

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA RELACIONADA A LAS CONCEPCIONES DE FRACCIÓN

Milagros Edith Carrillo Yalán
Universidad Antonio Ruiz de Montoya. (Perú)
milagros.carrillo@uarm.pe

Resumen

El inicio de esta investigación surgió de la gran dificultad que muestran los alumnos en la comprensión de las fracciones. Esta dificultad, presente tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, se observa principalmente en los niveles básicos de educación. Para identificar uno de los posibles factores que influyen en tal problema se analizó la organización matemática (OM) relacionada con las concepciones de fracción presente en un texto escolar de matemática. En el tema de fracciones, se enfatiza en la concepción parte todo cuya técnica es la del doble conteo de las partes, dejando de lado otras concepciones importantes como: cociente, medida, entre otras. Por tanto, el análisis se fundamenta en el estudio de las OM vinculadas a las concepciones de fracción en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Finalmente, esta investigación, que es cualitativa y de tipo bibliográfica, describe una realidad en su contexto natural, el cual constituye una fuente rica y estable para otras investigaciones.

Palabras claves: fracción, TAD, organización matemática

Abstract

This investigation is based on the great difficulty students have to understand fractions. This difficulty, which is present in both the teaching and the learning of fractions, is mainly observed at the basic levels of education. To identify one of the possible factors that originate such problem, we analyze the mathematical organization (MO) related to the conceptions of fraction stated in a math textbook. In the topic related to fractions, the textbook emphasizes the part-whole conception which technique is the double count of parts, putting aside other important notions such as: quotient, and measure, among others. Therefore, this analysis is based on the study of MO linked to conceptions of fraction within the framework of the Didactic Anthropological Theory (DAT). Finally, this is a qualitative bibliographic research mainly because it describes reality in its natural context, and it constitutes a valuable and stable source to further investigations.

Key Words: fraction, TAD, Mathematical organization

■ Introducción:

Uno de los temas de mayor dificultad, tanto para su enseñanza como para su aprendizaje (Perera y Valdemoro, 2007) es la comprensión de las fracciones. Silva (2005) y Perera et al. (2007) coinciden en que las dificultades para su aprendizaje se deben a las diversas concepciones que admite este objeto matemático; entre los cuales, tenemos: parte-todo, cociente, razón operador y medida. A partir de mi experiencia docente he podido detectar tales dificultades y el predominio de la concepción parte todo, cuya técnica es la del doble conteo de las partes en superficies totalmente divididas en partes congruentes,

lo que podría conducir al fracaso cuando el objeto representado se escape de ese patrón. Gómez (2009) afirma que el texto escolar es el principal instrumento curricular utilizado por el profesorado para enseñar matemáticas en el aula; sin embargo, es también, generador de potenciales inconsistencias, ambigüedades, omisiones y otros conflictos a la hora de presentar los contenidos matemáticos. Por tal motivo, esta dificultad ha sido abordada a través del análisis de organización matemática (OM) del texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria (relevante por ser de distribución obligatoria a nivel nacional) en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En ese sentido, la pregunta que orienta la presente investigación es: ¿Cuál es la organización matemática (OM) relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria?

■ Marco teórico

Con el propósito de analizar la OM del objeto matemático fracciones, se ha tomado como referente teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999). Este enfoque señala que la actividad matemática debe ser interpretada (modelizada) como una actividad humana, en lugar de ser considerada únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. Además, la TAD admite que toda actividad humana regularmente realizada, puede describirse como un modelo único, que se resume con la palabra praxeología. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos; el término logos se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que es la explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología. OM se constituye alrededor de uno o varios tipos de tareas matemáticas (objeto relativamente preciso). Esta tarea, t , tiene cabida en el tipo de tarea T y se puede decir que $t \in T$. Además, desde este punto de vista, expresiones como “calcular”, “demostrar” se consideran un género de tareas. Las tareas, conducen a la creación de técnicas matemáticas (determinada manera de hacer las tareas $t \in T$), las cuales se justifican por tecnologías matemáticas (discurso racional) desarrolladas en el marco de una teoría matemática (explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología).

■ Metodología

La presente, es una investigación cualitativa de tipo bibliográfico debido a que se va a describir una realidad en su contexto natural: un libro de texto. Cuba y Lincoln (1981) citados en Gonzales (2014) manifiestan que las ventajas de trabajar con esta metodología se deben a que estos documentos constituyen una fuente rica y estable, y pueden ser la base de diferentes estudios en los que podemos obtener evidencia para fundamentar las afirmaciones y declaraciones del investigador; por ello, resultan una fuente natural de información. Procedimiento Metodológico: Primero, se buscó información referente a investigaciones relacionadas con nuestro objeto matemático: fracción, debido a las dificultades en el aprendizaje que presentan los estudiantes cuando realizan tareas sobre dicho objeto matemático; a su vez, se consultaron investigaciones relacionadas con la TAD por ser el marco teórico que fundamenta el trabajo de investigación. Luego, se seleccionó el texto relevante a investigar para analizarlo en base a los elementos de la OM de nuestro marco teórico, la TAD: los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Adicionalmente, se definieron los criterios para realizar el análisis de las praxeologías de nuestros objetos matemáticos en el libro de texto seleccionado; y, finalmente, se realizó la descripción y el análisis de la OM de las fracciones, considerando los criterios definidos previamente.

■ Análisis de datos

En el texto escolar predomina la concepción parte-todo y la técnica que apoya a este tipo de tarea es la del doble conteo de partes; sin embargo, hay evidencias de situaciones en las que la técnica del doble conteo de las partes puede constituir un obstáculo didáctico para construir otras técnicas. Si bien, en la enseñanza escolar el tipo de tareas presentada en las figuras permite solamente el desarrollo de la técnica del doble conteo de las partes, no permitirá a los alumnos la construcción de otras técnicas y consecuentemente sus acciones estarán limitadas a ese tipo de tareas. Para su mejor comprensión, se muestra algunas situaciones asociadas a la concepción parte todo:

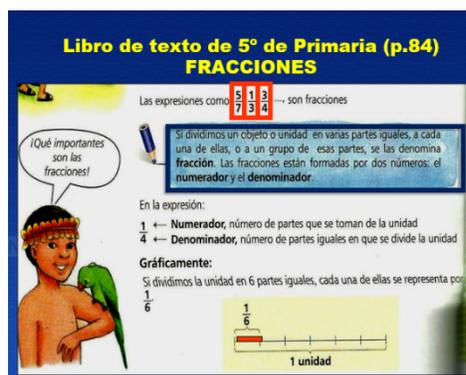


Figura 1: Evaluando lo aprendido.
Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

En la figura 1, la fracción está definida a partir de la idea parte-todo. Además, se usa el segmento de recta como representación figural, para vincular la concepción de fracción como parte-todo. Pues se ha dividido el segmento en 6 partes congruentes y se le asigna una fracción igual a $1/6$ a cada parte.

Por otro lado, hay situaciones que requieren de otras concepciones de fracción. Por ejemplo, la concepción cociente, especialmente cuando se requiere la representación gráfica de la fracción impropia, pues el hecho de querer representarla bajo la concepción parte todo puede llevar a los alumnos a una confusión, ya que se visualiza la representación de dos unidades, entrando en contradicción con la concepción de fracción como parte-todo.

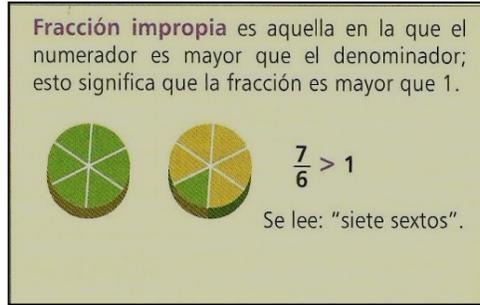


Figura 2: Evaluando lo aprendido
Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

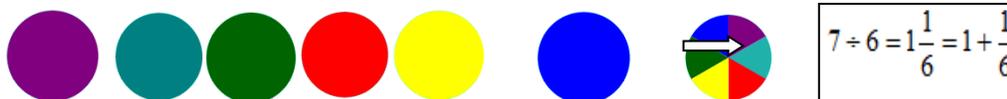
En la figura 2, se observa un error en la representación gráfica, pues se visualiza la representación de dos unidades, entrando en contradicción con la definición general de fracción como parte-todo. Este es un ejemplo clave de que para algunas situaciones la concepción parte todo no es suficiente. Ahora bien, si quisiéramos representar $7/6$ se necesitaría de la concepción cociente, ya que se necesita 7 unidades para su correcta representación gráfica. Por ejemplo, si quisiéramos dividir 7 pizzas entre 6 personas a cada una le tocaría $7/6$. En la representación gráfica bajo la concepción parte-todo una persona tendría que tomar todas las seis partes en las que se dividió la unidad, más una sexta parte de otra unidad, es decir $1 + 1/6 = 7/6$ de pizza para una persona y para las cinco personas restantes le tocaría solo $1/6$ de la otra unidad, por lo cual la repartición no sería correcta. En ese sentido, se muestra dos técnicas asociadas a la concepción cociente, relacionadas a esta tarea:

Distribuir 7 pizzas entre 6 personas: La primera técnica, dividir cada unidad (cada pizza) en 6 partes iguales, destinando a cada persona $1/6$ de cada pizza y como son 7 pizzas recibiría en total $7/6$. Una segunda técnica sería distribuir una unidad entera para cada persona y dividir la última unidad en seis partes iguales, concluyendo que a cada persona le corresponde $1 + 1/6$ que es igual a $7/6$.

Técnica 1:



Técnica 2:



Se puede identificar, en las tareas y técnicas, diferentes concepciones como: determinar la fracción de un entero (concepción parte –todo, la cual predomina), transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional (operador), distribuir en partes iguales un objeto a “n” personas (cociente) y, si bien,

estas no son explícitas, dado que no se definen, aparecen implícitamente en algunas actividades propuestas por el texto escolar.

Así, en la figura 3 y figura 4 se presentan algunas tareas: “Actividad individual” y “evaluando lo aprendido” donde el dominio de las concepciones de parte todo, cociente, operador y medida son fundamentales para el desarrollo de las mismas

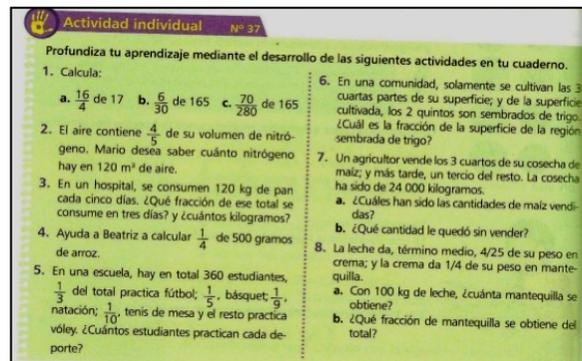


Figura 3: Actividades individuales
Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

En la Figura 3, se presentan actividades individuales al finalizar el tema de fracciones que requieren emplear no solo la concepción parte-todo, sino otras como: cociente, operador, razón y medida. Con respecto a las representaciones, estas se presentan como representaciones verbales como por ejemplo: los 3 cuartos, un tercio, etc. y sus respectivas representaciones numéricas. Se muestran tareas, pero no se proponen técnicas:

- En la tarea 1 se pide resolver operaciones básicas de división y multiplicación, haciendo uso de la concepción de fracción como operador.
- En la tarea 2 se transmite el desarrollo de la concepción operador lo que requiere el uso de la técnica de división y multiplicación.
- En la tarea 3 se induce a la concepción parte-todo, con el tipo de tarea reconstruir un entero. Para ello se usará la técnica de reversibilidad del doble conteo de las partes, es decir, un todo será $120\text{kg} \times 5 \text{ partes} = 600 \text{ kg}$, la parte tomada del todo será $120\text{kg} \times 3 = 360\text{kg}$, logrando así la fracción buscada.
- De la tarea 4 a la 8 se pide resolver operaciones básicas de división y multiplicación, aquí vuelve la concepción de operador. No se observa presencia de teorías ni tecnologías.

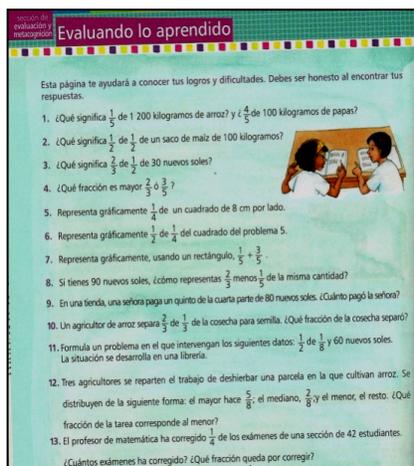


Figura 4: Evaluando lo aprendido
Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

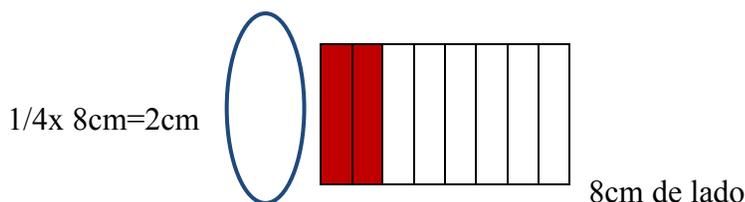
En la Figura 4, se presentan tareas que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida. En el desarrollo del texto se hace referencia a la concepción de operador en todas las preguntas. Con respecto a la técnica o técnicas que se presentan, no se observa la utilización de alguna técnica, ya que son problemas que sólo están propuestos.

Con respecto a las tareas 1, 2 y 3, se observa que dichas preguntas son ambiguas, pues el término ¿Qué significa? se puede entender como ¿Qué entiendes por esta fracción? por ejemplo, en la primera pregunta $\frac{1}{5}$ de 1200 ¿Cuál es tu interpretación? se presta a múltiples técnicas e interpretaciones: Un alumno podría decir en el primer caso, significa la quinta parte de 1200, otro podría resolverlo y decir que $\frac{1}{5}$ de 1200 significa 240, otro podría decir que dividimos 1200 en cinco partes de las cuales nos quedamos con una. Y aunque todas las reflexiones serían correctas, se sugiere especificar qué se espera que haga el alumno ¿Que interprete y dé su opinión o que opere y halle su respuesta o resultado?

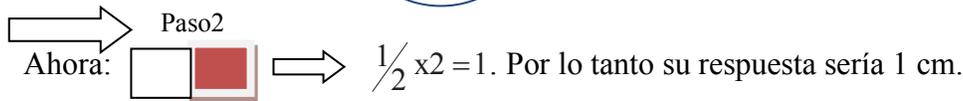
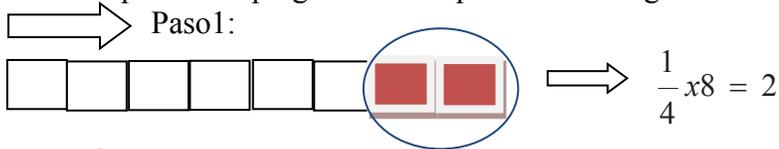
Con respecto a la tarea 4, se pide la comparación de fracciones heterogéneas, lo que no fue explicado en la sección proceso, ya que sólo se encargó de la comparación de fracciones homogéneas. Ahora, para su resolución, se plantea las siguientes técnicas: convertir a fracciones homogéneas que sean equivalentes con dichas fracciones dadas.

Así: $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$ podemos hallar fracciones equivalentes a estas solo multiplicando a la primera fracción por $\frac{5}{5}$ y a la segunda fracción por $\frac{3}{3}$, y de esta manera lograr las nuevas fracciones $(2 \times 5)/(3 \times 5) = 10/15$ y $(3 \times 3)/(5 \times 3) = 9/15$ entonces $10/15 > 9/15$.

Con respecto a la tarea 5, su posible representación figural sería:



Con respecto a la pregunta 6 su representación figural: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de 8cm de lado



Con respecto a la tarea 7 su representación figural sería: $= \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$



Con respecto a la tarea 8 su resolución se puede realizar usando la concepción operador.

$$\frac{2}{3} \times 90 - \frac{1}{5} \times 90 = 60 - 18 = 42$$

Con respecto a las tareas 9 y 10 los estudiantes podrán hacer uso de la concepción como operador (tratado en esta unidad como fracción de un número) para responder a dichas preguntas.

Tarea 9:

$$\frac{1}{5} \text{ de } \frac{1}{4} \text{ de } 80 = \frac{1}{4} \text{ de } 80 = 20$$

$$\frac{1}{5} \times 20 = 4$$

Tarea10:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Con respecto a la tarea 11 se pide la formulación de un problema con los datos dados. Dichos datos son entregados en el problema, facilitando así su elaboración.

Con respecto a la tarea 12, se pide la resolución de operaciones con fracciones homogéneas. Dichas fracciones fueron estudiadas en la sección de proceso. Así se pide sumar las fracciones homogéneas para obtener la unidad.

$$\frac{5}{8} + \frac{2}{8} + \frac{a}{8} = \frac{8}{8} \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{1}{8}$$

Para ello se suma:

Con respecto a la tarea 13 se podrá hacer uso de la concepción como parte todo, sin embargo por tratarse de exámenes, el resultado esperado sería un número entero.

Finalmente, con respecto a la tarea 14, aquí es necesario del dominio de operaciones de fracciones para obtener el resultado: Se vendió $\frac{3}{4}$ de la cosecha de papas, entonces nos queda $\frac{1}{4}$ de dicha cosecha. Luego se vendió $\frac{1}{3}$ de lo queda, osea $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Quedando: $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{(1 \times 3)}{(4 \times 3)} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

■ Resultados

En el texto escolar analizado se ha identificado el uso de dos concepciones de fracción: como parte-todo y como operador. Cabe destacar que la concepción de fracción como parte-todo es la que predomina, se oficializa mediante la definición de fracción y es el que está presente en la mayoría de las tareas. Sin embargo, la concepción de fracción como operador, aunque no se la define de esta manera sino como fracción de un número, se oficializa a través de la técnica de dividir las cantidades por el denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador y está presente en algunas tareas. Las concepciones de fracción como razón y cociente no son considerados explícitamente, aunque aparecen en forma eventual en otras tareas. La praxeología predominante en el texto analizado es la del saber hacer, constituido por los siguientes tipos de tareas y técnicas: Determinar la fracción de un entero (vinculada al concepto de fracción como parte-todo) cuya técnica empleada fue la de división y del doble conteo de las partes. Transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional (vinculada a la concepción de fracción como operador) cuya técnica empleada fue la de dividir las medidas iniciales por el denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador Distribuir en partes iguales un objeto a “n” personas (vinculada a la concepción de fracción como cociente) cuya técnica empleada fue la de la operación de división. Con respecto a las representaciones figurales, se observa la presencia de algunas, por ejemplo: los círculos divididos y el segmento de recta, que tienen como propósito representar la concepción parte-todo. El uso de otras representaciones sería más adecuado, porque ayudarían a un mejor entendimiento de dicho objeto matemático. Por ejemplo, para la representación de la fracción impropia sería mucho más apropiado emplear la concepción de cociente, ya que representarlo bajo la concepción parte-todo, implicaría entrar en contradicción con la definición de fracción como parte-todo. Realizar la representación adecuada favorecería enormemente el aprendizaje de los alumnos puesto que ellos podrían visualizar correctamente la representación de acuerdo a cada tipo de fracción.

Por otro lado, el análisis de las concepciones de fracción como: Parte-todo, operador, cociente, razón nos permitió identificar las praxeologías (tipos de tareas y técnicas empleadas para resolver las tareas vinculadas a tales conceptos, así como las tecnologías que justifican esas técnicas) que están presentes en el texto escolar.

■ Conclusiones

Aunque el texto escolar privilegia la concepción parte-todo, esta concepción de fracción se restringe al caso de fracción propia, dejando de lado la posibilidad de analizar el caso de fracción impropia. Además, se observa una representación figural no adecuada en relación a la fracción impropia bajo la concepción parte-todo, en tal caso, la manera adecuada de representarla figuralmente sería bajo la concepción cociente. Se infiere la presencia de dos concepciones de fracción (operador, cociente) en algunas tareas propuestas de manera implícita, sin embargo, el hecho de no explicarlas apropiadamente podría influir negativamente en el aprendizaje del objeto matemático en estudio y de otros a enseñarse con posterioridad.

■ Referencias bibliográficas

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique Du didactique. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 14(72), 9-42.
- Flores, R. (2010). *Significados asociados a La noción de fracción en la Educación Secundaria*. Tesis de Maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional. México.
- Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. En M. J. González, M T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (21-35). Santander, España: SEIEM.
- Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Perera, P. y Valdemoros, M (2007). *Propuesta Didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de Educación Primaria*. Investigación en Educación Matemática. México.
- Quiroz, E. y Sagredo, M. (2009). *Matemática Quinto Grado de Educación Primaria*. Editorial Bruño. Perú.
- Silva, M. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. Tesis doctoral no publicada, São Paulo. Brasil.