Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LOS CONCEPTOS DE HOMEOMORFISMO Y DIFEOMORFISMO

Juan Martín Casillas González, Marisol Radillo Enríquez, Vladimir Efremov
Universidad de Guadalajara. (México)
martin.casillas70@gmail.com, marisol.renriquez@academicos.udg.mx, vefremov3@yandex.ru

Resumen

Los conceptos de homeomorfismo y difeomorfismo, de uso frecuente en el Cálculo y el Análisis Matemático, son importantes en el estudio de la teoría de curvas y superficies de los cursos de Geometría. Por tal motivo, hemos diseñado actividades de aprendizaje que guíen al estudiante en el análisis de las condiciones en que se presentan los homeomorfismos y difeomorfismos, a partir de una función que será sometida a diversos procesos, como cambios de variable, transformaciones de coordenadas e inclusive una proyección estereográfica. El sustento teórico-metodológico de la propuesta involucra tanto el trabajo colaborativo entre los estudiantes, como actividades de visualización.

Palabras clave: representaciones semióticas, difeomorfismo, homeomorfismo, visualización.

Abstract

The concepts of homeomorphism and diffeomorphism, regularly used in calculus and mathematical analysis, are important in the study of the theory of curves and surfaces contained in courses of geometry. Therefore, we have designed learning activities to guide the student in the analysis of the conditions in which the homeomorphism and diffeomorphism are present, starting with a function that will be submitted to various processes, such as change of variable, transformations of coordinates and including the stereographic projection. The theoretical-methodological support of the proposal involves both the collaborative work among students, and visualization activities.

Key words: semiotic representations, diffeomorphism, homeomorphism, visualization.

Introducción

En el año de 2013 en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México dio inicio el nuevo Plan de Estudios para todas las carreras de este Centro Universitario, con un enfoque curricular que involucra competencias y está centrado en el estudiante. En el caso de la Licenciatura en Matemáticas se establecieron los siguientes módulos de formación profesional:

1. Módulo de Soporte Matemático
2. Módulo de Algebra

3. Módulo de Geometría y topología
4. Módulo de Análisis Matemático
5. Módulo de Cálculo
6. Módulo de Estadística
7. Módulo de Ecuaciones Diferenciales
8. Módulo de Métodos Numéricos

El módulo de Geometría y topología consta de 4 unidades de aprendizaje o asignaturas: Introducción analítica a las geometrías I, Introducción analítica a las geometrías II, Geometría diferencial y Topología

La propuesta está diseñada para abordarse en la asignatura de Introducción analítica a las geometrías II. En el Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas, se sugiere cursar esta materia en el tercer semestre de la carrera, después de Teoría del Cálculo I e Introducción analítica a las geometrías I, y el contenido temático del curso está relacionado con la teoría de curvas planas, curvas en el espacio, y superficies. En los dos siguientes semestres se cursarán Análisis complejo y Geometría diferencial, respectivamente, en los cuales también se utilizan los conceptos de difeomorfismo y homeomorfismo.

El programa oficial de la materia, la bibliografía sugerida consta de libros para nivel avanzado o de postgrado, entre estos se encuentra el libro de Do Carmo (1976) *Differential geometry of curves and surfaces,* considerado un clásico de geometría diferencial y otros con enfoques más modernos u orientados a las aplicaciones como el libro *Differential Geometry: Manifolds*, *curves and surfaces* de Berger (2012) y el libro *Elementary Differential Geometry,* de Presley (2012)

En libros de texto de Geometría Diferencial, como el de Do Carmo (1976), se construyen definiciones geométricamente importantes a partir de las ideas fundamentales de derivadas, productos interiores, transformaciones lineales y homeomorfismos, pero justo al llegar a este tópico se aleja de las representaciones visuales (Pinsky, 2013). El libro de Berger (2012) inicia introduciendo a los lectores a las formas diferenciables y variedades (*manifolds*) para luego describir las características de curvas y superficies en términos de aplicaciones diferenciables (inmersiones). En esta obra se pueden observar representaciones gráficas de curvas que parecen más bien construidas a mano alzada a pesar de tener una edición más reciente. Por otro lado Presley (2012) aborda el concepto de homeomorfismo, en la sección de teoría de curvas, como aplicaciones $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ asumiendo que los conceptos previos ya son del dominio del estudiante, y como en el caso de los anteriores, en estos temas se carece frecuentemente de representaciones gráficas.

Por otra parte, en esta etapa de la formación profesional de los futuros matemáticos del CUCEI, la prioridad se centra en sus estrategias de resolución de problemas, la capacidad de abstracción y la formalidad del pensamiento matemático, por lo que la comprensión de conceptos abstractos, como los homeomorfismos y difeomorfismos, queda un tanto “relegada”. Dada la importancia de estos conceptos a lo largo de la carrera, este trabajo pretende propiciar que los estudiantes aborden tales conceptos sin descuidar la formalidad de la matemática. Se parte de la premisa de que la construcción de un concepto matemático se enriquece si se apoya en conceptos y objetos matemáticos previamente aprendidos, por lo que proponemos dos actividades de aprendizaje que permitan al estudiante construir los significados en cuestión, en el curso de Introducción analítica a las geometrías II. Se espera que en lo que resta de este año las actividades sean aplicadas a manera de prueba piloto, con el objetivo de mejorarlas y obtener resultados concretos en los próximos ciclos escolares.

Soporte teórico

El aprendizaje de los objetos matemáticos opera a nivel conceptual, pero la actividad del estudiante sobre dichos objetos solo es posible a través de sus representaciones semióticas (Hitt, 2003). Si se considera que la comprensión de un objeto matemático involucra el desarrollo de una variedad de representaciones, ya sea internas (mentales) o externas (semióticas), entonces la enseñanza debe propiciar el uso de diversas representaciones de un mismo objeto y las relaciones funcionales entre ellas (Font, 2007).

Cada forma de representación de un mismo objeto matemático resalta diferentes propiedades o características, por lo tanto la construcción de significados implica operar con sus diferentes representaciones semióticas. Por ejemplo, no basta con enunciar verbalmente las definiciones de homeomorfismo y/o difeomorfismo, también se requiere identificar todas las características necesarias en los procesos de transformación de funciones, lo cual se apoya en la visualización.

La Visualización matemática es considerada como un camino para la codificación y decodificación de objetos matemáticos abstractos (ideas, conceptos y métodos de las matemáticas), que presentan una gran riqueza de contenidos visuales (imágenes mentales, o a lápiz y papel o con la ayuda de tecnología), representables geométricamente en un sistema coordenado, para la solución de problemas" (López, Alanis y Pérez, 2005)

Desde esta perspectiva, el aprendizaje de matemáticas implica saber representar los conceptos matemáticos en forma simbólica, numérica, gráfica o verbal, y realizar con ellos transformaciones (en la misma forma de representación) y/o conversiones, que son transformaciones de una forma de representación a otra. Se considera que de esta manera se enriquece la construcción de significados, ya que se brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar a fondo las características de los conceptos y las interrelaciones entre ellos.

Metodología

Los grupos de estudiantes de la Lic. En Matemáticas no más de 20 estudiantes, así que se propone formar equipos de trabajo colaborativo de binas o tercias, con el propósito generar entre ellos un debate académico para justificar o argumentar sus respuestas a las actividades de aprendizaje.

En lugar de que el maestro proporcione la definición formal de los conceptos de homeomorfismo y difeomorfismo, seguida de algunos ejemplos y ejercicios rutinarios, nosotros proponemos que los estudiantes resuelvan algunas actividades que involucran conceptos y operaciones previamente conocidos, seguidos de una serie de cuestionamientos que los lleven a describir las condiciones establecidas en dichas definiciones. Una vez hecho esto, se formalizan las definiciones correspondientes. Las actividades están planeadas para implementarse en una sesión de 2 horas cada una, ya que se espera no solamente la interacción entre estudiantes de un mismo equipo sino también finalizar con una discusión grupal dirigida por el profesor, a manera de cierre.

La primera actividad propicia que el estudiante active sus conocimientos previos acerca de funciones biyectivas y sobreyectivas, diferenciabilidad y continuidad de funciones, transformaciones y mapeo, integral definida y coordenadas polares. Dada la función $f(x) = \sqrt{x} + 1$ y se pide a los equipos que: (a) resuelvan la integral $\int_1^4 (\sqrt{x} + 1)dx$ (en forma analítica) y que construyan la representación gráfica correspondiente (figura 1a), y (b) se propone que realice el cambio de variable $u = \sqrt{x}$, y que repitan los procedimientos anteriores (figura 1b).

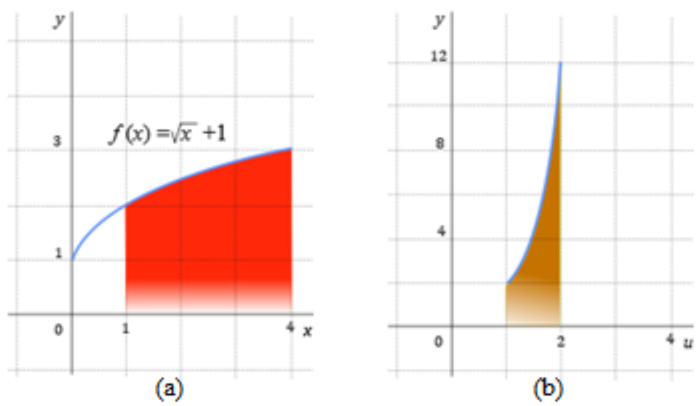

Figura 1. Sentido geométrico del cambio de variable en la función $f(x) = \sqrt{x} + 1$

Sobre esta base, cada equipo deberá analizar, discutir y argumentar cuál es el sentido geométrico del cambio de variable, es decir, cuál es el dominio de la segunda función ($u = \varphi(x) = \sqrt{x}$), cuáles serán los límites de integración pertinentes, si existe la función inversa. Otra cuestión de interés consiste en que los estudiantes argumenten si dicha transformación cumple con ciertas condiciones, por ejemplo inyectividad y sobreyectividad (figura 2).

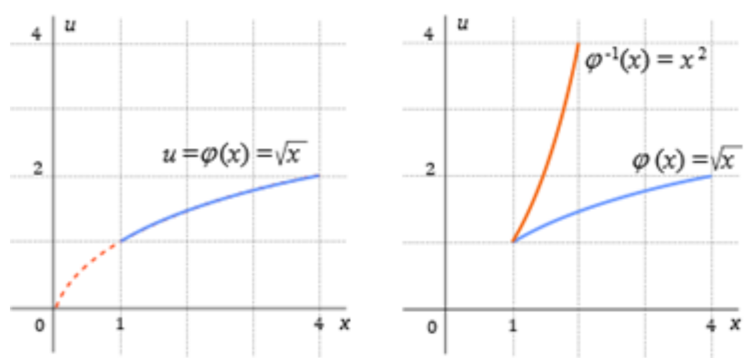

Figura 2*.* Algunas gráficas para el análisis de la función $u = \varphi(x) = \sqrt{x}$

Una vez que se ha discutido lo anterior, se pedirá analizar características de las transformaciones φ y φ^{-1} que contienen un grado mayor de abstracción como lo son la continuidad y diferenciabilidad. Para concluir el análisis de la aplicación $u(x) = \sqrt{x}$ definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se solicita que el estudiante verifique si es un homeomorfismo, de acuerdo a la siguiente definición:

“Si $T: X \rightarrow Y$ es continua y biyectiva, y si el mapeo inverso $T^{-1}: Y \rightarrow X$ es continuo y biyectivo, entonces, T es llamado homeomorfismo y X, Y son llamados homeomórficos” (Presley, 2012. p 68).

Los mapeos o aplicaciones pueden extenderse a otras dimensiones y no solo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para extender el análisis de éstas aplicaciones se propone como segunda parte de esta actividad, analizar el cambio a coordenadas polares. Se pide al estudiante que describa el conjunto de puntos (x, y) que se encuentran en la región R acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ (figura 3a). En este contexto, los estudiantes deberán expresar el punto (x, y) en coordenadas polares (figura 3b), mediante la transformación $x = r\cos t\,,\;\; y = r\sin t$.

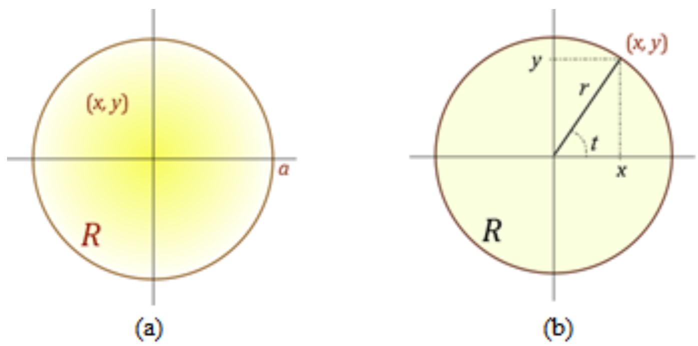

Figura 3. Transformación a coordenadas polares.

Una vez más se pide analizar características como la biyectividad, continuidad y diferenciabilidad de las relaciones $x = \varphi_1(r, t) = r\cos t\,, \qquad y = \varphi_2(r, t) = r\sin t$
Enseguida se solicita a los estudiantes que determinen las transformaciones inversas, esto es, escribir las variables r, t en términos de x, y. Nuevamente se solicita analizar la biyectividad, continuidad y diferenciabilidad de las relaciones $r = \phi_1(x, y), \qquad t = \phi_2(x, y)$ de acuerdo al dominio definido para estas variables.

Para establecer la condición de biyectividad en estas transformaciones la condición de biyectividad, se espera que el análisis de esta característica detone una discusión inicial entre los estudiantes que componen los equipos y que puede derivar en una discusión más amplia entre los estudiantes de todo el grupo. Esta aclaración no solo permite entender mejor el problema se espera que la estrategia de análisis derive e impacte cursos como Teoría del Cálculo II, Teoría Estadística y Análisis Complejo.

Se finaliza esta primera actividad pidiendo al estudiante que verifique si las transformaciones observadas son un difeomorfismo, de acuerdo a la siguiente definición: “Un mapeo suave $T: X \rightarrow Y$ que es biyectivo y cuya inversa $T^{-1}: Y \to X$ también es suave, es llamado difeomorfismo y los conjuntos X, Y son llamados difeomórficos" (Presley, 2012, p.83).

Cabe mencionar que se entiende como mapeo suave a la función T que tiene derivadas de orden k que son continuas en su dominio.

La segunda actividad pretende que los estudiantes analicen una transformación particular de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, la denominada proyección estereográfica, la cual se retomará en cursos posteriores.

La proyección estereográfica utiliza los polos norte $P_N = (0,0,R)$ y sur $P_S = (0,0,-R)$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ para proyectar una recta sobre el plano horizontal (figura 4). Por ejemplo, para proyectar la esfera desde el polo norte P_N hacia el plano horizontal, a cada punto con coordenadas rectangulares (x, y, z) en la esfera se asocia un punto en el plano horizontal con coordenadas (u, v), considerando la línea recta que pasa por el polo norte P_N y por el punto $p = (x, y, z)$. El punto asociado (u, v) del plano es aquel obtenido de la intersección de la recta mencionada y el plano, como se muestra en la figura 4.

En esta actividad se determina la relación que hay entre una superficie (esfera) y un plano que se extiende por medio de un punto, llamado punto al infinito y que corresponde al polo norte en la esfera P_N, y los estudiantes deberán verificar si esta aplicación es un homeomorfismo o un difeomorfismo. Se solicita a los estudiantes que construyan estas relaciones (representación analítica) de acuerdo a la geometría que se presenta.

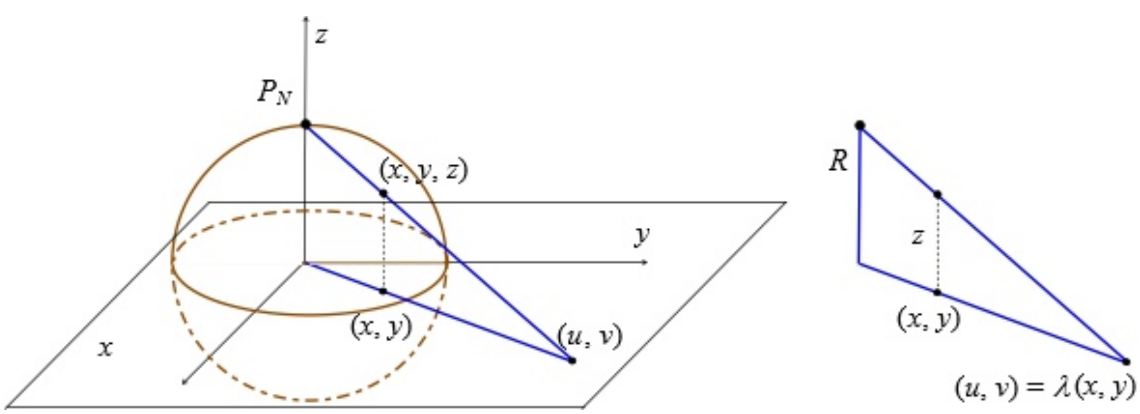

Figura 4. Proyección estereográfica (representación gráfica).

La actividad describe un conjunto de pasos que permiten al estudiante construir las relaciones $u = \varphi_1(x, y, z)$ y $v = \varphi_2(x, y, z)$ que asigna a cada punto (x, y, z) en la esfera, un punto (u, v) sobre el plano. Y las relaciones inversas $x = \phi_1(u, v)$, $y = \phi_2(u, v)$ y $z = \phi_3(u, v)$ que asignan a cada punto (u, v) en el plano, un punto(x, y, z) sobre la esfera. Con esta actividad se pretende activar conocimientos básicos previos, como lo es la congruencia de triángulos, vectores perpendiculares y paralelos, norma euclidiana, entre otros, para que los estudiantes construyan de las relaciones antes señaladas mediante el proceso de visualización.

El empleo de la computadora resulta importante para analizar el comportamiento de la proyección estereográfica, facilita a los estudiantes la manipulación de los recorridos sobre el plano cuando se traslada la recta desde alguno de los polos (figura 5).

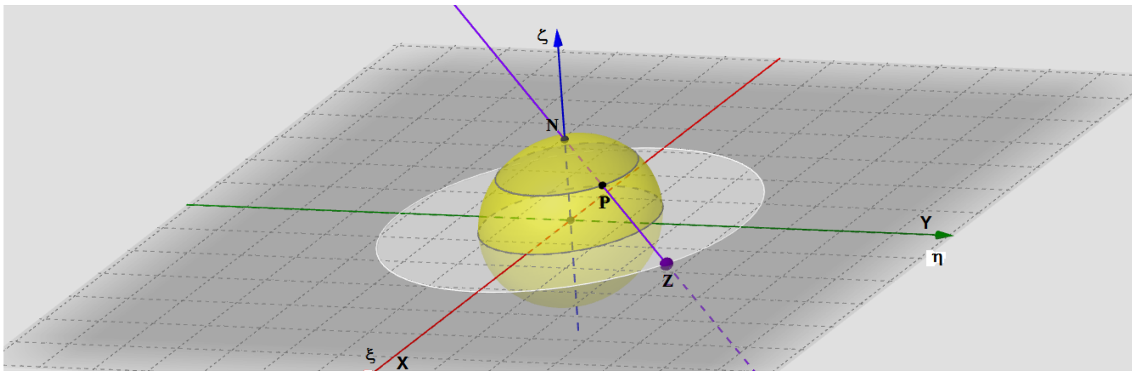

Figura 5. Proyección estereográfica con apoyo del programa computacional *GeoGebra.*

Una discusión grupal debe realizarse al terminar la actividad, así se puede analizar el impacto que tiene el uso del software y verificar si se ha logrado la construcción de los conceptos buscados.

Consideraciones finales

En nuestra experiencia docente, los estudiantes precisan de un largo tiempo para adquirir los conceptos de homeomorfismo y difeomorfismo, debido a su nivel de abstracción y complejidad. Por tal motivo, hemos identificado una "línea de tiempo" mediante la cual los profesores de Cálculo diferencial e integral, Introducción analítica a las geometrías, Geometría diferencial, Análisis real y Análisis complejo puedan resaltar las características y condiciones que implican dichos conceptos, abordadas desde cada una de estas ramas de las matemáticas y al nivel de conocimientos de sus respectivos estudiantes, sin perder la perspectiva global de la formación de los futuros matemáticos. Esta es la primera parte de un proyecto que pretende ampliar la presente propuesta para que, a largo plazo, pueda ser abordada, con las modificaciones pertinentes, en cada uno de los cursos mencionados.

En nuestra opinión, es necesario que los estudiantes construyan activamente los conceptos de difeomorfismo y homeomorfismo y por tal motivo hemos propuesto actividades de visualización tales que, para solucionarlas sea necesario activar los conocimientos previos de los estudiantes. Por otra parte, se propone el trabajo colaborativo para propiciar la interacción entre los estudiantes, lo cual es una parte importante en la construcción de los significados, así como en el desarrollo de las competencias profesionales que involucran construir argumentaciones matemáticas para interactuar con sus pares.

Referencias bibliográficas

Berger, M., Gostiaux, B. (1988). *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*. New York: Springer.

Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME 10(2),* 419-434.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos con ambiente de tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X(2),* 213-223

López, L., Alanis, A., Pérez, O. (2005). La habilidad ubicación especial matemática, como habilidad esencial, en la visualización matemática. En J. Lezama, M. Sánchez, y J. Molina (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 131-137. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pinsky, N. (2013). *Mathematical Knowledge for Teaching and Visualizing Differential Geometry.* Consultado el 20 de marzo de 2017 en http://scholarship.claremont.edu/hmc_theses/49

Presley, A. (2012). *Elementary Differential Geometry*. United Kingdom: Springer