

# CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DO DOMÍNIO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

**Valdir Bezerra dos Santos Júnior, Renato da Silva Ignácio, Marlene Alves Dias, Míriam do Rocio Guadagnini**  
UFPE, UFCG, UNIAN, UNIAN. (Brasil)  
valdir.bezerra@gmail.com, renatoignacio@gmail.com, maralvesdias@gmail.com,  
miriamguadagnini@hotmail.com

## Resumo

Partimos de resultados de estudos anteriores sobre as dificuldades dos estudantes brasileiros em relação à álgebra, sobre as diferenças entre as propostas institucionais entre Brasil e Espanha e sobre a evolução histórica da álgebra para auxiliar na análise das respostas de um grupo de oito estudantes de um curso de licenciatura em Matemática para a questão: *O que vocês aprenderam de álgebra na Educação Básica?* Os dados indicam a fragilidade do sistema de ensino, que se distancia da evolução histórica, uma vez que os estudantes ficam confinados ao nível “tópicos”, o que dificulta a utilização da álgebra como ferramenta para a resolução de tarefas de outros domínios.

**Palavras-chave:** história da álgebra, praxeologia, níveis de codeterminação

## Abstract

We have considered the results of previous studies on Brazilian students' difficulties in relation to algebra; on the differences between the institutional proposals in Brazil and Spain, and on the historical evolution of algebra in order to analyze the answers, given by a group of eight students from a Mathematics undergraduate course, to the question: “What did you learn about algebra in Basic Education?”. The data indicate the fragility of the educational system, which distances itself from the historical evolution as students are confined to the level of “topics”, making it difficult to use algebra as a tool for solving tasks in other domains.

**Keywords:** history of Algebra, praxeology, levels of determination

## ■ Introdução

Este trabalho faz parte de uma pesquisa em maior escala sobre o processo de ensino e aprendizagem de álgebra na educação brasileira. Alguns resultados já foram alcançados em trabalhos anteriores, que gostaríamos de registrar, pois, a partir deste, surgem novos questionamentos. Iniciamos destacando o trabalho no qual Santos Júnior *et al.* (2015) consideraram estudar a transição entre três etapas de ensino no Brasil com foco no domínio da álgebra.

No trabalho, apoiados na Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 2001, 2002), na noção de quadro de Douady (1992) e de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, segundo Robert (1998),

os autores realizaram um estudo com o objetivo de compreender as possíveis dificuldades dos estudantes ao aprenderem álgebra.

Para isso, analisaram um livro didático brasileiro aprovado em todas as avaliações do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o “caderno do professor”, material disponibilizado pelo estado de São Paulo, o qual deve ser utilizado em paralelo ao livro didático. Além de analisar os documentos, foi feito um teste diagnóstico com dois grupos de estudantes: 5º ano do Ensino Fundamental (9 – 10 anos) e 1º e 2º ano do Ensino Médio (15 – 16 anos). O objetivo da escolha dos dois grupos foi identificar as técnicas utilizadas para desenvolver as tarefas propostas e assim poder compará-las (Santos Júnior *et al.*, 2015).

Os resultados das análises dos livros didáticos mostram que as atividades propostas têm como ênfase a linguagem algébrica e, principalmente, a passagem do trabalho do quadro aritmético para o quadro algébrico. Diante deste resultado, os autores comprovaram, via teste diagnóstico, que os estudantes privilegiaram as técnicas aritméticas para determinar a solução das tarefas do teste, o que não era esperado para os estudantes do 1º e 2º ano do Ensino Médio, sinalizando que estes apresentam dificuldades em trabalhar com a álgebra (Santos Júnior *et al.*, 2015).

Em outro estudo, cujo artigo também compõe a pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de álgebra, também se utilizou a TAD como suporte teórico. Parte-se do pressuposto que as dificuldades encontradas pelos estudantes brasileiros no estudo das noções ligadas ao domínio da álgebra advêm das expectativas institucionais esperadas e existentes, tanto para o seu desenvolvimento, quanto para a introdução das referidas noções (Dias *et al.*, 2016).

Para ter outro parâmetro de análise, os autores decidiram considerar a análise de livros didáticos de outro país, neste caso a Espanha, tentando compreender as regularidades e diferenças existentes, quando comparados aos livros do Brasil. A análise foi também baseada nos documentos que regem a educação nos dois países, com foco naqueles que tratam explicitamente sobre as indicações do ensino de álgebra, o que corresponde às expectativas institucionais esperadas (Dias *et al.*, 2016).

Segundo seus autores, os documentos brasileiros foram elaborados em conjunto com todos os educadores do País e os objetivos descritos para o ensino da álgebra foram definidos a partir de capacidades associadas aos respectivos conteúdos, os quais devem ser vislumbrados por meio de conexões intra e extramatemáticas. O documento espanhol segue as metas da comunidade europeia, mas cada região tem a autonomia pedagógica de definir sua estrutura curricular. Os autores então, com o objetivo de adentrar nas escolhas de uma região, analisaram os documentos da região da Catalunha e observaram que o foco do documento são as competências e estas estão associadas aos conteúdos. O que se observou de diferença entre as propostas dos dois países é que enquanto um documento estabelece competências, o outro estabelece a capacidade (Dias *et al.*, 2016).

Observamos que estas duas abordagens distintas nos documentos refletem-se de alguma maneira no modo como as noções de álgebra são explicitadas aos aprendizes. Isso pressupõe que também interfiram na formação dos futuros professores de Matemática e é aos futuros professores que dedicamos este trabalho. Antes disso, cabe destacar a análise efetuada nos livros didáticos por Dias *et al.* (2016), na qual foi possível verificar que os livros espanhóis e brasileiros abordam praticamente os mesmos conteúdos. No entanto a grande diferença é como ocorre esta abordagem, pois os livros espanhóis priorizam a revisitação dos

conteúdos antes vistos e os articulam com novos conhecimentos, tratando a álgebra por meio de problemas intra e extramatemáticos. Este é um ponto importante a considerar, pois partimos do pressuposto que o livro didático é uma das ferramentas didáticas mais utilizadas pelo professor e que muitas vezes é adotada como material de orientação para o docente.

As constatações dos dois trabalhos expostos fazem refletir sobre o processo de formação dos professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental - anos finais e Ensino Médio e nos encaminham a formular a seguinte questão de pesquisa: *Quais as relações pessoais pertinentes ao objeto álgebra dos futuros professores de Matemática, considerando os aspectos históricos de desenvolvimento do domínio algébrico e as relações institucionais encontradas em livros didáticos brasileiros?*

Diante desse questionamento, podemos afirmar que os objetivos deste trabalho são: identificar as relações pessoais de futuros professores de Matemática com o objeto álgebra e também identificar as relações institucionais do domínio da álgebra em livros didáticos propostos para o seu ensino no Brasil. Para atingir tais objetivos, apresentamos no texto a exposição da perspectiva histórica do desenvolvimento do quadro algébrico para, na sequência, apresentar referencial teórico, metodologia e resultados da pesquisa.

### ■ Referências históricas

Neste trabalho, destacamos a gênese do cálculo algébrico por meio do trabalho de Robinet (1989), que divide a história da álgebra em antes e depois de Viète, mostrando sua constituição lenta, na qual se destaca seu caráter de ferramenta para a solução de problemas. No período considerado antes de Viète, a pesquisadora esclarece que este engloba um grande número de séculos, por exemplo, desde a alta antiguidade de babilônios e egípcios, em que já é possível encontrar a resolução dos problemas algébricos.

Importante destacar que durante o período antes de Viète, a resolução de problemas algébricos estava focada no discurso, ou seja, o formalismo não era privilegiado, por exemplo, as operações não eram expressas por meios de sinais. Vestígios de introdução ao formalismo aparecem no trabalho de Diophante 300 anos d.C. Contudo Diophante utilizava o simbolismo para abreviar a escrita, mas não o operava para resolver problemas (Robinet, 1989); trata-se aqui da passagem da álgebra retórica para a álgebra sincopada.

Outro povo que merece destaque na época considerada são os indianos, uma vez que auxiliaram o progresso do formalismo na medida em que elaboraram um sistema de numeração decimal de posição. Além disso, os indianos já utilizavam os números negativos representados por números positivos sobrepostos de um ponto. Em relação aos elementos, que são atualmente considerados como pertencentes ao domínio da álgebra, temos que os indianos representavam, por exemplo, uma incógnita pela abreviação *ya* da palavra *yavat-tavat*, designavam o quadrado de uma incógnita pela abreviação *yav* da palavra *yavat-varga* etc. Mesmo com esta gênese da utilização do simbolismo, os indianos não operavam com o mesmo, mas é possível reconhecer que o simbolismo é mais elaborado, quando comparado ao de Diophante (Robinet, 1989).

Os árabes são considerados pela autora como o povo que fez progredir o cálculo algébrico mesmo que, surpreendentemente, utilizando pouco da escrita simbólica. Elaboraram a transposição do cálculo

aritmético aos cálculos com incógnitas e ainda realizaram o primeiro estudo sobre um tipo de equação, o que indica a passagem dos exemplos típicos para as demonstrações quantificadas (Robinet, 1989). Os árabes, em especial, com Al Kyyam, de acordo com Robinet (1989), são considerados os responsáveis pelo período de transição na histórica do cálculo algébrico, ou seja, após Viète. O destaque dado pela pesquisadora a Al Kyyam deve-se ao fato de esse matemático ter feito uma classificação de equações do terceiro grau e das construções geométricas das raízes, além de estudar as equações sob uma forma geral com coeficientes positivos quaisquer, mesmo sem simbolismo.

Diante deste breve relato histórico do desenvolvimento do domínio da álgebra, Robinet (1989) indica que o ensino da álgebra privilegia seu caráter de objeto matemático, o que - adicionado à lentidão de sua constituição - pode representar fatores que dificultam sua aprendizagem pelos estudantes. Assumimos que estes fatores podem acompanhar os estudantes também no Ensino Superior, em especial na formação de professores, o que ganha mais destaque devido à responsabilidade dos docentes em ensinar o domínio algébrico num futuro próximo.

### ■ Referencial teórico

Para identificar as propostas institucionais para o ensino da álgebra e a marca destas na aprendizagem dos estudantes, escolhemos como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), conforme Chevallard (2001, 2002), mais particularmente as noções de praxeologia, relações institucionais e pessoais e níveis de codeterminação.

Iniciamos descrevendo o que consideramos como relação pessoal. Para Chevallard (2001), a relação pessoal representada por  $R(x; o)$ , ou seja, a relação de um indivíduo  $x$  com um objeto  $o$ . Esta relação representa as interações que o indivíduo pode ter com  $o$ . No nosso caso, estamos atentos em verificar quais as relações que os futuros docentes de Matemática têm com o objeto álgebra.

Outra noção da TAD utilizada como suporte teórico é a de relação institucional. Para Chevallard (2001), as instituições determinam as relações pessoais que os indivíduos têm com os objetos, por isto é importante reconhecer qual a posição que os objetos ocupam no interior das instituições. No caso deste trabalho, a instituição observada é o livro didático de Matemática e qual a posição que o domínio da álgebra nele ocupa.

Consideramos ainda a noção de praxeologia. Para Chevallard (2001), toda atividade humana pode ser descrita por meio de uma praxeologia, ou seja, de tipos de tarefas  $T$ , ao menos de uma técnica  $\tau$ , justificada por uma tecnologia  $\theta$  e justificável por uma teoria  $\Theta$ . Como exemplo de praxeologia, podemos considerar a seguinte atividade matemática: “Localize os pares ordenados  $A(2; 3)$  e  $B(0;-1)$  no sistema cartesiano ortogonal”, nesta atividade, temos como tipo de tarefa: representar pares ordenados no sistema cartesiano ortogonal; como técnica: reconhecer a abscissa e ordenada para representar o ponto; como tecnologia: pares ordenados, abscissa, ordenada e sistema cartesiano ortogonal; e por fim a teoria: geometria analítica no plano.

Utilizamos ainda a noção de níveis de codeterminação que, conforme a definição de Chevallard (2002), é representada por uma escala composta por diferentes níveis que possibilitam explorar e localizar as

condições e restrições que determinam o processo de difusão praxeológico, uma vez que determinada condição ou restrição pode situar-se em determinado nível da escala, mas pode exprimir-se em outro, o que evidencia o fato de não podermos isolar o que se passa em uma classe do conjunto do sistema de ensino.

Essa escala é indicada por: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização ↔ humanidade, sendo tópicos o nível mais baixo e humanidade o nível mais alto. O autor enfatiza a importância de os professores transitarem nos diferentes níveis, mas ressalta que, em geral, ficam restritos aos tópicos e temas e, como exemplo para operar nos níveis setores e domínios, é considerada a importância de indicar para o estudante os novos conhecimentos que dependem daqueles que estão sendo trabalhados num determinado momento. Por exemplo: utilizar a noção de fatoração como ferramenta para resolver tarefas que envolvem a solução de uma equação do segundo grau.

### ■ Metodologia

A metodologia utilizada é a da pesquisa qualitativa, cujo método é o da pesquisa documental que, segundo Lüdke e André (2013), consiste na análise de documentos contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos e de elementos da pesquisa de campo. Para a pesquisa documental, analisamos o livro didático que está entre os mais utilizados nas escolas da Educação Básica brasileira para a introdução da álgebra com alunos entre 11 e 13 anos de idade, a saber: Dante (2016) para o Ensino Fundamental.

Justificamos a análise de apenas um livro por meio da afirmativa de Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2006), no sentido de que o livro-texto adotado pelo professor pouco difere dos outros existentes no contexto brasileiro.

O livro foi analisado por meio de uma grade de análise na qual se procurou identificar as praxeologias indicadas para serem desenvolvidas de modo a compreender quais conhecimentos poderiam ser considerados como mobilizáveis para os estudantes que passaram pela Educação Básica.

Para este estudo, foi desenvolvida ainda uma pesquisa de campo, a qual foi realizada por meio da proposta da questão entregue em uma folha de papel: *O que vocês aprenderam de álgebra na Educação Básica?* Os questionários foram fornecidos para um grupo de doze estudantes de um curso de licenciatura em Matemática, todavia apenas oito dos estudantes aceitaram responder à questão. O objetivo desta questão foi identificar qual a relação pessoal desses estudantes com o domínio da álgebra, uma vez que eles já haviam passado pela Educação Básica e por cursos superiores de introdução à álgebra abstrata.

### ■ Resultado das análises

Esta análise é estruturada em duas partes: a primeira dedicada ao livro didático e a segunda, às respostas dos estudantes de licenciatura em Matemática à pergunta proposta.

A análise do livro didático de Dante (2016) para o Ensino Fundamental - anos finais propicia considerar que a relação institucional para o ensino da álgebra se inicia no 6º ano (estudantes de 11 anos) com a utilização de fórmulas para o cálculo de áreas de figuras planas.

No 7º ano (estudantes de 12 anos), são introduzidas as equações do 1º grau com uma incógnita, para as quais é dada ênfase à substituição dos números por letras para, na sequência, explicitar a noção de incógnita e determinar a solução de uma equação do tipo  $ax + b = c$ , substituindo  $x$  por alguns números. Após a utilização do que podemos denominar método das tentativas, são consideradas as propriedades das equações e assim é apresentado o método para resolver equações, sendo este desenvolvido por meio de exemplos, mas como só se consideram as equações do tipo  $ax + b = c$ , é possível utilizar sempre o método das tentativas.

Na sequência, são introduzidas brevemente as equações lineares com duas incógnitas e os sistemas de equações lineares  $2 \times 2$ , sendo os exemplos apresentados apenas de sistemas com solução. Da mesma forma, são brevemente tratadas as inequações do 1º grau com uma incógnita. Como a introdução e o desenvolvimento da álgebra no 7º ano são apenas preliminares, ela está associada, particularmente, à representação de números por letras.

No 8º ano (estudantes de 13 anos), são introduzidas as expressões algébricas, particularmente associadas às noções de área, revisitando assim as fórmulas trabalhadas no 6º ano. São tratadas ainda as expressões algébricas inteiras, os polinômios, suas operações e propriedades, os produtos notáveis e a fatoração, que conduzem à solução das equações-produto. São ainda revisitados os sistemas lineares  $2 \times 2$ , para os quais são propostos os métodos de resolução: por tentativas, por substituição e por adição. O método gráfico é empregado apenas para a visualização das possibilidades de solução de sistemas lineares  $2 \times 2$ , pois pouca ênfase é dada à classificação desses sistemas.

No 9º ano (estudantes de 14 anos), são tratadas as equações do 2º grau, o que permite visitar as equações-produto desenvolvidas no 8º ano. São introduzidos ainda os sistemas com equações do 2º grau e a ideia intuitiva de função, para a qual são consideradas as funções: afim e quadrática; novamente é possível visitar conceitos e noções.

Observamos aqui que a passagem da aritmética para a álgebra está particularmente associada ao conteúdo desenvolvido no 7º ano, indicando a importância de o professor ultrapassar os níveis tópicos e temas e conhecer toda a proposta de desenvolvimento da álgebra nos quatro anos do Ensino Fundamental - anos finais.

Desse modo, ao considerarmos as relações pessoais dos estudantes de licenciatura em Matemática por meio da questão proposta, identificamos duas categorias de respostas: uma na qual os estudantes listaram os conteúdos que aprenderam sobre álgebra na Educação Básica (seis estudantes) e outra em que os estudantes justificaram suas dificuldades em aprender álgebra ou não lembravam o que aprenderam (um estudante em cada caso), o que está distante do que se espera como conhecimentos a serem mobilizados pelos mesmos.

Entre os estudantes que listaram os conteúdos, encontramos as seguintes noções: expressões algébricas, equações do primeiro e do segundo grau; inequações, polinômios, produtos notáveis, sistemas de

equações, progressões geométricas e aritméticas, funções do primeiro e do segundo grau, funções exponenciais, inequações, funções (bijetoras, injetoras e sobrejetoras). Apenas um dos cinco estudantes citou os números inteiros como pertencentes ao domínio algébrico, o que é compreensível, pois este conceito é tratado apenas no quadro da aritmética.

É importante ressaltar que apenas um estudante conseguiu visualizar a álgebra como ferramenta para a compreensão de outros domínios da Matemática estudados no Ensino Médio. Vejamos o extrato de sua resposta:

Se no nono ano teve um pouco de tudo das séries anteriores, na primeira série do Ensino Médio também tivemos que utilizar tudo o que vimos no Ensino Fundamental, desta vez, tínhamos que utilizar nossos conhecimentos matemáticos para compreendermos o conceito de conjuntos e dos tipos de funções: afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e as progressões aritmética e geométrica. Nos anos seguintes, continuamos com o estudo da estatística e da probabilidade, trigonometria no triângulo retângulo, conceito de seno, cosseno e tangente, matrizes, sistemas lineares, estudo dos poliedros e uma ideia de geometria analítica.

Mesmo tendo um número reduzido de estudantes que responderam ao questionamento, é preocupante que apenas um deles tenha conseguido articular os conhecimentos prévios com outros conhecimentos, principalmente por se tratar de futuros professores.

Para o estudante cuja resposta está associada à dificuldade enfrentada na passagem da aritmética para álgebra, observamos a dificuldade em substituir números por letras, o que parece estar associado à falta de articulação entre os saberes desenvolvidos nos quatro anos do Ensino Fundamental - anos finais. Vejamos um extrato de sua resposta:

O que eu aprendi de álgebra em minha educação básica, pra mim foi um grande impacto ver no quadro que a aritmética que eu estava me esforçando para aprender agora tinha letras; foi um pouco difícil pra adaptar, mas aos poucos consegui, mas muitos amigos da minha turma não, e isso foi passando os anos e não sabíamos nem de sua história e nem o porquê de aprender e foi ficando cada vez mais difícil, complicada e ao invés de aprender, decoramos formas de fazer; resolvia por resolver e não sabia o porquê e assim continuo até o fim do Ensino Médio.

Observamos que o estudante remeteu a uma dificuldade que também esteve presente no desenvolvimento do domínio algébrico, como observamos em Robinet (1989), que é a passagem para o simbolismo.

### ■ Considerações finais

Na análise dos livros didáticos, foi possível observar que o domínio da álgebra é tratado na escola básica brasileira da mesma maneira que a observada por Robinet (1989), ou seja, suas noções são introduzidas prioritariamente como objetos matemáticos e as aplicações propostas, em geral, não necessitam desses objetos para serem resolvidas, pois os problemas contextualizados correspondem às praxeologias privilegiadas e quase sempre podem ser solucionados utilizando conhecimentos aritméticos.

Esta hipótese fica ainda mais evidente com a análise das respostas dadas por oito estudantes do curso de licenciatura em Matemática para a questão proposta, pois nelas observamos que esses alunos, em geral, referem-se apenas a alguns tópicos, em particular, as equações e dizem ter tido muitas dificuldades na aprendizagem das noções indicadas, o que revela uma atomização no ensino proposto e falta de articulação entre os saberes desenvolvidos nos diferentes anos do Ensino Fundamental.

É preciso um trabalho mais amplo em que se possa tratar de diversos setores do domínio da álgebra e articular este domínio com outros domínios que utilizam seus conceitos e noções como ferramentas para a solução de suas tarefas mais específicas, o que conduz à necessidade de mais estudos que auxiliem a encontrar novas metodologias de ensino que possam alcançar nossos estudantes.

### ■ Referências bibliográficas

- Chevallard, Y. (2001). *Organiser l'étude.1. Structures & Fonctions*. Recuperado em 05 de janeiro de 2018 de [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser\\_1\\_etude\\_1.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_1.pdf)
- Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude 3: Ecologie et Regulation*. Recuperado em 05 de janeiro de 2018 de [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser\\_1\\_etude\\_3.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_3.pdf)
- Dante, L. R. (2016). *Projeto Teláris: Matemática: Ensino Fundamental 2*. São Paulo: Ática.
- Dias, M. A., Guadagnini, M. R., & Santos Júnior, V. B. (2016). Álgebra básica: um estudo sobre a relação institucional para seu ensino no Brasil e na Espanha. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29, 456-463.
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, 6, 132-158.
- Lima, E. L., Carvalho, P. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: IMPA.
- Lüdke, H. A., & André, M. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: Pedagógica e Universitária.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robinet, J. (1989). *La genèse du calcul algébrique (une esquisse)*. Recuperado em 03 de janeiro de 2018 de [http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les\\_cahiers\\_de\\_didactique/](http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_cahiers_de_didactique/)
- Santos Junior, V.B., Ignácio, R., & Dias, M.A. (2015). Álgebra na Educação Básica Brasileira e a transição entre as diferentes etapas escolares. En Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz (Ed.), *Educación Matemática en las Américas: Algebra y Cálculo* (pp. 13-24). Republica Dominicana.