

# LA MODELIZACIÓN EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE DE INGENIERÍA

Saúl Ernesto Cosmes Aragón  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)  
cosmes21@hotmail.com

## Resumen

Se presenta un avance de investigación de proyecto doctoral relacionado con la construcción de conocimiento matemático del estudiante de ingeniería frente a la modelización matemática. En la problemática mencionada se ha considerado el perfil de egreso requerido por diversas agencias acreditadoras de nivel nacional e internacional. Además se han realizado reflexiones relacionadas con la relación entre el ciclo de modelización de Blum y el Espacio de Trabajo Matemático (ETM). En una etapa actual se está indagando sobre el ETM de referencia en modelización a través del estudio de programas, entrevistas y revisión de documentos.

**Palabras clave:** modelización matemática, ciclo de modelización, ingeniería

## Abstract

This paper shows a preview of an ongoing PhD research project related to the construction of mathematical knowledge engineering students have face mathematical modelling. With this respect, the exit profile, required by several accreditation national and international agencies, has been considered. In addition, reflections related to the relationship between the modelling cycle of Blum and the Mathematical Doing Space (MDS) have been made. At the present stage, we are researching into the MDS of reference in modelling through the study of programs, interviews and document reviews.

**Key words:** mathematical modelling, modelling cycle, engineering

## ■ Introducción

La construcción de conocimiento matemático (CCM) a través de la modelización matemática (MM) ha sido ampliamente estudiada por diversos investigadores ((Mena (2016), Rodríguez (2016)), incluso existen programas de investigación consolidados en el área, aunque con perspectivas de modelación distintas, guardan similitud en cuanto a su pretensión de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Cordero (2016) introduce una perspectiva social a la CMM.

Diversos grupos de investigación en modelización matemática dan evidencia de la importancia de su inclusión en el currículo escolar pero sobre todo en el día a día del salón de clase, e.g en Blum (2015) se presentan las siguientes justificaciones:

- *Justificación pragmática*: la enseñanza de tareas vía la actividad de modelización debe ser enseñada explícitamente en el salón de clase, pues no se considera una transferencia instantánea de conocimiento extra matemático sólo por enseñar contenido matemático formal.
- *Justificación formativa*: el trabajo con actividades de modelización permite formar en el estudiante competencias sobre todo competencias de modelación y de argumentación basada en pruebas relacionadas con la realidad.
- *Justificación cultural*: que el estudiante visualice a la matemática como una ciencia útil depende de su relación con contextos extra matemáticos.
- *Justificación psicológica*: al trabajar con este tipo de tareas los estudiantes se sienten más interesados y motivados por crear matemática y ello permite un aprendizaje más duradero.

En nuestro trabajo se está interesado en investigar sobre la CCM mediante la relación entre la modelización y el conocimiento matemático (CM) en el estudiante de ingeniería. Se considera que el CM relacionado con la MM puede dar elementos para un conocimiento acorde a las exigencias de competencia matemática de un ingeniero.

Los elementos teóricos son los relacionados con investigar cómo es el *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM) en el dominio de la modelación en los sujetos de estudio. Al respecto nos planteamos como objetivo caracterizar el espacio de trabajo en estudiantes de ingeniería, que se activa con la modelización matemática, dicha caracterización se realizará en una asignatura correspondiente al eje de las ciencias de la ingeniería, específicamente en la asignatura de Mecánica de Sólidos. Los objetivos específicos que nos conducirán a lograr el objetivo antes planteado son: identificar las variables didácticas, cognitivas y epistemológicas relacionadas con el trabajo matemático vía la modelización así como estudiar el ETM personal del estudiante cuando es enfrentado a un problema de modelización.

### ■ La formación por competencias en el estudiante de ingeniería

Algunos elementos que nos permiten justificar la problemática de la CCM están relacionados con las competencias que son necesarias en un estudiante de ingeniería y futuro profesionista. Las exigencias que se perfilan en un egresado de ingeniería quedan establecidas por diversos organismos como por ejemplo CACEI en México, la Comisión Nacional de Acreditación en Chile o las relacionadas con el proyecto TUNING a nivel Latinoamérica.

En PISA se establece que un individuo posee competencia matemática si es capaz de reconocer el papel de las matemáticas en el mundo que le rodea y utilizarlas en el abordaje de distintos contextos. OECD (2013) declara que la noción de construcción de modelos es una piedra angular en la promoción del desarrollo del pensamiento matemático.

La formación matemática en ingeniería vía la modelización es una competencia matemática declarada por (SEFI, 2013), en la que menciona la importancia de formar al estudiante con capacidad tanto para el uso de modelos como para realizar el proceso de modelización matemática. Las dos componentes de modelización matemática mencionadas las describe de la siguiente manera:

This competency also has essentially two components: the ability to analyse and work in existing models (find properties, investigate range and validity, relate to modelled reality) and ability to perform active modelling (structure the part of reality that is of interest, set up a mathematical model and transform the questions of interest into mathematical question, answer the questions mathematically, interpret the results in reality and investigate the validity of the model, monitor and control the whole modelling process (p.14)

Para nuestra investigación se va a considerar la construcción del objeto matemático en un doble estatus, en el de objeto matemático propiamente y el estatus de herramienta de solución de situaciones. Para ello se relacionan dominios extra matemáticos con dominios intramatemáticos, como por ejemplo la relación de la modelización con objetos matemáticos correspondientes al cálculo diferencial e integral.

Para abordar la formación por competencias en el estudiante de ingeniería, donde la modelización matemática contribuya a dicha formación, se hace necesario vincular las asignaturas de matemática con las asignaturas de los ejes correspondientes a las ciencias de la ingeniería y/o ciencias del diseño (especialidad), tal vínculo no es una tarea fácil y presenta una brecha de investigación el caracterizar espacios de trabajo matemático en ejes de formación externos al eje de ciencias básicas. La necesidad de que antes mencionado se hace presente en (SEFI, 2013) que declara lo siguiente: “It is obvious that a strong link between those responsible for mathematical education and those who are in charge of proper engineering courses is decisive for achieving a good integration of mathematics into the engineering curriculum” (p.65)

El uso y la forma de los objetos matemáticos que forman parte la actividad del estudiante en el eje de ciencias de la ingeniería dista del uso y la forma de los objetos matemáticos aprendidos en las asignaturas de ciencias básicas, un ejemplo se tiene en el siguiente problema donde es considerada la situación de calcular la fuerza hidrostática sobre las paredes de un recipiente.

En un contexto puramente matemático en Flores (2008) se muestra uno de los objetos que a priori podrían ser utilizados cuando el alumno aborde la tarea, el de integral en una variable y su expresión para la evaluación de la integral de una función:

Si una función continua tiene una primitiva, entonces la integral de la primera sobre cada intervalo cerrado es igual a la diferencia de valores de la primitiva en sus extremos.

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva de  $f$ , es decir  $\frac{dg}{dx}(x) = f(x)$ . Entonces

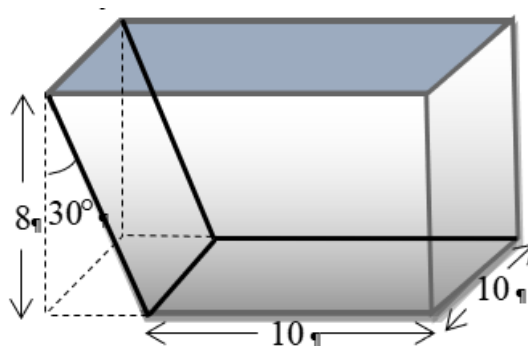
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{dg}{dx}(x)dx = g(b) - g(a)$$

Es importante aclarar que para nuestro trabajo consideramos que una situación en contexto no es, *per se*, una actividad de modelización (como si podría serlo por ejemplo para el grupo de modelización de la Teoría Antropológica de lo Didáctico o para el grupo de la Educación Matemática Realista), pues de acuerdo a lo planteado en Blum (20015) esta debe exigir una alta demanda cognitiva en el estudiante y esa demanda es producto de una serie de factores como por ejemplo la naturaleza de la tarea en sí misma, la cual debe ser real y de interés para el estudiante, además en el ámbito de la matemática la tarea debe permitir el trabajo con el modelo matemático planteado pero además se debe facilitar que la tarea permita

una continua vinculación entre la parte real y la parte matemática para de esa manera crear escenarios donde las situaciones de validación permitan al estudiante argumentar sus producciones y resultados.

Tomando en cuenta lo anterior y a reserva de lo que la tarea presentada pueda representar en cuanto a la modelización, un ejemplo de situación en contexto extramatemático, donde la necesidad del uso del objeto integral de una función es el propuesto en Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, Julio., Garza, José (2012) se presenta a continuación

Un estanque lleno de agua tiene una de sus paredes inclinadas, formando un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical, como se muestra en la siguiente figura, la profundidad del estanque es de 8 metros y su base es cuadrada con 10 metros de lado.



*Fig. 1.* Recipiente conteniendo el líquido (Salinas, et. Al, 2012)

La tarea anterior necesita que el estudiante modele primero la función matemática que le permitirá posteriormente, a través del teorema fundamental del cálculo, calcular el cambio acumulado de la magnitud fuerza hidrostática sobre las diversas paredes del recipiente mostrado.

### ■ Elementos teórico-metodológicos

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) es un modelo teórico desarrollado por Kuzniak y Richard (2014). El ETM se precisa con el objetivo de comprender mejor lo que desde un punto de vista didáctico, se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un marco escolar. El espacio concebido de esta manera designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos. Dicha organización permite transitar entre dos niveles: uno epistemológico donde se hacen presentes elementos como el representante, los artefactos y el referencial teórico y un plano cognitivo compuesto por la visualización, la construcción y la prueba.

Con el objetivo de describir el trabajo matemático en un marco escolar los ETM se clasifican en ETM de referencia, ETM personal y ETM idóneo.

- ETM de referencia: Está compuesto por las matemáticas que pertenecen a la institución y que idealmente provienen de la matemática formal

- ETM idóneo: Es un espacio de trabajo diseñado y construido por un experto, de tal manera que sea apto para su uso por utilizadores potenciales. Depende de una institución y debe ser definido con base en la manera en que este saber se enseña
- ETM personal: Es el espacio de trabajo donde en una determinada institución escolar, un estudiante o profesor atiende un problema matemático. Está condicionado al conocimiento y las capacidades cognitivas del sujeto que lo atiende.

Para comprender el proceso de aprendizaje matemático que estamos proponiendo consideramos la interacción (o ciclos) del modelo de los ETM con el modelo de Blum adaptado en (Borromeo, 2013). La interacción está pensada debido a que suponemos que en el momento en que el estudiante aborda la situación ocurrirá un proceso de matematización horizontal que sirve de base para llevar la situación problema al campo de la matemática de manera que dentro de este campo ocurre un proceso de matematización vertical, que es donde ocurre un proceso de interacción entre el ciclo de Blum y el modelo del Espacio de Trabajo Matemático.

Los diferentes pasos teóricos del proceso de modelización considerando lo anterior quedaría compuesto por las fases que se muestran a continuación. Es importante considerar que son fases teóricas del proceso de modelización donde se está en el supuesto de la interacción entre los modelos mencionados.

Una primera interacción (flechas azules de la figura 2) entre el modelo de Blum y ETM sucede cuando el estudiante inicia el proceso de matematización vertical, en esta fase se produce la activación de las génesis semiótica e instrumental, en ella el estudiante trabaja matemáticamente con el modelo, desarrolla y trabaja en la construcción de representaciones.

Una segunda interacción (flecha roja de la figura 2) entre ambos modelos ocurre una vez el estudiante ha trabajado con las representaciones donde contrasta sus resultados obtenidos en el trabajo matemático con la situación real, para de esta manera interpretar y validar sus resultados. En esta fase a priori se considera que el estudiante se dirige al modelo de Blum desde el plano semiótico-instrumental.

En un sentido de refinamiento de su proceso de validación entre el espacio de trabajo matemático y su contraste con la situación real teóricamente puede suceder una interacción en la que el estudiante se vea en la necesidad de regresar a trabajar en la matematización vertical dirigiéndose al plano instrumental-discursivo. En esta fase (flecha verde de la figura 2) se espera que el razonamiento matemático se dé una mayor manera y la activación de la génesis discursiva permita refinar su validación matemática.

En una cuarta fase (flecha café de la figura 2) se espera que el estudiante regrese de nuevo a la situación real pero esta vez estaría dirigido desde el plano semiótico- discursivo.

Las fases del proceso de interacción quedan esquematizadas en la siguiente figura

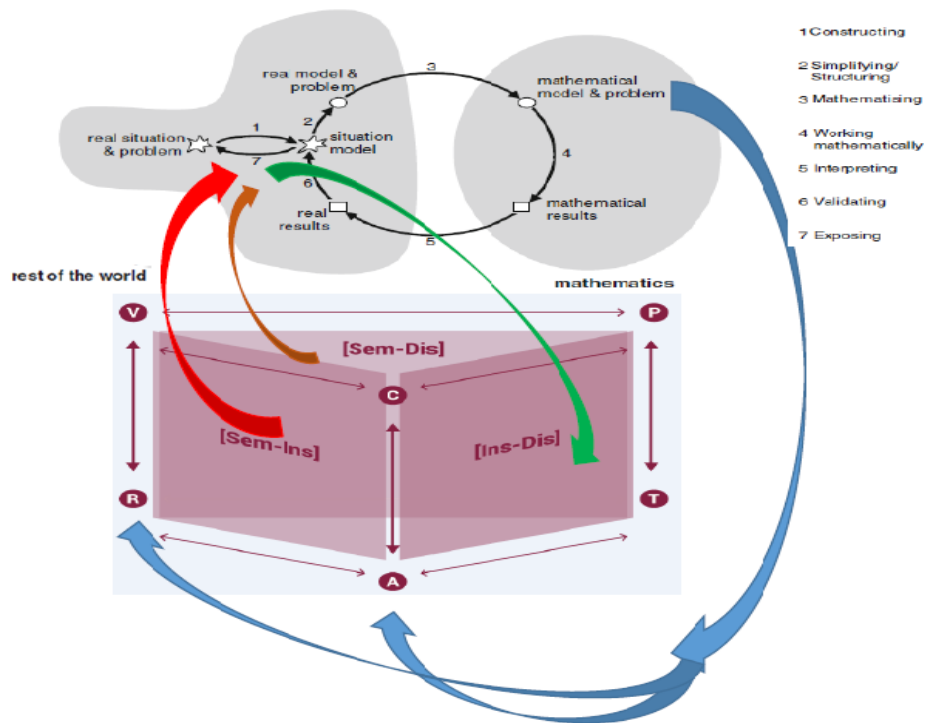


Fig. 2 Trayectoria hipotética de interacción entre el modelo de Blum-Borromeo y el modelo de los ETM

La metodología utilizada para llevar a cabo la investigación es de tipo cualitativa, a través del estudio de caso, específicamente en estudiantes de ingeniería Civil de una universidad chilena. Primeramente se ha realizado un revisión bibliográfica para la construcción del problema a investigar, posteriormente y con base a las consideraciones teóricas se ha indagado con respecto al ETM de referencia en modelización del caso seleccionado, posteriormente se construirá un ETM idóneo a través del diseño de una secuencia de aprendizaje, dicha secuencia permitirá indagar en el ETM personal del estudiante, a continuación se realizará una validación interna tanto de la secuencia de aprendizaje experimentada a través de una confrontación a priori y a posteriori así como de la investigación en general a través de una triangulación de investigadores.

### ■ Reflexión final

Los elementos presentados nos permitirán levantar información y dar evidencia de cuáles son los problemas de modelización que están presentes en la formación profesional del ingeniero. Así mismo las consideraciones teóricas que se han estudiado nos brindarán de elementos para diseñar una propuesta que permita generar tareas a partir de la actividad desarrollada por los sujetos de estudio con base a la modelización en su formación como ingeniero.

Además del estudio del ETM personal, la investigación nos permitirá aportar en el modelo teórico relacionado con el ETM en modelación.

## ■ Referencias bibliográficas

- Alpers, B.A., Demlova, M., Fant, C.H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L. et al. (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education. A report of the mathematics working group*. Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI).
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12 th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). New York, NY: Springer.
- Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal for Mathematics Education at Teachers College*, 4, 18-24.
- CACEI. (2014). Marco de Referencia para la Formación de los Programas de Ingenierías. Cd. de México, México.
- CNA (2016). Criterios de evaluación para carreras de ingeniería. Santiago-Chile. Recuperado de: <http://www.cnachile.cl>
- Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: El eslabón de la matemática y el cotidiano. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 139–162). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.
- Flores, R., Valencia, M., Dávila, G., García, M. (2008), *Fundamentos del Cálculo*, Hermosillo, Sonora, México: Editorial Garabatos.
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 17 (pp. 29-39). Cd. de México, México.
- Mena, J. (2016). Modelación matemática y la construcción de conocimiento matemático. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 139–162). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.
- Proyecto Tuning Latinoamérica (2013). Educación Superior en América Latina: Reflexiones y perspectivas en Ingeniería Civil. En A. Guerrero (Ed.), Bilbao: Universidad de Deusto.
- Rodríguez, R. (2016). Enseñanza y aprendizaje de la modelación desde y para la formación de ingenieros. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 163–193). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.
- OECD (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-em>
- Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, Julio, Garza, José. (2012), *Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos*. Tomo II, Cd. México, México: Cengage Learning Editores.