

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN QUE SE HACEN EVIDENTES AL ESTUDIAR LA INVARIANTE DE CONWAY

Nicol Jenniffer Contreras Vargas, William Alfredo Jiménez Gómez, Adriana Lizeth Vega Carrillo
Universidad Pedagógica Nacional. (Colombia)

Resumen

El seminario de matemáticas de la Especialización en Educación Matemática cohorte 2016-I de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), abordó aspectos referentes a la teoría de nudos, tales como, el invariante de Conway. Además, el curso hizo énfasis en el estudio de las habilidades de visualización que emplea un individuo al desarrollar tareas propias de la actividad matemática, por lo que era de esperarse que surgiera la inquietud de identificar cuáles de estas habilidades empleaban los estudiantes al establecer dicha invariante. Este documento tiene como objetivo presentar los resultados encontrados en dicho análisis y las conclusiones que se establecieron al respecto.

Palabras clave: habilidades de visualización, nudo, polinomio de conway

Abstract

The mathematics course of Math Education Specialization (cohort 2016-I) at the National Teacher Training University from Colombia, tackled some aspects concerning the knots theory, such as Conway's invariant. Moreover, the course highlighted the study of the visualization skills that a person uses when carrying out recurrent tasks of the mathematical activity, from what it was obvious the interest in identifying which of these skills the students used to establish such invariant. The objective of this paper is to show the results found through the analysis and the conclusions set out in this respect.

Key words: visualization abilities, knot, conway polynomial

■ Introducción

La teoría de nudos tiene su génesis en la física y sus fundamentos en la topología, su desarrollo ha girado en general en torno a tres problemáticas, la primera, el estudio de la representación tridimensional del nudo en relación a otros tipos de representación (gráfica, verbal, simbólica o matricial); la segunda el estudio de la equivalencia entre un nudo y otro y la tercera referente a la clasificación de los nudos.

Un nudo es la abstracción matemática de la noción común que se tiene al respecto bajo algunos cambios, como por ejemplo no usar una cuerda sino un segmento y en vez de dejar los extremos de los segmentos separados, estos se unen para formar un ciclo infinito; algunos ejemplos de nudos se muestran en la figura 1.

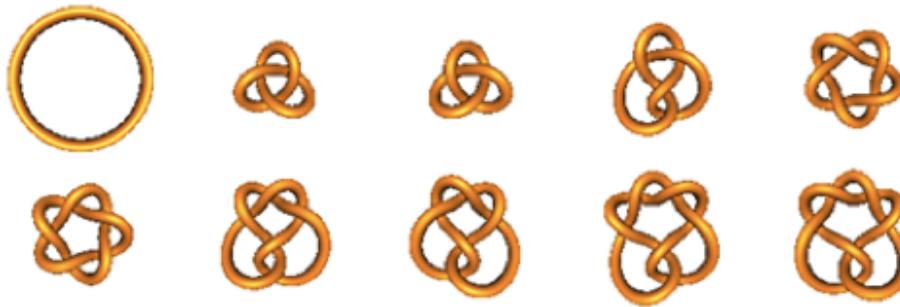


Figura 1. Representación gráfica de algunos nudos

La fama obtenida por este concepto (nudo) en los últimos siglos se debe a su utilidad Cisneros (2011), pues a lo largo de este tiempo la teoría ha ofrecido respuestas en diferentes campos de estudio, entre estos la física y el estudio del ADN; pasando de ser un tópico de las matemáticas, en un campo netamente conceptual, a brindar respuestas y servir de manera específica a diferentes ámbitos científicos como la genética y la física cuántica. Motivo por el cual se determinó trabajar con este concepto el marco del programa de formación de maestros mencionado anteriormente, en el cual se estudiaron algunas de las representaciones de los nudos y a partir de estas, el manejo de ciertas invariantes específicas (polinomio de Jones, de Alexander y de Conway). Además a lo largo del seminario se analizaron los procesos de los estudiantes a la luz de las habilidades de visualización que emplea un individuo al desarrollar cierto tipo de tareas propias de la actividad matemática, por lo que era de esperarse que surgiera la inquietud de identificar cuáles de estas habilidades empleaban los participantes del curso al establecer el polinomio de Conway de un nudo determinado.

■ Indagación bibliográfica

El marco de referencia de este trabajo está basado en dos aspectos fundamentales, visualización y teoría de nudos, a continuación se realiza un descripción acerca de cada uno de estos.

Visualización: la visualización es un camino para ver lo invisible Arcavi (2003), citado en Souto (2009, p. 19), cuyo uso es la interpretación, manejo y manipulación de conceptos y métodos para la solución de problemas (Souto, 2009). Desde la matemática, según Arcavi (1999), Duval (1999), Carrión (1998), citados en Jiménez, Rojas & Mora (2011, p. 5), la visualización es definida como el conjunto de procesos y habilidades de los sujetos para formar, trazar y manipular imágenes mentales o físicas, usándolas efectivamente para establecer relaciones entre objetos matemáticos. Las habilidades de visualización, se clasifican en psico-fisiológicas e intelectuales. Sin embargo las psico-fisiológicas no son consideradas en el análisis que se presenta en este documento puesto que para evidenciarlas se requiere de la presencia del individuo y el registro se hace complejo, a diferencia de aquellas enmarcadas en el aspecto intelectual que son evidenciables de forma escrita o en transcripciones. De las habilidades tenemos según Gutiérrez (1991):

- *Coordinación motriz de los ojos*: habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos.
- *Conservación de la percepción*: habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma, aunque deje de verse total o parcialmente.
- *Memoria visual*: habilidad para recordar características visuales y de posición, de un conjunto de objetos que estaban a la vista y que ya no se ven, o que se han cambiado de posición.
- *Identificación visual*: habilidad para reconocer una figura que ha sido aislada de su contexto.
- *Reconocimiento de posiciones en el espacio*: habilidad para relacionar la posición de un objeto con el observador o con otro objeto que actúa como punto de referencia.
- *Reconocimiento de relaciones espaciales*: habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
- *Discriminación visual*: habilidad de comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.

En relación a los procesos se pueden distinguir dos categorías asociados a la visualización, Del Grande (1990): *Procesamiento visual* (VP) e *Interpretación de información figurativa* (IFI). Dichos procesos se pueden entender como inversos en algunos casos, pero se deben considerar de forma independiente

- VP: Proceso de cambio de información abstracta en imágenes visuales o de imágenes visuales ya formadas, en otras.
- IFI: Proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales con el objetivo de extraer la información que contienen

En las siguientes líneas se dará un poco más en detalle el concepto nudo.

Teoría de nudos: de acuerdo con Azcurra (2008), desde la perspectiva intuitiva, es un trozo de cuerda que se puede torcer, doblar y manipular a nuestro antojo, para luego unir sus extremos de manera que no sea posible identificar dicha unión; la figura obtenida, representa un nudo que en términos matemáticos se define según Alemañ y Jornet (2011) como una curva continua, simple y cerrada en un espacio tridimensional Euclideo R^3 .

■ Resultados

Con el fin de identificar cuáles de las habilidades de visualización empleaban los participantes del seminario al resolver la tarea, se propuso analizar bajo la perspectiva de la visualización, una situación específica que consistió en determinar el polinomio de Conway de diferentes nudos, a continuación se presentan los resultados encontrados con un nudo específico (figura 2).



Figura 2. Nudo 1

La idea radica en pasar de la representación gráfica de un nudo a una representación polinómica, para lo cual se debe tener en cuenta la orientación de los cortes del nudo que pueden ser de dos tipos (figura 3).

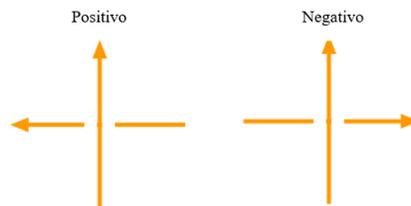


Figura 3. Clasificación de la orientación de cortes

A continuación (figura 4) se observa un nudo cuyo sentido de recorrido a partir del punto A, es en contra de las manecillas del reloj y la orientación de sus cortes se clasifica como positiva.

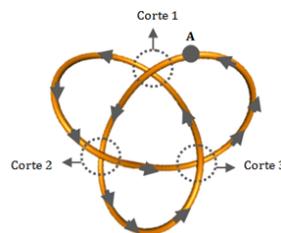
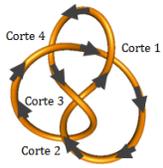
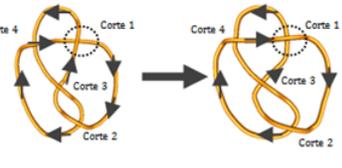
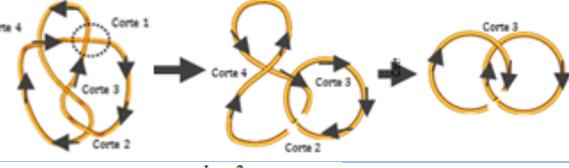
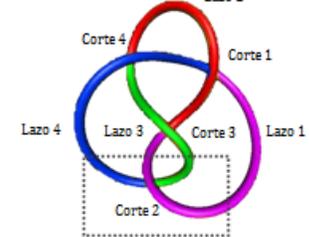
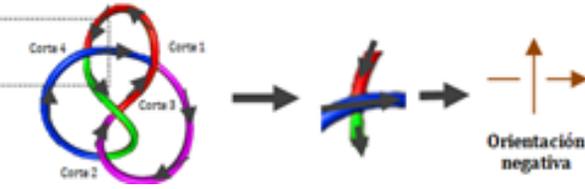


Figura 4. Ejemplo de nudo de tres cortes positivos

Ahora bien, la invariante tiene como objetivo establecer un polinomio que permita determinar la equivalencia entre un nudo y otro. En esta manera, es necesario partir del nudo original y centrar la atención en cada uno de sus cortes (uno a la vez) para aplicar reglas específicas, hasta obtener nudos triviales. Dichas reglas se resumen por un lado en cambiar la orientación del corte y por otro lado modificarlo de tal manera que el corte se rompa y se unan nuevamente las cuerdas, conservando siempre el sentido del recorrido.

Como se mencionó anteriormente, este análisis contempla únicamente las habilidades correspondientes a al aspecto intelectual del individuo, tal como se muestra a continuación (tabla 1).

Tabla 1. *Habilidades de visualización empleadas al determinar el polinomio de Conway del nudo 1*

| <i>Habilidad</i> | <i>Acción que da muestra de la habilidad</i> | <i>Ejemplo para el caso del nudo 1</i> |
|--|--|--|
| <i>Reconocimiento de posición</i> | Relacionar la ubicación de un corte con la ubicación de otro al momento de establecer la orientación del nudo y mantener así la continuidad de los mismos. |  |
| <i>Identificación visual</i> | Reconocer el cambio de sentido del corte escogido aislándolo del resto de la representación del nudo. |  |
| | Reconocer visualmente la unión de los lazos cuando se hacen rompimientos. |  |
| <i>Reconocimiento de relaciones espaciales</i> | Relacionar la representación plana de un corte con las características “por encima” ó “por debajo”. |  <p data-bbox="1161 1304 1365 1444">En el corte 2, el lazo 1 está por encima del verde el azul</p> |
| <i>Discriminación visual</i> | Comparar un corte con la imagen que lo relaciona con orientación positiva o negativa. |  |

■ Conclusiones

De acuerdo con el trabajo realizado, se evidencia que las habilidades de visualización que están generalmente ligadas a tareas del campo geométrico, trascienden a otras ramas de la matemática, particularmente la topológica que es donde se enmarca el tópico abarcado a lo largo del curso de la EEM.

El trabajo desarrollado en el seminario de matemáticas permite concluir que en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas avanzadas también pueden caracterizarse teorías dirigidas a las matemáticas escolares, específicamente para este caso, las habilidades de visualización.

■ Referencias bibliográficas

- Alemañ, R. Jornet, E. (2011). La fascinante matemática de los nudos. *Revista Números*, 76, 47 – 54.
- Azcurra, P. (2008). *Nudos virtuales e invariantes*. (Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires). Recuperado de <http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/azcurra.pdf>
- Cisneros, J. (2011). *Introduccionon a la teoria de nudos*. V jornadas de física y matemáticas Universidad Autonoma De Ciudad de Juarez. Juarez, 5-7.
- Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *Aritmethic Teacher*. 37(6), 14-20.
- Gutiérrez, A. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial*. Trabajo presentado en 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Valencia, España.
- Jiménez, W., Rojas, S., & Mora, L. (2011). *Características del talento matemático asociadas a la visualización*. Trabajo presentado en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.
- Souto, B. (2009). *Visualización en matemáticas un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas*. (Tesis de Maestría, Universidad de Granada). Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/invesmat/wp-content/uploads/2011/11/trabajo-master-curso-2008-09-blanca-souto.pdf>