EL CÁLCULO ALGEBRAICO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Edinson Matheus Camacho, Gabriel Yáñez Canal
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
ed.math.ca2@gmail.com, gyanez@uis.edu.co

Resumen

En esta investigación, se identifican y utilizan las ideas de Fermat como base del diseño de un curso introductorio de cálculo, rescatando el papel de la matemática como actividad humana relacionada con la necesidad de dar solución a problemas reales. Para ello, se plantea la revisión de la matemática de Fermat concerniente al concepto de derivada, seguido de las consideraciones didácticas necesarias, apoyadas en la Educación Matemática Realista como fundamento teórico para la enseñanza.

Palabras clave: epistemología, cálculo de Fermat, propuesta didáctica.

Abstract

In this research, Fermat's ideas are used as the basis of a calculus introductory- course design where the role of mathematics is seen as a human activity related to the need to solve real-world problems. So, we state the review of Fermat's mathematics with respect to the concept of derivative, followed by the necessary didactic considerations supported by Realistic Mathematical Education as the theoretical foundation for teaching.

Key words: epistemology, Fermat calculus, didactical proposal.

Introducción

La problemática abordada en la investigación nace de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en los estudiantes que cursan los últimos años de bachillerato, que son los futuros estudiantes universitarios de ingeniería que tienen como parte de su currículo de formación inicial la asignatura de cálculo diferencial. El problema de la enseñanza y aprendizaje de la derivada se traduce en que los estudiantes no logran los conocimientos previos que se esperan de ellos al finalizar el bachillerato, por tanto, los malos rendimientos académicos en el primer curso de cálculo en las universidades no se hacen esperar. Parte del problema es que los estudiantes no le dan significado a los procedimientos algebraicos que utilizan para dar solución a los problemas en los que se emplea la derivada, es por ello que el uso algorítmico de la derivada ha generado dificultades en su comprensión y en su cálculo (Hitt, 2009; Ubuz, 2001). Muchas veces se menciona que la no comprensión de la derivada se debe a que los estudiantes no comprenden el concepto de función, de límite y otros elementos considerados "previos" a la derivada.

En vista de lo identificado en la literatura como dificultades, nos planteamos la pregunta: ¿Cómo se resolvían los problemas que implican derivar cuando no existían esos conceptos previos? Para responder, conviene revisar los orígenes de la derivada, ya que la historia del cálculo muestra los problemas, soluciones, ideas y estrategias que usaron los matemáticos. Para el trabajo nos centramos en las ideas de Fermat, ya que Fermat es uno de los pioneros de la algebrización del cálculo, resolvió problemas sin usar límites, ni otros conceptos que se asumen necesarios para dar respuesta a los problemas.

La investigación planteada busca establecer la relación entre el aporte de Fermat al cálculo diferencial como elemento didáctico en la enseñanza y el impacto en el aprendizaje del concepto de derivada en los estudiantes. La historia matemática como recurso didáctico y las investigaciones en torno a la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes dan sustento al planteamiento del problema. En cuanto a su diseño e implementación, la investigación tendrá como propósito reconstruir las ideas relevantes de las soluciones de Fermat a los problemas de máximos y mínimos y rectas tangentes a curvas en un punto, que involucraron momentos importantes en el desarrollo del cálculo, pero en una versión apropiada para el aula, esto es, utilizando elementos modernos como ejes cartesianos, notaciones, procedimientos algebraicos e incluso, recursos computacionales.

Cabe señalar, que el presente trabajo pretende verificar lo mencionado, abordando exclusivamente el problema de la enseñanza aprendizaje de la derivada, que resume Artigue (1995) afirmando que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento. Es por lo anterior, que la propuesta relacionará las ventajas que ofrece la historia sin obviar los avances y resultados que han obtenido los investigadores en el problema.

Elementos teorico metodológicos

La investigación es de corte fenomenológico, ya que "el objetivo de una investigación fenomenológica es encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se puedan generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical" (Graveimejer y Terwuel, 2000, p.12).

En un estudio fenomenológico se tiene como premisa que a lo largo de la historia se han abstraído, organizado y estructurado grandes familias de fenómenos que dan lugar a los conceptos, en el caso de nuestra investigación el concepto es la derivada.

Para el diseño de las situaciones, se tomará el marco metodológico que propone la Educación Matemática Realista, que precisa realizar un análisis fenomenológico de la derivada, en este caso, utilizando la revisión histórica del concepto, relacionando los aspectos identificados en la fase 1 con los contextos, situaciones y fenómenos.

El análisis fenomenológico resultante, tendrá como particularidad, que el aporte de Fermat será la principal fuente de estudio para el posterior diseño de las actividades, implicará además que el docente-investigador debe estudiar la historia para hacer una correcta reinvención guiada y conducir de alguna manera a los estudiantes a reinventar modelos, que evolucionen hacia las estrategias usadas por Fermat, reduciendo el conjunto de contextos y situaciones.

En la investigación se estipulan seis fases de investigación. Las cuatro primeras, corresponden a un proceso de didactización, en particular, la segunda fase corresponde al análisis fenomenológico que propone Freudenthal para la elaboración de las actividades. La quinta y sexta corresponden al proceso de matematización de la derivada.

Se muestra a continuación un problema abordado por Fermat y una aclaración sobre las interpretaciones de otros autores como muestra del trabajo que se realizó en la Fase 1.

El problema del segmento

Este problema consiste en dividir un segmento de magnitud *B* en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de las dos partes sea máximo. La solución del problema realizada por Fermat entre 1629 y 1636 presenta un algoritmo, bautizado como el *Methodus* (*Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum*) (TH.OF.1.133, TH.OF.III.121) aplicado al problema del segmento.

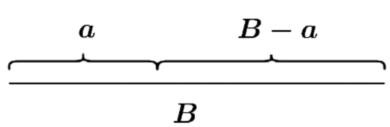

Tabla 1. *Aplicación del Methodus*

a	Es la incógnita.
$a(B - a)$	Es la cantidad a maximizar.
$aB - a^2$	La cantidad a maximizar desarrollada en potencias de *a*.
$(a + e)[B - (a + e)]$	Sustituyendo *a* por *a* + *e*.
$\mathrm{aB} + Be - 2ae - a2 - e^2$	Desarrollo en potencias de *a y e*.
$aB + be - 2ae - a^2 - e^2 \sim aB - a^2$	Planteamiento de la *adigualdad* (~).
$Be - 2ae - e^2 \sim 0$	Eliminando los términos comunes en la *adigualdad*.
$B - 2a - e \sim 0$	Dividiendo todos los términos por *e* o potencias mayores si es necesario.
$B - 2a \sim 0$	Se suprimen los términos que aún contengan *e*.
$B - 2a = 0$	Las cantidades restantes se hacen iguales.
$a = \frac{B}{2}$	Se da respuesta al problema. Se halla la incógnita para que la cantidad sea máxima.

La segunda columna muestra el *Methodus*, para solucionar el problema se establece la incógnita y la cantidad a maximizar, luego se plantea una *adigualdad*, se dividen los términos que contienen *e,* se suprimen los términos que aún contengan *e* para finalmente convertir la *adigualdad* en igualdad y dar respuesta al problema.

Como era costumbre en Fermat, no mostró inicialmente detalles del fundamento del *methodus.* Es por esto último, que es común encontrar interpretaciones anacrónicas que asumen que Fermat estaba proponiendo los fundamentos mismos del análisis infinitesimal que luego fueron desarrollados por Barrow, Newton y Leibniz, entre otros.

Repasando el *Methodus* y usando notación moderna, se tendría lo que se ve en el siguiente cuadro, que es como algunos historiadores de la matemática han pretendido interpretarlo (Eves, 1969; Edwards, 1979; Boyer, 1949, Collette, 1985)

Tabla 2. *Interpretación del Methodus*

a	Es la variable.
$f(a)$	Es la función que modela el problema.
$f(a+e) \sim f(a)$	Se establece la *adigualdad*.
$f(a+e) - f(a) \sim 0$	Se *adiguala* a cero.
$\frac{f(a+e) - f(a)}{e} \sim 0$	Se divide por *e*.
$\left(\frac{f(a+e) - f(a)}{e}\right)_{e=0} \sim 0$	Se eliminan los términos que todavía contienen e, o bien se haría $e = 0, para$ obtener la siguiente expresión.
$\left(\frac{f(a+e) - f(a)}{e}\right)_{e=0} = 0$	Se resuelve la ecuación, transformando la *adigualdad* en igualdad.
$\lim_{e\to 0} \frac{f(a+e) - f(a)}{e}=0$	Finalmente, si se induce desde la mirada de hoy, la expresión anterior equivale a tomar el límite cuando $e \to 0$. Por lo que es prácticamente hallar la derivada e igualar a cero como en el cuadro 1.

Sin embargo, estas equivalencias no son más que coincidencias felices en el sentido de que no reflejan para nada el pensamiento de Fermat, basados en las investigaciones de (González Urbaneja, 2008) plasmadas en su libro: *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial* vamos a aclarar la idea original.

¿Cuál es el origen del Methodus?

En la antigua Grecia un grupo de problemas que tenían "condiciones límites" se conocían como *Diorismos*, el razonamiento realizado por Pappus en la proposición 61 del libro VII indicaba que este tipo de problemas en el caso de los "extremos" eran *únicos* y *singulares.* Los *Diorismos* pueden entenderse como condiciones que se agregan al problema para resolverlo en términos generales (González Urbaneja, 2008). Los problemas de máximos y mínimos estarían en esa categoría.

Fermat aplica el método de la *Syncrisis* de Viete en los *Diorismos*, en este caso, para los valores extremos. El método de Viete, consiste en igualar ecuaciones semejantes para obtener expresiones de los coeficientes de una ecuación en términos de sus raíces. Se podría afirmar que el *Methodus original* aplicado al problema del segmento se vería de la siguiente manera:

Se pretende buscar el valor de Z donde el producto de $a(b-a)$ es máximo.

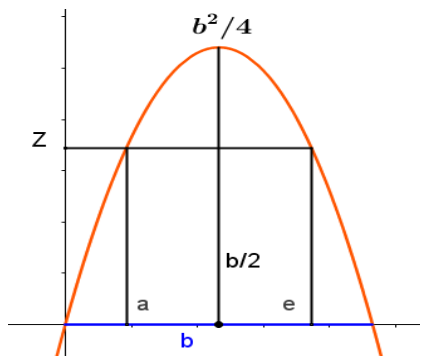

Figura 8. Z menor que el valor máximo

En la gráfica anterior Z es un valor menor que $b^2/4$ (Valor máximo conocido), Fermat observa que para ese valor Z existen a y e tal que
$a(b-a) = e(b-e) = Z$

$$ab - a^2 = eb - e^2$$

Al trasladar al mismo lado los términos cuadráticos y luego factorizar $(a-e)$, y dado que a y e son valores distintos, se tiene:

$$ab - eb = a^2 - e^2$$

$\frac{b(a-e)}{(a-e)} = \frac{(a-e)(a+e)}{(a-e)}$ $(*)$

$$b = a + e$$

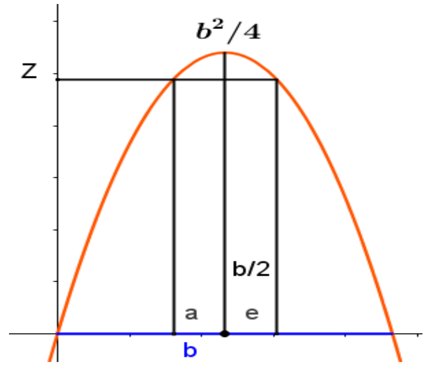

Figura 9. Z próximo al valor máximo

Fermat observa que si se toma un valor de Z cada vez más grande, la diferencia de a y e se hace menor. Cuando $\mathrm{Z} = b^2/4,\ a - e = 0$, por lo que

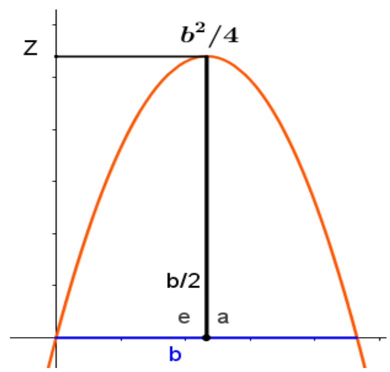

Figura 10. Z igual al valor máximo

$$b = 2a$$

y el valor de la incógnita a para la cantidad que se quería maximizar es

$$a = \frac{b}{2}$$

Salta a la vista la diferencia con el *methodus* publicado. Como diferencia notoria, se encuentra que no se plantea la adigualdad, y tampoco se divide por el valor e. Además, queda claro que la idea original no es precursora de la idea de límite que conocemos actualmente.

Reflexión final

La investigación está en desarrollo, se encuentra en la fase 3 que corresponde al diseño de las actividades. El análisis de la matemática de Fermat nos ha permitido abordar cuestionamientos como: ¿Cuál es el origen del método usado por Fermat para resolver problemas de máximos y mínimos?, En verdad, ¿qué tan cerca estuvo Fermat de la noción de derivada? A su vez, hemos adoptado algunas posturas de cara al uso didáctico que se le va a dar al aporte de Fermat al cálculo, por ejemplo: El trabajo con funciones polinómicas, la definición de la derivada de Fermat, el diseño enfocado en problemas de optimización inicialmente hasta razones de cambio junto con un manual docente.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano

Boyer, C. (1949). *The History of Calculus and its Conceptual Development (the Concepts of the Calculus).* New York: Dover.

Collette, J. (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol. II). Madrid: Siglo XXI.

Edwards, C. H. (1979). *"The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer- Verlag.

Eves, H. (1969). *An introduction to the History of Mathematics.* New York: Rinehart and Winston.

Fermat, P. (1891-1912). *Oeuvres de Fermat.* París.

González Urbaneja, P. M. (2008). Fermat y los orígenes del cálculo diferencial (Primera ed.). España: NIVOLA libros y ediciones, S. L.

Graveimejer, K. & Terwuel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. J. Curriculum Studies, 32(6), 777- 796

Hitt, F. (2009). Dificultades En El Aprendizaje Matemático pp. 1–10. Recuperado de https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_cálculo?auto=download

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' understanding of tangency, numerical calculation of gradients and the approximate value of a function at a point through computers. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 20 (1), 111-135