VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL DEL ESTUDIANTE AL RESOLVER UN PROBLEMA DE CONJETURA

Carolina Barahona Sarmiento
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
carolinab.mat@gmail.com

Resumen

Se describe el trabajo matemático que realizan los estudiantes cuando conjeturan, al resolver el "problema de los apretones de manos", encontrando el número de saludos que se dan las personas asistentes a una reunión.
Se realiza una investigación cualitativa utilizando como marco teórico el Espacio de Trabajo Matemático, ETM, para analizar la experiencia implementada en dos grupos de estudiantes. Tras observar lo realizado por ellos para dar solución al problema, caracterizamos el trabajo matemático de los estudiantes, en relación a la activación de las génesis que articulan en su ETM personal.

Palabras clave: espacio de trabajo matemático, conjetura

Abstract

We describe the mathematical work that students do when conjecturing, when they solve "the handshakes problem", finding the total number of greetings that people attending a meeting do. We carried out a qualitative research using the Mathematical Spatial Work (MSW), as a theoretical framework to analyze the experience implemented in two groups of students. After observing what they did to solve the problem, we characterize the students' mathematical work, regarding the stimulation of the geneses that articulate in their personal MSW.

Key words: mathematical work wpace, conjecture

El problema de conjeturar

En Chile, los actuales programas de estudio para la enseñanza de matemáticas del nivel escolar Básico y Medio están organizados con base en cuatro habilidades, que son: resolver problemas, representar, modelar y comunicar, y argumentar, habilidades que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, y en la aplicación de conocimientos en diversos contextos. Se espera que nuestros estudiantes sean capaces de resolver problemas, y muchas de estas situaciones requieren que ellos puedan conjeturar.

Los documentos ministeriales vigentes para el currículo chileno proponen de manera reiterada que los estudiantes deben conjeturar, en los distintos niveles de la educación escolar y en relación a variados saberes matemáticos, por ejemplo, se espera que sean capaces de fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos, para luego hacerlo usando lenguaje algebraico, comprobando o descartando la validez de los enunciados (MINEDUC, 2013).

Debemos desarrollar en nuestros estudiantes la capacidad de conjeturar, pero ¿cómo enseñar a nuestros estudiantes a conjeturar? Los documentos ministeriales, programas y textos de estudio, carecen de indicaciones explícitas sobre las tareas matemáticas que deben realizar los estudiantes y las actividades que deben proponer los docentes para lograr desarrollar esta habilidad.

Resolver problemas conjeturando

Una de las actividades que ha sido interés de investigaciones en el ámbito educativo, y en particular en la enseñanza de la matemática, es la resolución de problemas, como reporta Castro (2008). Una situación de enseñanza-aprendizaje será considerada un problema cuando su resolución represente un desafío para el estudiante, al no reconocer de manera inmediata la forma de abordarlo.

En trabajos sobre la resolución de problemas en educación matemática Pólya (1945) propone pasos para describir el trabajo del estudiante al resolver una situación propuesta. Define problema como una situación donde el individuo debe buscar de manera consciente una forma, una acción adecuada, para lograr un objetivo, el cual es reconocido pero no alcanzable de manera inmediata.

Complementa estas ideas Schoenfeld (1985) y afirma que hay factores que no han sido considerados sobre la resolución de problemas, como aquellos de carácter emocional-afectivo, sociocultural, psicológicos, entre otros. Plantea que el término *problema* es relativo, pues lo que para una persona es un problema puede no serlo para otra persona. Así la tarea matemática tendrá la característica de ser un problema en relación al individuo que la esté resolviendo.

Cuando los investigadores describen el trabajo que realizan los estudiantes que resuelven problemas nos encontramos con la idea de conjeturar, siendo importante comprender qué es una conjetura y cuál es el trabajo que realiza el estudiante al conjeturar. Conjetura se puede definir como "una proposición que se prevé verdadera pero que está pendiente de ser sometida a examen. Este examen puede tener como resultados su aceptación o rechazo" (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2008, p. 8). Conjeturar no se limita a la obtención de una expresión algebraica, es un proceso que involucra un razonamiento inductivo.

El presente estudio tiene el objetivo de describir el trabajo matemático que realizan los estudiantes cuando conjeturan al resolver el "problema de los apretones de manos" (Figura 2). Para esto nos apoyamos del constructo teórico Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014), y en Duval (2004) en lo referido a visualización y razonamiento matemático.

El Espacio de Trabajo Matemático

En este constructo se consideran elementos y procesos cognitivos con el propósito de comprender lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en contexto escolar, y en la medida que crece el desarrollo teórico se amplía la mirada a otros dominios de la matemática (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014).

El espacio de trabajo así concebido designa un ambiente pensado y organizado para facilitar el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos en contexto educativo. Para definir el ETM se introducen dos planos, *epistemológico* y *cognitivo*, que caracterizan el trabajo de quien se involucra en la resolución de un problema.

Cada plano está compuesto por tres componentes en interacción, estos planos horizontales estructuran el ETM mediante la activación de génesis que configuran planos verticales.

Cuando el individuo resuelve un problema matemático, pone en juego elementos de naturaleza matemática y otros de naturaleza cognitiva, articulando una relación entre los dos planos horizontales que configuran este modelo (ver Figura 1). Esto se entiende como la activación de génesis, que pueden ser de carácter semiótico, instrumental o discursivo, dependiendo de las características u objetivo que tenga la tarea en cuestión.

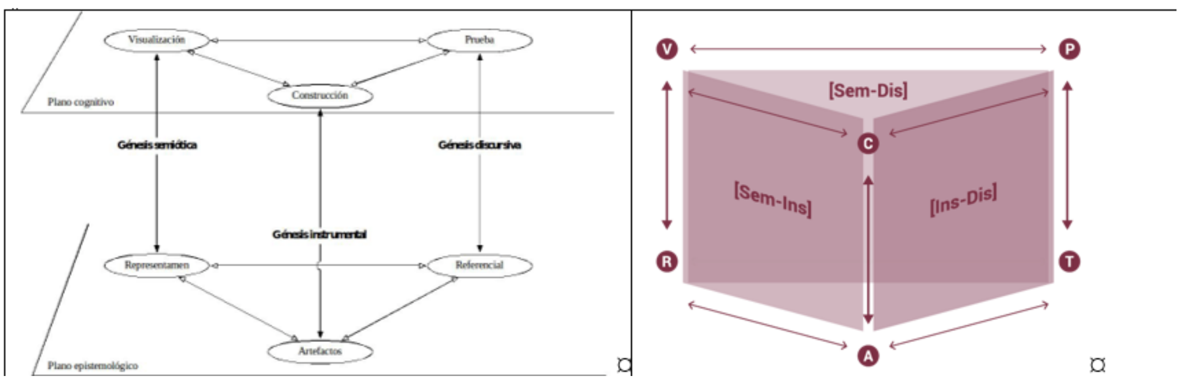

Figura 1: Génesis y planos verticales del ETM (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014)

Decimos que la génesis semiótica se activa cuando, mediante un proceso de visualización, el individuo puede representar los elementos matemáticos que están en juego en la situación. La activación de la génesis instrumental da cuenta de la manipulación de dichos elementos mediante artefactos que convierte en herramientas matemáticas. En la activación de la génesis discursiva se recurre a propiedades matemáticas para ponerlas al servicio del razonamiento y las validaciones.

La articulación entre los planos epistemológico y cognitivo no debe ser entendido como la unión individual entre las componentes de cada plano, sino más bien, como una relación activa, conjuntamente por dos o incluso tres génesis, que generan los llamados planos verticales (Kuzniak y Richard, 2014). En el plano [Sem-Ins] se privilegia la identificación y la exploración de los objetos, en el plano [Ins-Dis] se identifican razonamientos que provienen de la exploración del objeto, y en el plano [Sem-Dis] se identifican los razonamientos argumentativos.

La caracterización del ETM es llamado paradigma, el cual se constituye cuando “una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento" (Kuzniak y Richard, 2014, p.5). En este sentido nos referiremos al paradigma del grupo de individuos que resuelven en conjunto este problema.

Se distinguen tres tipos de ETM (Kuzniak, 2011), a saber: ETM de referencia, definido según la relación con el saber matemático; ETM idóneo, que depende de una institución y se define según la manera que este saber se enseña; y ETM personal, que depende del individuo y se define por la manera en que él se enfrenta a un problema matemático.

El problema de los apretones de manos

Encuentro de Ex -Alumnos a) En la primera reunión de ex alumnos de "*La generación 2007"* asistieron 20 personas al encuentro. Cada asistente, con mucha alegría, saluda a todos los demás con un apretón de manos. ¿Cuántos apretones se dieron en total en la reunión? b) Si a la segunda reunión de ex alumnos de la generación llegaron 139 personas, y todas se saludan con un apretón de manos ¿Cuántos apretones se habrán dado esa vez?

Figura 2: Modificación de "problema del apretón de manos" (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2008). Fase de Intervención (Barahona, Corrial y Vicencio, 2015).

Método

Se realiza una investigación cualitativa definida en dos fases: la primera es un estudio exploratorio donde se identifican descriptores para las situaciones clave del trabajo de los estudiantes, y en la segunda fase se profundiza sobre ellos.

Se plantea el problema a dos grupos de estudiantes pertenecientes a distintos niveles educativos esperado encontrar similitudes en sus trabajos a pesar de la diferencia en niveles y conocimientos. Los estudiantes fueron elegidos por poseer buen rendimiento en matemática, con la finalidad de que pudieran enfrentar la resolución del problema.

Se determinan distintas unidades de análisis con base en los registros de representación que han utilizado para expresar la información, es decir, registro tabular, aritmético, natural y algebraico, definiendo así algunos descriptores para caracterizar situaciones clave en el trabajo de los estudiantes.

Estos descriptores caracterizan su trabajo en relación a las génesis activadas del ETM personal de quien resuelve este problema, siendo cada uno de estos descriptores una categoría de análisis emergente, las que se profundizan en la segunda fase, incluyendo el análisis del registro auditivo y video del trabajo grupal.

En la primera fase el grupo de estudio corresponde a 4 estudiantes de 2º año de enseñanza media (15 años), llamados E1, E2, E3 y E4, y en la segunda fase a 4 estudiantes de 7º año (12 años) de enseñanza básica, llamados E5, E6, E7 y E8. Cabe señalar, que las producciones de E2 y E3 no se han incorporado en este trabajo pues son similares a otras producciones.

Resultados

La naturaleza del problema activó de manera inmediata la génesis semiótica, recurrieron a íconos mentales, kinestésicos, frases y dibujos como signos para representar las personas, al vínculo entre ellas, y la cantidad de vínculos realizados por cada una y el total de ellas.

Representaron y contaron los apretones de manos, los vínculos entre los individuos que se saludan. Esta situación activó su trabajo matemático desde un dominio aritmético, caracterizado por la forma en que se realizaron el conteo de los saludos.

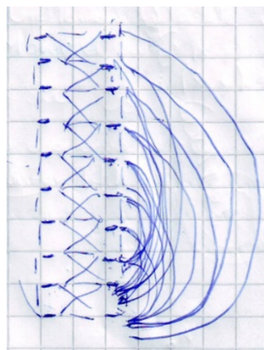

***Figura 3*: Registro tabular-pictórico E6, segunda fase**

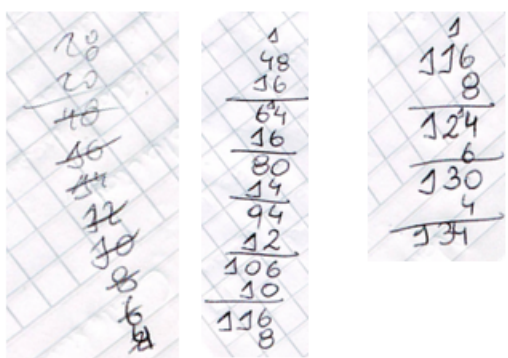

***Figura 4*: Registro aritmético E5, segunda fase**

E8: *Es que si lo hacemos con dibujo tendríamos que unir todos con todos.*

***Figura 5*: Extracto registro auditivo E8. Evidencia activación de génesis semiótica.**

Los estudiantes reconocen las limitaciones al querer representar el problema mediante un dibujo. Se explícita la idea de que todos los signos que representan a las personas deben vincularse mediante un signo para el saludo.

Organizan la información mediante un registro tabular, apoyando la estrategia de cálculo que establecen para el total de apretones. Sistematizaron u ordenaron los elementos para realizar dicho cálculo total, lo que requirió que generaran una representación que les permitiera realizar este trabajo, siendo así determinante para establecer una estrategia de cálculo mediante la suma y el producto.

Figura 6: Registro tabular-aritmético E1 primera fase

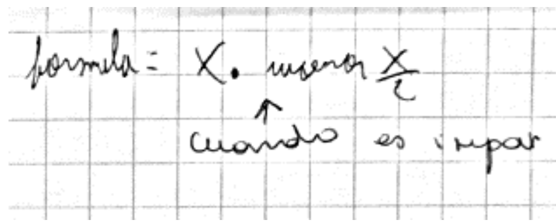

Figura 7: Registro algebraico E4 primera fase

Se activa la génesis instrumental, mediante la adición, el producto y el cociente. En la segunda fase se evidencia cómo esto se relaciona la forma de representar la situación mediante un dibujo, es decir, con las características de los registros que muestran en la activación de la génesis semiótica.

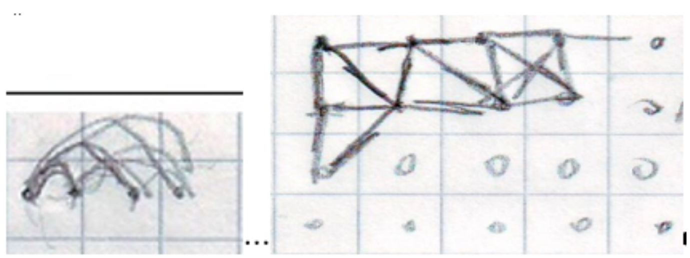

Figura 8: Registro tabular-pictórico E7 segunda fase

Se evidencia que para determinar la cantidad de apretones que realiza cada persona, los estudiantes deben comprender las condiciones del saludo, una persona no se saluda a sí misma y dos personas no se saludan dos veces, idea que comunican a otros en su trabajo.

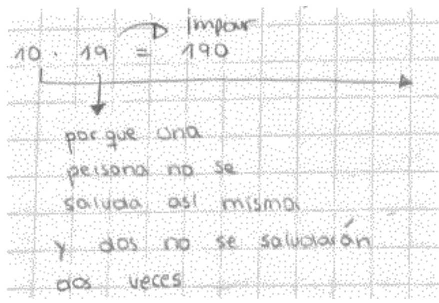

***Figura 9*:** Registro aritmético y condiciones del conteo E1 primera fase

En sus interacciones notamos que los estudiantes recurren a estas condiciones del saludo para argumentar sobre las cantidades que operan, por lo que realizamos una distinción entre la idea de expresar y argumentar dichas condiciones. Se evidencia la activación de la génesis discursiva.

Considerando lo observado del trabajo de los estudiantes y reconociendo lo que se moviliza en relación a la activación de las génesis semiótica, instrumental o discursiva, se identifican los siguientes descriptores rotulados S, I, o D haciendo referencia a la génesis que se identifica.

Tabla 1 : *Descriptores del ETM*

Descriptor	*Génesis Activada*
S_1: Utiliza un signo para expresar el saludo, el vínculo que debe contar. S_2: Utiliza un signo para expresar a los individuos. S_3: Utiliza un signo para expresar la cantidad de apretones que realiza cada individuo S_4: Utiliza un registro algebraico para expresar el cálculo total de apretones de manos.	*Génesis Semiótica*
I_5: Realiza el cálculo del total de apretones, por medio de la adición. I_6: Realiza el cálculo del total de apretones, por medio del producto.	*Génesis Instrumental*
D_7: Expresa las condiciones del saludo. D_8: Argumenta sobre los valores que involucra en el cálculo.	*Génesis Discursiva*

Conclusiones

Este problema tiene la potencialidad de activar las tres génesis que articulan el ETM personal del grupo de individuos que se involucran en esta tarea matemática.

Con respecto a la activación de la génesis semiótica, destacamos que en ambas etapas se reconoce el descriptor S4, recurriendo al lenguaje algebraico para expresar la conjetura. En la primera etapa se expresa de manera escrita, y en la segunda manera oral, y en ambos casos asociada a la palabra "fórmula". Se reconoce la activación de la génesis discursiva al expresar las condiciones del saludo y argumentar sobre los valores involucrados en el cálculo. Se evidenciaron interacciones que propician la comunicación de resultados y el razonamiento matemático, lo que es una característica importante a destacar sobre el trabajo de los estudiantes y una de las riquezas de este problema. Respecto de la activación de la génesis instrumental, destacamos la importancia que posee el trabajo en torno a la división por dos. Este cálculo se abordó en la primera fase mediante la unión simétrica de los términos de la progresión, y en la segunda sólo se aborda desde la segunda condición del conteo, referida a la repetitividad del saludo.

Las conjeturas realizadas por los estudiantes se basan en la representación o traducción perceptual del problema (Cañadas, et al, 2008); se imaginan, sienten y realizan el saludo, poniendo en juego conocimientos provenientes de experiencias sensoriales y corporales. Podemos pensar que sus acciones son parte fundamental de sus procesos cognitivos. Alternativamente, para profundizar en el estudio, podemos considerar lo anterior desde la perspectiva de cognición corporizada, en la cual el cuerpo es más que sólo receptor de información, e interviene en el acto cognitivo: el conocimiento es enactivo (Lakoff & Nuñez, 2000), gestos y otros actos corporales no son sólo instrumentos de comunicación sino inherentes a la cognición.

El trabajo matemático observado posee la característica de ser aritmético-algebraico, por lo que estamos profundizando apoyados en el paradigma algebraico, ETM algebraico (Gamboa y Mena, 2015), que es una extensión del ETM a un dominio algebraico.

Reconocimiento: Financiado parcialmente proyecto FONDECYT 1171744.

Referencias bibliográficas

Barahona, C., Corrial, C. y Vicencio, D. (2015). *Situación didáctica: Generando instancias de conjetura*. Trabajo de Magíster no publicado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemáticas.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y Pasos. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 6*(3), 431-441.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. *Acta XII Simposio Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 113-140.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Gamboa, M. & Mena, A. (2015). Paradigmas Algebraicos. *Un aporte a la teoría del espacio de trabajo matemático*. Recuperado de http://villarrica.uc.cl/files/matematica/materialweb/CB%2032.pdf

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour L'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*(3), 283-312.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *17*(1), 1-16.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.

MINEDUC (2013). Ministerio de Educación Chile. *Bases Curriculares 2013. Matemática 7° básico a 2° medio*. Santiago: MINEDUC.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965, Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. *Cognitive Science and Mathematics Education*, *189*. University of California.