

# LO QUE NOS DICEN LOS RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN EDUCATIVA SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN MÉXICO

Luis Cabrera-Chim, María Concepción Valdés-Parra, Olga Flores-Álvarez  
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (México)  
lcabrerac@inee.edu.mx, cvaldes@inee.edu.mx, oflores@inee.edu.mx

## Resumen

Las investigaciones relativas al Pensamiento y Lenguaje Variacional han demostrado la importancia de éste en los procesos de construcción de conocimientos matemáticos. Sin embargo, también han demostrado la dificultad de los alumnos para enfrentar exitosamente situaciones variacionales. En este trabajo se analizan los resultados de las pruebas PLANEA, que se aplican en México, para indagar el grado de desarrollo del pensamiento variacional que demuestran los estudiantes mexicanos. Los resultados de estas evaluaciones y su análisis e interpretación a la par de la investigación educativa, puede transformarse en una importante base para tomar decisiones de política educativa y de práctica escolar, para mejorar el logro educativo.

**Palabras clave:** pensamiento variacional, evaluación, planea

## Abstract

Researches on variational language and thinking have shown its significance in the construction of mathematical knowledge. However, students have shown difficulties to solve variation problems successfully. In this work, we analyze the results of PLANEA proofs, which are applied in Mexico, to investigate about the level of variation thinking development that Mexican students have. The outcomes of these proofs and their analysis and interpretation as well as the educational research can become an important basis to make decisions concerning the educational policy and the school practice in order to improve educational achievement.

**Key words:** Variational thinking, evaluation, planea

## ■ Introducción

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene, por mandato constitucional, la tarea de evaluar la calidad, el desempeño y los resultados de la educación obligatoria del sistema educativo mexicano: la educación básica, que se compone de preescolar (3-5 años), primaria (6-11 años) y secundaria (12-14 años), y la educación media superior (15-17 años) (INEE, 2016).

Para dar respuesta al mandato legal referente a evaluar los resultados educativos, el INEE formuló el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes, mediante el cual evalúa, entre otros campos formativos

el de Matemáticas, a través de pruebas de opción múltiple (PLANEA). Éstas pruebas tienen como propósito conocer la medida en la cual los estudiantes logran dominar un conjunto de aprendizajes clave al término de cada nivel educativo y generar información pertinente y relevante que permita mejorar las prácticas de enseñanza, el aprendizaje de los estudiantes y tomar decisiones de política educativa (INEE, 2015).

### ■ Problemática y objetivo

El uso de los resultados de las pruebas estandarizadas puede ayudar a emprender procesos de mejora de la eficiencia de la educación. Esto siempre que no se pierda el foco de atención, el cual debe estar en realizar actividades educativas y de calidad con los estudiantes, por sobre el entrenamiento para obtener mejores puntuaciones en dichas pruebas (Fernández, Alcaraz y Sola, 2017). De este modo, se planteó como objetivo general de esta investigación, analizar los resultados de las pruebas PLANEA para generar información que pueda ayudar a las autoridades educativas y los profesores a tomar las acciones pertinentes para la mejora de los resultados educativos. En particular, no interesa comprender la situación de los estudiantes sobre el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Esto tomando en consideración los siguientes puntos:

- El pensamiento y lenguaje variacional es un elemento clave para la construcción de conocimientos asociados a la Matemática de la Variación (Maury, Palmezano y Cárcamo, 2012), en particular los relativos al Cálculo diferencial en el nivel medio superior.
- Su desarrollo requiere de un prolongado tiempo didáctico (Cantoral & Farfán, 2000). Por ejemplo, se requiere integrar diferentes campos numéricos y geométricos o romper con formas de pensamiento prevariacionales como el algebraico, entre otras acciones.
- Los estudiantes y profesores de diferentes niveles educativos presentan dificultades para enfrentar exitosamente situaciones variacionales (Montiel, 2008; Caballero, 2012; Maury, Palmezano y Cárcamo, 2012). Esta situación se vuelve de gran relevancia dada la importancia de estas situaciones desde el punto de vista didáctico para la construcción de los conocimientos matemáticos.

Por tanto, se estableció como objetivo particular el inferir el grado de desarrollo del pensamiento variacional que evidencian los estudiantes que cursan la educación obligatoria en México a partir de analizar su desempeño en las pruebas PLANEA. Con esto se busca establecer una base de información pertinente que permita tomar decisiones y acciones encaminadas a la mejora de la calidad de la educación y con miras a potenciar el aprendizaje de los estudiantes en el nivel medio superior.

### ■ Marco conceptual

El Pensamiento y Lenguaje Variacional, que es parte de la Teoría Socioepistemológica y que conforma el marco teórico del trabajo, pone su atención en el estudio y análisis del carácter variacional de los saberes matemáticos, por sobre el carácter simbólico y analítico con el que se tratan tradicionalmente en el discurso escolar (Cantoral y Farfán, 2000). El desarrollo de este pensamiento permite analizar, organizar y modelar matemáticamente problemas, situaciones o fenómenos que tienen como origen o parte sustancial a la variación.

Entendemos a la variación como el análisis cuantitativo o cualitativo del cambio de estado de uno o más fenómenos o situaciones. Así, por pensamiento variacional se entenderá el análisis de dichas variaciones con la finalidad de determinar sus características, sus comportamientos y/o las leyes que los rigen, con la finalidad de su comprensión y/o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre tales fenómenos o situaciones (Cabrera, 2014). Así, es a partir de comprender qué cambia, cómo cambia, cuánto cambia, cómo cambia ese cambio y así sucesivamente, que podemos generar una comprensión profunda de las particularidades de dichos fenómenos o situaciones. Pero también permite reconstruir al fenómeno a partir de comprender sus variaciones. En cuanto al lenguaje variacional, se entenderá a aquellos medios que permiten comunicar el reconocimiento y/o el análisis del cambio y las variaciones de los fenómenos o situaciones de cambio en el sentido anterior (Cabrera 2014). Esto puede realizarse por medios gráficos o icónicos, analíticos, gestuales, numéricos, verbales, entre otros.

La puesta en funcionamiento del pensamiento variacional para enfrentar una situación o problema que demanda del estudio de la variación se pone en evidencia a través del desarrollo de estrategias variacionales, entre las que se pueden mencionar: la comparación, la seriación, la anticipación y la predicción (Caballero, 2012).

### ■ Metodología

Tomando en consideración que el pensamiento variacional no es un contenido curricular específico, se centró la atención en el desempeño que demuestran los estudiantes en los reactivos que evalúan contenidos relativos al análisis de relaciones funcionales. Para realizar esto, el primer paso consistió en la revisión de las tablas de contenidos de las Pruebas PLANEA 2015 de Matemáticas de primaria, secundaria y educación media superior. Cabe señalar que en 2015 no se aplicó la prueba de preescolar, mientras que en 2016 sólo se aplicó una versión diagnóstica de algunas de éstas y no se reportaron resultados. Posteriormente, se analizaron los reactivos asociados con dichos contenidos con la finalidad de determinar si para contestarlos se requería de la aplicación de alguna estrategia variacional. Como último paso se procedió a analizar el desempeño de los estudiantes para dichos reactivos. Esto a partir de los resultados reportados por el INEE (2017) y la SEP (2017).

Cabe mencionar que, al analizarse sólo los resultados de 2015 para las diferentes pruebas, no es posible hacer inferencias longitudinales o entre niveles educativos. Es posible generar hipótesis que expliquen ciertos hechos o fenómenos, pero deben tomarse con reservas. Estas sólo podrán verificarse con estudios más profundos y de largo plazo.

### ■ Análisis de datos

El análisis de las tablas de contenidos de las pruebas (Tabla 1) arrojó que en todas se evalúan contenidos relativos al análisis de las relaciones entre variables. El porcentaje de estos contenidos va en aumento a medida que se progresa en el nivel educativo (columna 3). No obstante, el porcentaje de los contenidos cuyos reactivos requieren la aplicación de estrategias variacionales para ser contestados, es similar en las tres pruebas (columna 4).

Prueba	Contenidos que tratan sobre la relación entre variables	% contenidos: relaciones entre variables	% contenidos: estrategias variacionales
<b>Primaria Sexto año</b>	Sucesiones aritméticas, geométricas y especiales; razones de cambio de cantidades continuas y discretas; problemas de valor faltante de proporcionalidad directa.	10.8%	10.8%
<b>Secundaria Tercer año</b>	Sucesiones; proporcionalidad directa, inversa y mixta; analizar, modelar e interpretar fenómenos o situaciones que presentan variación lineal o cuadráticas*; variación de parámetros de funciones lineales. *Proviene de funciones polinomiales de segundo grado.	22%	13%
<b>Media Superior Tercer año</b>	Sucesiones; proporcionalidad directa e inversa; modelar e interpretar problemas o fenómenos empleando funciones lineales y cuadráticas: expresiones algebraicas, tablas y gráficas; resolución de problemas empleando funciones lineales; análisis de diferentes representaciones de funciones.	31.6%	11.6%

**Tabla 1:** Contenidos objeto de análisis en el estudio. Elaboración propia.

Al analizar los reactivos de los contenidos indicados en la tabla 1 e indagar cuáles implicaban el empleo de estrategias variacionales para ser respondidos, se pudieron determinar las relaciones establecidas en la Tabla 2.

Estrategia variacional	Contenido general
<b>Comparación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparar razones</li> <li>• Comparar gráficas de funciones lineales</li> </ul>
<b>Seriación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Describir la regla general de una sucesión.</li> <li>• Determina la tabla o gráfica que presenta una relación de proporcionalidad directa o inversa, variación lineal o cuadrática.</li> <li>• Poner en correspondencia diferentes registros de variación lineal.</li> </ul>
<b>Estimación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinar la gráfica formada por segmentos de recta y/o curvas que representa a un fenómeno.</li> <li>• Analizar dos funciones (lineal y cuadrática) presentadas en diferentes registros para estimar intervalos donde se presentan resultados comunes.</li> </ul>
<b>Predicción</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calcular sucesiones o términos de tablas de variación lineal (proporcional o no).</li> <li>• Determinar la expresión algebraica (lineal o cuadrática) que representa una situación, tabla o gráfica.</li> <li>• Analizar dos funciones lineales presentadas en diferentes registros para determinar qué sucede en un momento en común.</li> </ul>

**Tabla 2:** Relación entre las estrategias variacionales y algunos de los contenidos evaluados en las pruebas PLANEA de 2015. Elaboración propia.

Antes de discutir el desempeño que tuvieron los estudiantes en los reactivos asociados con los contenidos de la Tabla 2, cabe mencionar que los resultados de las pruebas PLANEA se presentan a partir de describir los conocimientos y habilidades generales que alcanzan los alumnos de acuerdo con cuatro niveles de logro: insuficiente (I), indispensable (II), satisfactorio (III) y sobresaliente (IV). Los alumnos de un determinado nivel pueden realizar lo descrito en el correspondiente y en los anteriores. El porcentaje de estudiantes en cada nivel para cada nivel educativo puede verse en la Figura 1. Un dato que llama la atención es el porcentaje de alumnos que se encuentra en el nivel I: 60.5% para primaria, 65.4% para secundaria y 51.3% para media superior (INEE, 2017; SEP, 2017).

Alejandro compró 8 chocolates por 24 pesos. Juan, Jaime, Hugo y Ricardo compraron de los mismos chocolates en otras tiendas. ¿Quién de ellos compró los chocolates más baratos que Alejandro?

- A) Hugo compró 8 chocolates por 30 pesos.
- B) Juan compró 16 chocolates por 44 pesos.
- C) Ricardo compró 10 chocolates por 48 pesos.
- D) Jaime compró 24 chocolates por 72 pesos.

(b)

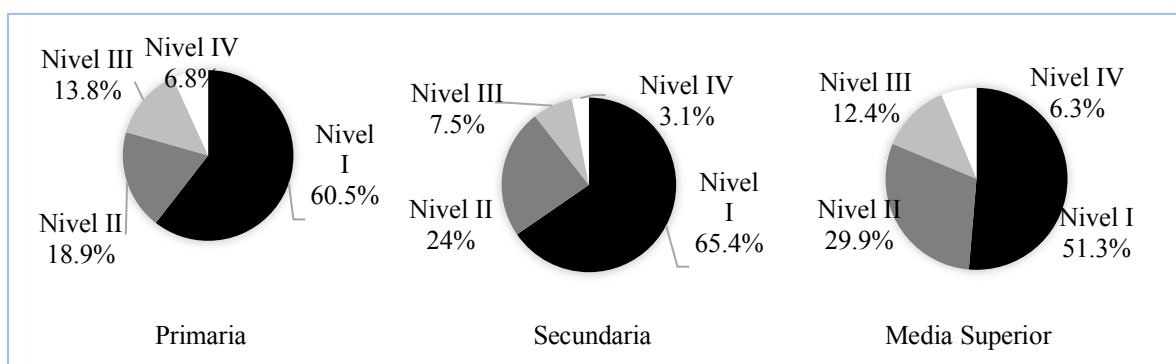


Figura 1: Porcentajes de los estudiantes en cada nivel de logro para primaria, secundaria y media superior. Fuentes: INEE (2017) y SEP (2017).

Al determinar el nivel de logro en el que se ubican los contenidos que tratan con la relación entre variables y que exigen el empleo de estrategias variacionales, se tiene lo siguiente:

- En primaria, los alumnos del nivel II (18.9%) son capaces de reconocer la regla de una progresión aritmética o calcular su término siguiente, así como responder problemas de valor faltante con razones enteras. Pero solo hasta los niveles III (13.85) y IV (6.8%), pueden responder problemas de razones y de valor faltante con razones fraccionarias.

La siguiente tabla muestra el tiempo en que una fábrica tarda en llenar las botellas de jugo.

Cantidades de botellas	Tiempo (segundos)
4	108
7	189
9	

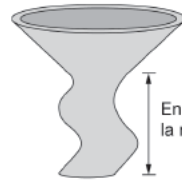
¿Cuántos segundos tardará la máquina en llenar 9 botellas de jugo?

- A) 147      C) 243
- B) 198      D) 270

(a)

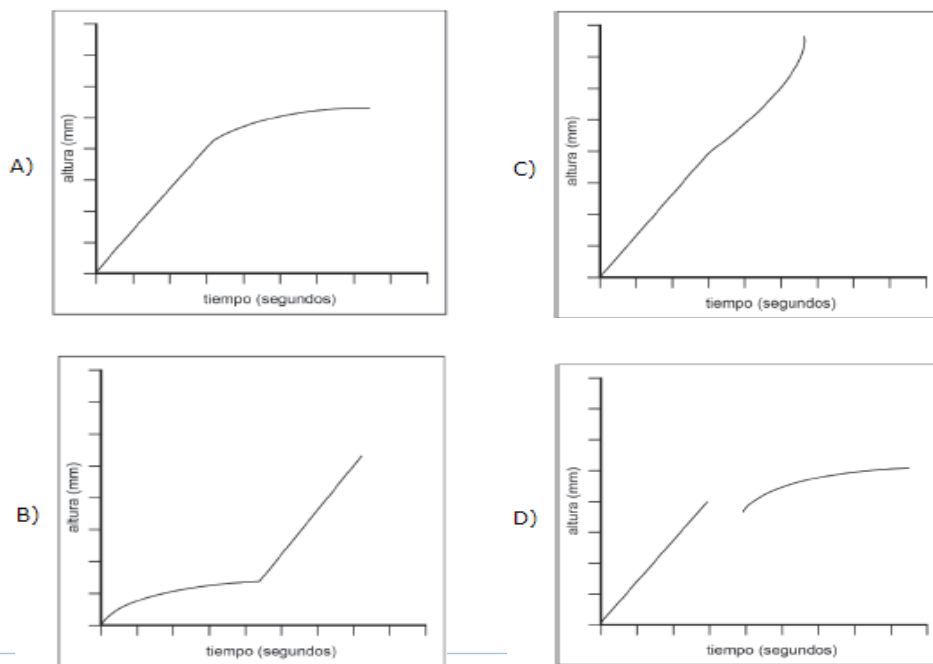
Figura 2: Ejemplos de reactivos de los niveles de logro III (a) y IV (b) de la prueba PLANEA 2015 de Matemáticas de Primaria (SEP, 2017).

El siguiente dibujo representa un recipiente en el que se vierte agua, de manera constante.



En esta sección del recipiente,  
la medida del radio es la misma.

¿Cuál de las siguientes gráficas representa la altura que va alcanzando el agua dentro del recipiente, con el transcurrir del tiempo?



**Figura 3:** Ejemplo de reactivo del nivel de logro IV de la prueba PLANEA 2015 de Matemáticas de Secundaria (SEP, 2017).

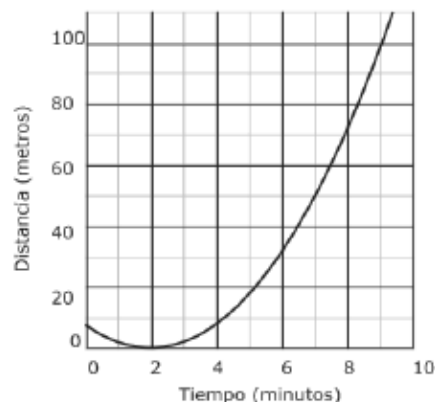
- Para secundaria, los alumnos del nivel II (24%) son capaces de responder problemas que involucran gráficas y tablas de proporcionalidad. No obstante, solo hasta los niveles III (7.5%) y IV (3.1%) puede responder problemas que involucran analizar la variación de un fenómeno y determinar si es o no lineal, así como problemas con sucesiones que requieren plantear algebraicamente sus expresiones generales.
- Por último, para medio superior, los alumnos del nivel II (29.9%) son capaces de describir el comportamiento de sucesiones numéricas, pero solo hasta los niveles III (12.4%) y IV (6.4%) pueden analizar las relaciones entre dos o más variables e interpretar, inferir, abstraer y poner en correspondencia información de gráficas, tablas y sucesiones, para resolver problemas contextualizados.

Jaime sale de la escuela en bicicleta hacia la escuela al mismo tiempo que Pedro, su vecino, sale en automóvil de su casa hacia la misma escuela; sin embargo, este último pasa primeramente por una amiga que vive colina abajo.

El desplazamiento de Jaime se muestra en la siguiente tabla:

Jaime	
Minutos	Metros
0	11
3	32
6	53
9	74

Mientras que el gráfico que muestra el desplazamiento de Pedro es el siguiente:



Encuentre el intervalo de tiempo en el cual los dos amigos coincidirán en el camino.

- A) 2 a 3
- B) 5 a 6
- C) 7 a 8
- D) 9 a 10

Figura 4: Ejemplo de reactivo del nivel de logro IV de la prueba PLANEA 2015 de Matemáticas de Educación Media Superior (SEP, 2017).

## ■ Conclusiones

En todos los niveles educativos se evalúan contenidos relacionados con el estudio de la variación que requieren poner en juego estrategias variacionales. No obstante, se puede observar que en primaria todos los contenidos se evalúan a partir de la aplicación de estrategias variacionales, mientras que en el nivel medio superior estas dan paso a procesos o procedimientos más algebraicos, los cuáles se relacionan con la parte institucional de los contenidos y la cual está asociada al Discurso Matemático Escolar. Esto no significa que en principio esta exigencia sea incorrecta. Sin embargo, sería importante analizar cómo se enseñan dichos proceso o procedimientos y si esto potencia su comprensión, toda vez que más del 50% de los estudiantes posee conocimientos considerados insuficientes para el nivel educativo correspondiente.

De acuerdo con el análisis, los contenidos cuyos reactivos requieren la aplicación de estrategias variacional se ubican a partir del nivel de logro II (este nivel se considera el mínimo deseable de los estudiantes). Es decir, en promedio 4 de cada 10 alumnos de los diferentes niveles educativos demuestra habilidades para aplicar dichas estrategias. Pero, en promedio, solo 2 de esos 4 alumnos demuestran conocimientos y habilidades satisfactorios en esas mismas habilidades (niveles de logro III y IV). Además, las estrategias variacionales de estimación y predicción se ubican en niveles de logro superiores dentro cada nivel educativo. Esto acentúa aún más la importancia de que los estudiantes desarrollen un pensamiento variacional y que esto se promueva desde los niveles iniciales.

Si no se suscitan cambios importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje actuales, bajo la situación del logro educativo reportada para 2015, se vislumbra complejo que los estudiantes de educación

media superior de los próximos años, egresen de la educación obligatoria con los conocimientos y habilidades necesarios para hacer frente a sus desafíos futuros. Así como proveerles una educación de calidad y acorde con el perfil de egreso propuesto por la Secretaría de Educación Pública de México.

### ■ Referencias bibliográficas

- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México
- Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de Cálculo. Un estudio de caso*. (Tesis de doctorado inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México
- Cantoral, R y Farfán, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R.M. Farfán, F. Cordero, J.A. Alanís, R.A. Rodríguez y A. Garza (Eds.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, DF: Trillas.
- Fernández, M., Alcaraz, N. y Sola, M. (2017). Evaluación y Pruebas Estandarizadas: Una reflexión sobre el Sentido, Utilidad y Efectos de estas Pruebas en el Campo Educativo. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 10(1), 51-67.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2015). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA). Documento rector*. México: Autor.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2016). *Panorama Educativo de México 2015. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación Básica y Media Superior*. México: Autor.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2017). *Informe de resultados Planea 2015. El aprendizaje de los alumnos de sexto de primaria y tercero de secundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas*. México: Autor.
- Maury, E.; Palmezano, G., y Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios*, 10 (1), 7-16.
- Montiel, G. (2008). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la Socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. En Cantoral, R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J., & Romo, A. (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano* (pp. 439-459). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.
- Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017, marzo 2). *PLANEA. Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes*. Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/>