VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

EL PROCESO LÓGICO DE VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS EN EL ESQUEMA ARGUMENTATIVO DE LA DEMOSTRACIÓN

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Alejandra Cañibano, Patricia Sastre Vázquez
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Facultad de Agronomía. Campus Azul), Pontificia Universidad Católica Argentina (Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario), Instituto de Educación Superior N°2. Instituto de formación técnica superior N°19. (Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com, monireal@gmail.com, mac@gmail.com, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar cómo el estudiante universitario utiliza las hipótesis de una proposición verdadera en el proceso de verificación y en el de demostración. Se analizaron las producciones de un grupo de estudiantes universitarios, a quiénes se les propuso la verificación y demostración de dos teoremas. En el esquema argumentativo de la demostración, los estudiantes al momento de utilizar teoremas ya establecidos omiten el chequeo de hipótesis necesarias para su aplicación, procediendo de forma similar en el proceso de verificación, observándose que proponen un ejemplo que satisface la tesis sin efectuar la comprobación de hipótesis.

Palabras clave: conocimiento lógico, verificación de hipótesis

Abstract

The objective of this paper is to analyze how the university student uses the hypotheses of a true proposition in verification and demonstration processes. We analyzed the performances of a group of university students, who were asked to verify and demonstrate two theorems. In the argumentative scheme of the demonstration, students, when using established theorems, omit the verification of the hypotheses needed for the application of the theorems, proceeding in a similar way in the verification process, what let us observe that they propose an example that satisfies the thesis without making the hypothesis testing.

Keywords: logical knowledge, verification of hypotheses

Introducción

El estudiante universitario de ingeniería requiere en su currículum, matemática como una herramienta que debe permitirle desarrollar por un lado el pensamiento lógico y por otro, capacidad heurística sustentada en un contenido teórico. La demostración está implícita en cualquier curso universitario de matemática. De hecho, esto lleva a que el estudiante usualmente deba reproducirlas en los exámenes como uno de los requisitos para la acreditación del curso. Esta reproducción es en general de tipo ritual, pero esto puede evitarse generando un aprendizaje constructivo de la demostración. Aprender a demostrar no es un contenido cualquiera, es una destreza que es propia de un matemático profesional y que tiene poco sentido exigirle a un estudiante inicial. Es esperable la comprensión, interpretación y explicación de las mismas. La importancia de las hipótesis de una proposición a demostrar y su intervención en las diferentes partes que hacen a la cadena argumentativa de la prueba es trascendente para su comprensión. Cuando los estudiantes no pueden comprenderlas, se apropian de ellas como pueden y reproducen una versión de la prueba compulsiva y memorizada.

De forma muy adecuada, Perry, Samper, Camargo, Echeverry & Molina (2008), manifiestan este hecho referenciando al acto de aprender a demostrar cómo el acto participativo que tienen los estudiantes que realizan cierto curso de matemática y la actividad demostrativa implícita en el mismo. D´Andrea, Curia & Lavalle (2012) proponen una ingeniería didáctica que busca atenuar el problema del estudiante de Ciencias Naturales e Ingeniería frente a la demostración matemática. En esta ingeniería impera la idea de que la demostración de una proposición verdadera no garantiza de forma absoluta la comprensión de la misma, sosteniéndose esencialmente en las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial, visual y simbólico. Proponen una serie de estrategias didácticas que se traducen en una secuencia de tareas a los efectos de generar un aprendizaje comprensivo; significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas específicas. La secuencia de tareas le confiere un papel preponderante al proceso de verificación en el contexto de la tarea de validar una proposición verdadera o teorema a demostrar. Luego de presentarse la proposición a demostrar, la secuencia de tareas consiste en la interpretación coloquial, verificación, visualización (que puede ser su interpretación geométrica) y finalmente la simbolización de la proposición a demostrar. Estos escalones deben ser desarrollados previos a la prueba con el objeto de facilitar la comprensión de la proposición, ya que no tiene sentido un trabajo argumentativo sin la debida comprensión del significado de lo que se quiere probar. El proceso de prueba es inducido a través de la denominada "*Guía Secuenciada*" que consiste en un instructivo general para que el estudiante pueda llevar a cabo la secuencia argumentativa razonando sin apelar a la memoria y la repetición. El proceso lógico de verificación es la primera instancia que el estudiante universitario aborda como una instancia anterior a la protoargumentación, pero lo hace sin ser consciente de ello. Según Balacheff (2000) a esta postura se la denomina empirismo ingenuo. Esta acción procede simplemente desde la intuición y al momento de realizar una verificación, el estudiante universitario de Ingeniería realmente no sabe cómo proceder. Lo hace buscando ejemplos aleatorios 'que funcionen', sin criterio. Lo precedentemente descripto denota dos cuestiones epistemológicas importantes. Por un lado, la confusión del estudiante frente a las acciones de demostrar y verificar. Por otro lado, el desempeño en la actividad de realizar verificaciones, que no es llevada a cabo adecuadamente sino a través de un 'tanteo', pero sin un sostén apropiado y un conocimiento consistente de lo que se está realizando. ¿Será conocida la palabra verificación por el estudiante? Y en tal caso, ¿Se comprenderá la palabra en el contexto epistemológico de la Ciencia Matemática, por lo menos de forma primitiva? "*Verificar una proposición matemática verdadera es exhibir un ejemplo que compruebe para ese caso particular que la proposición se cumple*". (D´Andrea et al, 2012).

Un test piloto realizado en un grupo de ingresantes a Ingeniería, corrobora este desconocimiento. Se le propuso al grupo mencionado que en una tabla de doble entrada vincularan la significación de una serie de términos que hacen a la epistemología de la Ciencia Matemática. Resultó notable que la palabra ejemplo, de un uso tan cotidiano y habitual, fuera solamente reconocida en un 50% aproximadamente de la muestra analizada. (Sastre Vázquez & D´Andrea, 2011)

La supresión de desarrollos teóricos en el ciclo medio ha limitado la cursada en este estadio, a la realización de una práctica consistente en ejercicios donde la única dificultad que poseen es la aplicación de un algoritmo concreto, sin que medie la reflexión y la justificación de los procedimientos. Esto lleva a que el proceso de maduración intelectual, se retrase, de modo que el ingresante universitario, se encuentra con un universo diferente al del ciclo medio. Los cursos universitarios de Matemática requieren del sustento de la teoría para realizar la práctica, hábito no desarrollado en el ciclo medio, donde según expresión textual del estudiante: 'Matemática es sentarse a hacer ejercicios'. Esta praxis, tan alejada del método matemático, persiste en la estructura mental del estudiante, aún al ingresar a la Universidad y luego de un tiempo de estancia en esta e inclusive luego de recibir instrucción sobre la forma adecuada de trabajo en Matemática, predominando así un conocimiento ingenuo (Perkins, 1995). Esta actitud puede ser debida a que, aún cuando pueda parecer que los estudiantes conocen la prueba de una proposición matemática verdadera no axiomática, siguen sintiendo la necesidad de una verificación. (Vinner, 1983).

Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación – inclusive después de realizada la demostración – porque precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada. Más allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez, necesitan de controles posteriores (Fishbein, 1982). La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento del estudiante. Wason y Mason (2005) establecen como definición de ejemplo, a un procedimiento a partir del cual el estudiante podría establecer una generalización y definen al proceso de ejemplificación, como la representación de una categoría genérica con la que el estudiante necesita entrar en contacto para extraer un caso particular. Lo que se postula a través de estas aproximaciones es precisamente establecer que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a la generalización. Esta, permite la abstracción de situaciones concretas, constituyéndose en el puente para la construcción de argumentaciones. La elección adecuada de ejemplos y contraejemplos y la guía del docente en tal búsqueda en las instancias iniciales, constituiría un disparador para la producción de demostraciones. Lo postulado hasta el momento hace referencia a la verificación como un proceso de exhibición de ejemplos simples que hagan verdadera a la proposición para ese caso particular, que es el ejemplo propuesto. Particularmente nos proponemos en este trabajo indagar sobre el proceso lógico de verificación de hipótesis.

El objetivo de este trabajo es analizar cómo el estudiante universitario utiliza las hipótesis de una proposición verdadera en el proceso de verificación y en el proceso de demostración.

La cuestión se enfoca específicamente a la siguiente situación: Una proposición que tiene la estructura lógica de implicación o condicional y su antecedente, que constituye la hipótesis de la proposición posee varias condiciones o proposiciones conectadas a través de una conjunción, y se requiere para el establecimiento de su validez que el antecedente sea verdadero para la concreción de la verdad de la tesis. De manera entonces que el problema de verificación de hipótesis es un problema mayor que trasciende la acción de verificar como la exhibición de un ejemplo que 'encaje' como caso particular de una cierta proposición.

Consideremos a continuación los dos teoremas siguientes:

Teorema del valor intermedio de las funciones continuas: f una función continua en $[a,b]$ y sean $x_1, x_2 \in (a,b)/x_1 < x_2 \, y f(x_1) \neq f(x_2)$ y considérese un valor $k/f(x_1) < k < f(x_2) \Rightarrow \exists c \in (a,b)/f(c) = k$

Verificar el teorema en cuestión, equivale a exhibir como ejemplo, una función continua en un cierto intervalo cerrado y encontrar dentro de este intervalo un par de valores tales que satisfagan lo siguiente: los valores deben estar en la relación de menor estricto y las imágenes de la función escogida en estos valores deben ser distintas y debe escogerse un valor arbitrario k de la imagen que oscile entre los dos valores de imagen diferentes. Bajo estas condiciones es posible verificar la tesis de manera inmediata, pero todas las hipótesis (condiciones) expuestas deben cumplirse inexorablemente. Esta cuestión también se requiere para el proceso de prueba, ya que la función auxiliar que se propone para concretar tal proceso requiere del cumplimiento de todas las hipótesis descriptas para poder aplicarle el teorema de Bolzano, lo que permite en tal caso, la concreción de la tesis. Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Teorema de Lagrange:
f $c$ontinua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces $\exists$ c $\in (a,b)/f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$.

Las hipótesis a satisfacerse en este teorema no son tantas como en el teorema del valor intermedio de las funciones continuas, pero necesarias que se cumplan para el establecimiento concreto de la tesis.

Experimentación

La parte experimental de este trabajo se realizó durante dos momentos diferentes de un curso anual de Cálculo I, es decir, un curso de Cálculo en una variable. El primer momento se ubica en la unidad didáctica correspondiente a Límite y Continuidad y el segundo se ubica en la unidad didáctica correspondiente a las Aplicaciones del Cálculo Diferencial. Se les pidió a los estudiantes que primero verificaran y luego demostraran dos teoremas clásicos del Cálculo. La escogencia no fue al azar. La prueba puede llevarse a cabo de una manera simple por el estudiante que habiendo llegado a esos contenidos tiene cierto entrenamiento

Mientras se desarrollaba la unidad didáctica de Límite y continuidad, el teorema del valor intermedio de las funciones continuas y mientras se desarrollaba la unidad didáctica de Aplicaciones del Cálculo Diferencial, el teorema de Lagrange o valor medio del Cálculo Diferencial. La idea de pedirles a los estudiantes que verificaran y que luego demostraran fue para comparar el proceso de comprobación de hipótesis en diferentes contextos: uno concreto como es el proceso lógico de verificación y otro abstracto como es el proceso de prueba. La muestra analizada fue de 92 estudiantes ingresantes realizando un curso anual de Cálculo en una variable. Los trabajos analizados fueron producciones realizadas por los estudiantes en clase, de manera que no hubo una convocatoria para la realización del trabajo. Se les hizo la propuesta en clase y se recogieron las producciones pidiéndoles a los estudiantes que con sus dispositivos móviles les tomasen una instantánea a sus trabajos, de modo de poder cotejar su trabajo con la exposición posterior del profesor en el pizarrón, además de tener bien presente lo realizado para intervenir en el debate que se generó a partir de la resolución colectiva en clase. La categorización para las respuestas fue la siguiente:

Para el ítem a. de verificación:

Completa: El estudiante realizó la verificación partiendo de la hipótesis y verificando todos los supuestos necesarios en el ejemplo propuesto de forma que este satisfaga la tesis.

Incompleta o parcial: El estudiante realizó la verificación partiendo de la hipótesis y verificando algunos de los supuestos necesarios en el ejemplo propuesto.

Sobre la tesis: El estudiante realizó la verificación aplicando el resultado de la tesis sobre el ejemplo propuesto sin realizar la verificación de hipótesis.

Inconsistente: El estudiante presenta el ejemplo pero sin realizar el proceso de verificación.

Nula: El estudiante no realiza el proceso de verificación ni presenta ejemplo.

Para el ítem b. de prueba:

Prueba completa: El estudiante realiza la prueba, arribando a la tesis por aplicación del teorema indicado en la guía secuenciada previa verificación de las hipótesis del teorema a aplicar sobre la función auxiliar propuesta que permite alcanzar la meta.

Prueba incompleta sin verificación de hipótesis: El estudiante realiza la prueba, aplicándole el teorema indicado en la guía secuenciada sin la verificación de las hipótesis del teorema a aplicar sobre la función auxiliar propuesta que permite alcanzar la meta.

Prueba incompleta con verificación parcial de hipótesis: El estudiante realiza la prueba, aplicándole el teorema indicado en la guía secuenciada con una verificación parcial de las hipótesis del teorema a aplicar sobre la función auxiliar propuesta que permite alcanzar la meta.

Empirismo ingenuo – clasificación extraída de Ballacheff (2000) –: El estudiante se limita a exhibir un ejemplo aleatorio, sin chequeo de hipótesis, considerando esta acción como mecanismo de prueba.

Nula: El estudiante no realiza el proceso de prueba.

Las consignas de los dos ejercicios se detallan a continuación:

Ejercicio 1:

Considerar el Teorema del valor intermedio de las funciones continuas. Se pide: a. Verificarlo. b. Probarlo. Sugerencias para la prueba: Considerar la función auxiliar $g(x) = f(x) - k$ y aplicarle el teorema de Bolzano previa verificación de las hipótesis.

Ejercicio 2:

Considerar el Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Teorema de Lagrange. Se pide: a. Verificarlo. b. Probarlo. Sugerencias para la prueba: Considerar la función auxiliar $h(x) =$

$f(x)(b-a)-x.[f(b)-f(a)]$ y aplicarle el teorema de Rolle en el intervalo del dominio de la función planteada por la hipótesis, previa verificación de las hipótesis de Rolle.

Resultados

Tabla 1: *Resultados respuestas a ejercicio 1.a*

Tipo de Respuesta	Número de Estudiantes	Porcentajes
completa	7	
Incompleta o parcial	10	
Sobre la tesis	37	
inconsistente	20	
Nula	18	

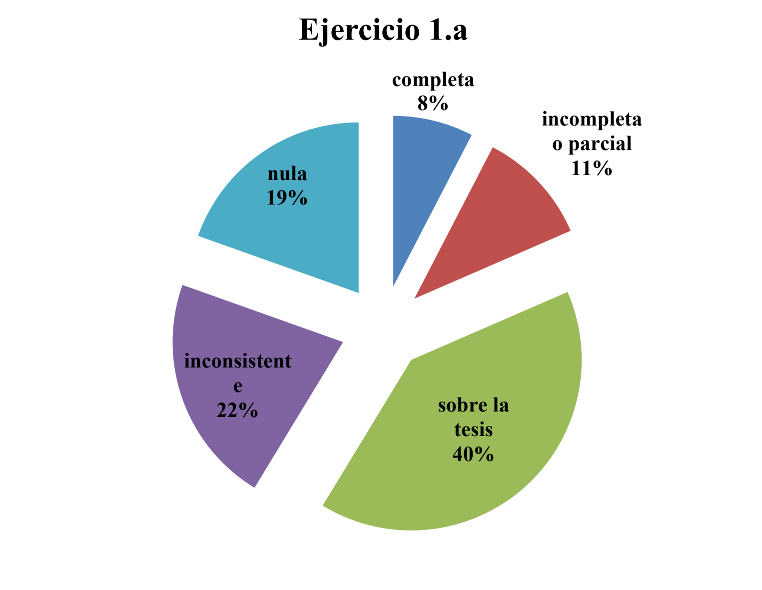
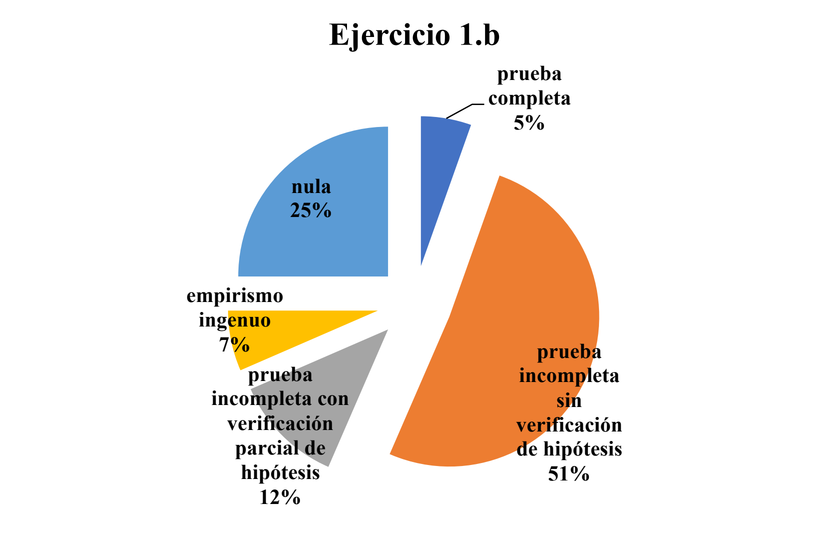


Tabla 2: *Resultados respuestas a ejercicio 1. b*

Tipo de Respuesta	Número de Estudiantes	Porcentajes
Prueba completa	7	
Prueba incompleta sin verificación de hipótesis	47	
Prueba incompleta con verificación parcial de hipótesis	11	
Empirismo ingenuo	6	
nula	23	



Observación: Por razones de espacio no se incluyen los resultados del ejercicio 2, siendo los porcentajes obtenidos bastante similares a los del ejercicio 1.

Conclusiones

El procedimiento llevado a cabo por el estudiante, en general, fue el que se describe a continuación con uno de los dos teoremas propuestos. Consideremos el ejercicio 1: Con el teorema de Lagrange, en general (obsérvense los resultados obtenidos) el estudiante cuando lo verifica, propone un ejemplo, aplica el teorema al ejemplo pero lo hace sin comprobar previamente las hipótesis que se requieren para que se cumpla la tesis. En el proceso de prueba, debe aplicar el Teorema de Rolle a una función auxiliar para poder llegar a establecer el resultado de Lagrange. Aplica el resultado de Rolle directamente a la función auxiliar, pero sin chequear las hipótesis que son las que posibilitan la concreción de su tesis. Este tipo de respuesta es la que predominó en las producciones de la muestra de estudiantes analizada. Aproximadamente un 15% de los estudiantes realizaron las acciones esperadas tanto para la verificación como para la demostración. Muy pocos casos solo realizaron la comprobación de hipótesis para la verificación y no para la prueba. En el caso último ocurrió o porque no realizaron la prueba o al realizarla, obviaron la comprobación de hipótesis.

En general, el estudiante opera como si no comprendiera que la tesis de un teorema se concreta bajo ciertas hipótesis. Va al resultado, sin importarle las condiciones bajo las cuales se produce ese resultado. El estudiante tiene fuertes creencias sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje 'en hacer ejercicios' en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente. La verificación resulta un método usual de la vida cotidiana y las ciencias fácticas, y probablemente la actitud esté asociada a este hecho. Se presume que el proceso de verificación de hipótesis pueda ser ignorado por lo enunciado, ya que, por ser un método usual, este se limita a aplicar el resultado concreto, ignorando la importancia que revisten las hipótesis que sostienen a la tesis. Esto es concordante con el empirismo ingenuo postulado por Balacheff (2000). La elección de ejemplos es aleatoria y sin criterio. Este proceso se extrapola también en la cadena argumentativa de una prueba. A los efectos de sanear estos problemas, juega un papel trascendente la formación del Profesorado para la comprensión y aplicación dela epistemología propia de esta Ciencia ya que no basta con que el profesor de Ciencias en general y de Matemática en particular conozca muchísimos contenidos sobre la ciencia sino que conozca más allá de tales contenidos y comprenda a estos desde la filosofía, la historia y su didáctica específica. Los resultados obtenidos y el debate realizado en clase, llevan a observar que el estudiante cuando se enfrenta a una propiedad cuya estructura lógica es la de una implicación, les interesa solo el resultado, es decir, ignoran la importancia que revisten la o las hipótesis. Piensan que el resultado o la tesis de la propiedad opera independientemente de las hipótesis. Esto necesita de una educación en la epistemología de esta ciencia, no con una educación bourbakiana, que poco tiene que ver con los tiempos que corren de la posmodernidad, pero requiere que el estudiante conozca el lenguaje y el método que le es propio a esta ciencia, que se insiste, tiene mucho que ver con el conductor del aprendizaje, las ideas que imprima en el estudiante y sus propias creencias y su propia formación.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes.

D´Andrea, R.E., Curia, L. & Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics.* 3(2), 9 – 24.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education.* 31(4), 396 – 428.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Barcelona: Gedisa.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., & Molina, Ó. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En Cano, Alfredo; Contreras, Fidel; Olvera, Ernesto (Ed.), Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: "Innovando la enseñanza de las matemáticas" (pp. 1-18). Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Sastre Vázquez, P. & D´Andrea, R.E. (2011). Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería. En: Borsa, E., Irassar, L., Pavioni, O. (Ed.). *Anales XVI EMCI (Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería) Nacional y VIII Internacional.*Olavarría: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Vinner, S. (1983). The notion of proof some aspects of students' views at the senior high level. En: R. Hershkowitz, ed. *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 289 – 294). Shoresh, Israel.

Wason, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.