo de conversiones se tuvo en cuenta esta distinción.

A continuación se presentará y analizará la Actividad II de dicha secuencia que puede observarse en la Figura 1. La misma aborda la tarea de *representación en el registro algebraico* de la relación entre unidad significante y valores. Requiere del estudiante construir *parcialmente* expresiones, en el registro algebraico, que expresen relaciones o características de elementos de números complejos representados en el registro gráfico. Las conversiones demandadas para las componentes que figuran en cada ítem son congruentes y parten del registro algebraico hacia el gráfico. Es la relación entre dichas componentes la que el estudiante debe leer visualmente en el registro gráfico y luego representar en el registro algebraico.

La aparente simplicidad de la tarea descripta es objetada a partir de un análisis realizado desde el EOS en el que pueden distinguirse multiplicidad de objetos matemáticos interrelacionados en una configuración.

Actividad II) De acuerdo al gráfico, completa con >, < o = según corresponda:



	Respuesta
	a) Arg(z).........Arg(w)
	b) Re(v) ....Re(w)
	c) Arg(z)............ $\frac{1}{4}\pi$
	d) Im(z) ....Im(w)
	e) Arg(w)............ $\frac{1}{2}\pi$
	f) | z |............ | w |
	g) Arg(z)..........Arg(-3)
	h) | t | 2
	i) Arg(v) ....Arg(w)

Figura 1: Enunciado de la Actividad II con sus incisos

Si se considera, por ejemplo, el inciso b), se pueden señalar los objetos primarios detallados a continuación:

Situación problema: la planteada en el enunciado.

Lenguaje: coloquial, simbólico algebraico (Re(v), Re(w), > , <, =), gráfico.

Definiciones:

- Representación de un número complejo z, como su afijo o como el vector con origen en (0; 0) y extremo en su afijo.
- Parte real del número complejo z: proyección sobre el eje real del afijo de z.

Proposición: Si la proyección del afijo de un número complejo z sobre el eje real está ubicada sobre un valor ***a*** del eje, entonces la parte real de z es igual a ***a***; si dicha proyección está a la derecha (izquierda) de un valor dado ***a*** del eje real entonces la parte real de z es mayor (menor) que ***a***.

Procedimientos:

- Identificar, en la representación gráfica, los dos elementos planteados en el ítem: dos componentes de números complejos representadas en lenguaje algebraico (Re(z), Re(w)).
- Identificar, en la representación gráfica, la relación entre los dos elementos aplicando proposiciones.
- Representar semióticamente la relación completando la representación en el lenguaje algebraico de la ecuación o inecuación con el símbolo correspondiente.

Argumentaciones: Si bien en la actividad propuesta no se solicita al estudiante argumentaciones explícitas, las validaciones están determinadas por las definiciones y proposiciones enunciadas.

Seguidamente se presenta y analiza la Actividad III de la secuencia. El enunciado y uno de sus ítems se exponen en la Figura 2. La actividad fue propuesta para favorecer *el reconocimiento de las unidades significantes*. Para resolverla el estudiante debe lograr la inducción de una condición que caracteriza a conjuntos de infinitos números complejos representados en el registro gráfico en la columna de la derecha a partir de la identificación de elementos particulares en la columna de la izquierda. Posteriormente debe expresar, en el registro algebraico, dicha condición como una relación. Desde el punto de vista de la TRRS, el gráfico de la izquierda representa un caso simple de tareas de variaciones comparativas. En el caso del inciso que se observa en la figura el único contenido visual que cambia es el de la proyección sobre el eje imaginario.

Actividad III) En la columna 1 se representan algunos complejos que comparten alguna característica (puede ser sobre su parte real, su parte imaginaria, su módulo y/o su argumento principal). En la columna 2, se representan infinitos complejos z que poseen esa misma característica. Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con la característica común.

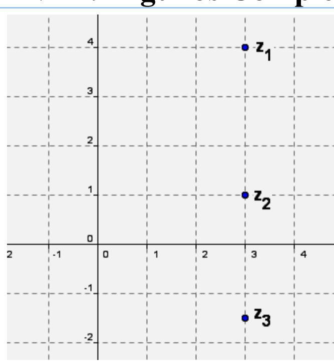
COLUMNA I: Algunos Complejos	**COLUMNA II: Infinitos Complejos**
	
a) --------------------------------------	

Figura 2: Enunciado de la Actividad III de la secuencia con uno de sus incisos

Analizada con herramientas del EOS se distinguen, en la práctica de resolución del inciso a), los siguientes elementos:

Situación problema: la planteada en el enunciado.

Lenguaje: coloquial, gráfico.

Definiciones:

- Parte real (imaginaria) del número complejo z: proyección sobre el eje real (imaginario) del afijo de z.

Proposiciones:

- Un número complejo *pertenece* al conjunto representado en una curva/región graficada si su afijo está ubicado sobre la misma.
- Si la proyección del afijo de un número complejo z sobre el eje real está ubicada sobre un valor ***a*** del eje, entonces la parte real de z es igual a ***a***; si dicha proyección está a la derecha (izquierda) de un valor dado ***a*** del eje real entonces la parte real de z es mayor (menor) que ***a***.

Procedimientos:

- Identificación de los afijos graficados a la izquierda como elementos del conjunto de la derecha.
- Identificación de componentes invariantes en los elementos del conjunto.
- Identificación de la relación que cumplen dichas componentes.
- Representación de la relación que caracteriza al conjunto mediante una ecuación, inecuación o un sistema de ellas en el que figure la representación simbólica identificada.

Argumentaciones: Si bien en la actividad propuesta no se solicita al estudiante argumentaciones explícitas, las validaciones para efectuar los procedimientos están determinadas por las definiciones y proposiciones enunciadas.

Reflexiones finales

La necesidad de favorecer en los estudiantes la habilidad de representar, en el registro algebraico, curvas o regiones del plano complejo representadas en el registro gráfico, impulsó el diseño de actividades con dichas conversiones como objetivo pedagógico.

Desde la TRRS se planteó que, para el logro de estas conversiones se requiere de dos acciones: el reconocimiento de la unidad/es significante/s que caracteriza a la curva o región y su escritura en el registro algebraico.

En este trabajo se expusieron dos tareas que apuntan a trabajar dichas actuaciones. Sin embargo, las configuraciones presentadas por el EOS hacen visibles la multiplicidad de objetos matemáticos requeridos para tareas de apariencia sencilla, revelando y explicando su complejidad.

Se observa la necesidad del uso de ciertas definiciones de naturaleza geométrica que no siempre son explicitadas.

Estas definiciones "geométricas" verifican lo enunciado por Duval en relación con que cada representación es *parcialmente cognitiva* respecto del objeto que representa y avala la importancia de presentar al alumno tareas de coordinación de representaciones para propiciar la *comprensión.*

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91-110.

Pino-Fan, R., Guzmán, I., Duval, R. y Font, V. (2015). The Theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Hobart, Australia: PME Group.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(Especial), 7-21.