VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

PROCEDIMIENTOS LÓGICOS DE VALIDACIÓN Y CUANTIFICACIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Alejandra Cañibano, Patricia Sastre Vázquez
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Facultad de Agronomía. Campus Azul), Pontificia Universidad Católica Argentina (Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario), Instituto de Educación Superior N°2. Instituto de formación técnica superior N°19. (Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com, monireal@gmail.com, mac@gmail.com, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen

El presente trabajo pretende determinar el grado de conocimiento intuitivo sobre el proceso lógico de cuantificación y validación que poseen estudiantes ingresantes a carreras de Ingeniería. Se realizó un trabajo de campo con estudiantes ingresantes a carreras de ingeniería, consistente en la propuesta de dos consignas. Ambas proponían la determinación y justificación de los razonamientos utilizados para la escogencia del valor de verdad de dos proposiciones, una cuantificada universalmente y la otra, existencialmente. Los resultados mostraron solo cierto grado de intuición, que si se direcciona adecuadamente puede ser un disparador para el desarrollo de procedimientos lógicos asociados a razonamientos.

Palabras clave: conocimiento lógico, proceso de cuantificación y validación

Abstract

The present work aims to determine the degree of intuitive knowledge about the logical process of quantification and validation that students who are newcomers to engineering degree courses have. A fieldwork was carried out with newcomers to engineering degrees courses, consisting of the proposal of two slogans. Both of them proposed the determination and justification of the reasoning used to choose the truth value of two propositions, one universally quantified, and the other existentially quantified. The outcomes showed only a certain degree of intuition, which if properly addressed, can be a trigger for the development of logical procedures associated to reasoning.

Key words: logical knowledge, process of quantification and validation

Introducción

El presente trabajo forma parte de un Proyecto de Investigación que se realiza de manera conjunta entre dos facultades de Argentina: Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), en Azul, provincia de Buenos Aires y la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica Argentina, Campus Rosario (PUCA), en Rosario, provincia de Santa

Fe. El objetivo de la investigación es identificar e interpretar los procedimientos lógicos y los cognitivos lingüísticos que utilizan estudiantes universitarios de Ingeniería.

Los procedimientos lógicos están íntimamente ligados al conocimiento de cuestiones esenciales de Lógica Simbólica. Toda proposición matemática está referida a algunos o a todos los elementos de un cierto universo. Esa referencia significa que la función proposicional que involucra la proposición puede estar cuantificada universal o existencialmente.

El objetivo de este trabajo es determinar el grado de conocimiento intuitivo acerca de los procedimientos lógicos de cuantificación y validación que poseen los estudiantes que ingresan a Carreras de Ingeniería.

Bell (1976) se propuso analizar los intentos de los estudiantes por construir demostraciones o elaborar explicaciones en situaciones matemáticas elementales y comparó la forma en que difieren de los usos de la demostración que realiza un matemático profesional. A la luz de este análisis, elaboró una clasificación de los tipos de respuestas que un estudiante puede arrojar, a través de una categorización que distingue entre: empíricas y deductivas. La primera se caracteriza por el uso de ejemplos como factor esencial para la certeza mientras que la segunda se caracteriza por la utilización de la deducción como elemento conector con las conclusiones.

El análisis de las respuestas de los estudiantes frente a procedimientos lógicos de validación se realizó a través de proposiciones elementales, que en su prueba no requerían procesos de abstracción muy complejos como una prueba formal. Para la escogencia de las proposiciones que se les entregó a los estudiantes, se siguió la línea del principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001), que describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos.

Johnson – Laird (1983) diferencia tres tipos de representaciones mentales: proposiciones, imágenes y modelos mentales. Para este estudio interesa esencialmente lo concerniente a proposiciones. Para este investigador, una representación mental de tipo proposicional es una grafía que puede ser expresada verbalmente, ya que el entendimiento de una proposición tiene que ver directamente con el saber sobre cómo sería el mundo, si éste fuese verdadero. Las representaciones mentales se interpretan y evalúan a través de modelos mentales. Lo expresado precedentemente significa que la proposición será evaluada como verdadera si encaja en los modelos del mundo, reales o imaginarios, disponibles. Las imágenes son producto de la percepción o de la imaginación y representan aspectos perceptibles de los objetos del mundo real. Así mismo, en una tipología que califica de "informal", distingue entre modelos físicos, que son necesarios para comprender el mundo físico y modelos conceptuales, que representan cuestiones más abstractas.

Procesos de validación y funciones proposicionales cuantificadas

Los procesos de validación propios de la Ciencia Matemática están íntimamente ligados al conocimiento de cuestiones esenciales de Lógica Simbólica. Toda proposición matemática está referida a algunos o todos los elementos de un cierto universo. Esa referencia significa que la función proposicional que involucra la proposición puede estar cuantificada universal o existencialmente. En lo referente a esta investigación, las proposiciones que se presentan al estudiante son: una cuantificada universalmente y otra existencialmente. Ambas son verdaderas. La primera, para ser validada, requiere que se compruebe para cada uno de los elementos del conjunto universal finito que es verdadera la función proposicional que caracteriza la propiedad que postula la proposición, mientras que si este universal es infinito (o finito imposible de ser contado físicamente) se requiere de la prueba abstracta sostenida en argumentaciones que genera una cadena lógica de proposiciones que permiten llegar a establecer y sostener la verdad postulada por la proposición.

Una función proposicional cuantificada existencialmente verdadera requiere para ser validada el encontrar tan solo un valor que haga verdadera a la misma, eso es suficiente para sostener la verdad, independientemente de que el universal sea infinito, finito posible de ser contado físicamente o finito imposible de ser contado físicamente.

Clasificación para las respuestas de los estudiantes

En la introducción, se comentó el análisis que Bell (1976) realiza al proponerse el análisis de los intentos por parte de los estudiantes a la hora de construir demostraciones. En este trabajo se considera solamente la categoría empírica para encuadrar las respuestas de los estudiantes y por otro lado se utiliza la categorización de respuestas adaptadas de Bell (1976) por D´Andrea, Curia & Lavalle (2012) y que se describe a continuación:

1. *Completa*: El estudiante encuentra y comprueba todos los casos requeridos que permiten probar la verdad de la proposición
2. *Visual Completa:* El estudiante encuentra y comprueba todos los casos requeridos que permiten probar la verdad de la proposición, pero lo hace desde la visualización.
3. *Incompleta:* El estudiante detecta la verdad de la proposición, aunque justifica tal verdad con argumentos inconsistentes.
4. *Inconexa*: El estudiante detecta la verdad de la proposición pero intenta justificar con argumentos erróneos.
5. *Inconsistente*: El estudiante detecta la verdad de la proposición sin justificar su decisión.
6. *Incapacidad:* El estudiante es incapaz de detectar la verdad de la proposición.
7. *Extrapolación:* El estudiante infiere la conclusión de un resultado general a partir de un subconjunto de datos suficientemente representativos.

Metodología

El análisis de las respuestas de los estudiantes frente a procesos de validación básicos se realizó a través de proposiciones elementales, que en su prueba no requerían procesos de abstracción muy complejos como una prueba formal. Siguiendo la línea del principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001), que describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos, se escogió proponer determinar el valor de verdad de dos funciones proposicionales, una cuantificada universalmente y otra existencialmente, ambas verdaderas. La idea central fue analizar cómo el estudiante que ingresa a ingeniería responde frente a dos casos emblemáticos y diametralmente opuestos en cuanto a proceso de validación se refiere.

El trabajo de campo se realizó en el primer mes de clases a través de un llamado voluntario. El único requisito requerido fue que el estudiante tuviera aprobado el curso de ingreso. Se presentaron 97 estudiantes en total. Se le entregó la consigna con una hoja adicional con las definiciones y propiedades de valor absoluto y el detalle de significados de signos y símbolos. Todo esto, con el objetivo de evitar que el estudiante se distrajera a la hora de resolver los ejercicios con recuerdos de estructuras conceptuales que pudieran requerirse para la realización de estos ejercicios. El interés central era estudiar el razonamiento de los mismos y evitar la distracción del estudiante de su pensamiento en cuestiones conceptuales y del conocimiento de símbolos. La consigna consistió en lo siguiente:

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, indicando luego de la escogencia de tal valor, que razonamientos se siguen para tal elección.

$$1.\, \forall x \epsilon A: x+1>x, A=\{-2,-1,0,1,2\}$$
$$2.\, \exists x \in R / \exists y \in R / x^2=y^2 \ \wedge x \neq y$$

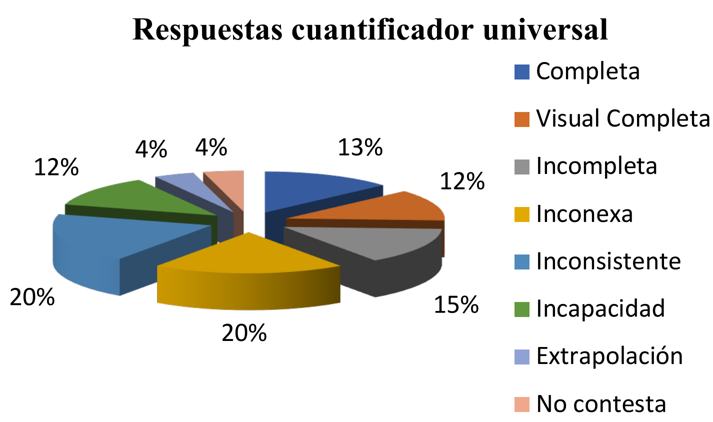
Resultados

Ejercicio 1

La idea de este ejercicio es ver cómo intuitivamente el estudiante procede cuando se encuentra con una función proposicional cuantificada universalmente verdadera pero con un universal finito, posible de ser contado físicamente. Primero ver cómo evalúa su valor de verdad, y luego cómo valida a la misma. Lo esperado de los estudiantes en este caso es un chequeo “elemento por elemento” del conjunto en la proposición, hasta una “*visual proof”* (Hanna, 1995). Esto último consistió en la generación, por parte del estudiante, de una prueba visual, es decir, en la recta real, el estudiante podía ver que para los positivos o negativos, cualquier número aumentado en una unidad supera a ese número. Hoy día, es aceptado naturalmente el uso de la visualización como parte de una prueba.

En el análisis que se detalla a continuación en la Tabla 1, el tipo de razonamiento seguido incluye el tipo de respuesta expresada por el estudiante.

Tabla 1: *Resultados respuestas a ejercicio 1*

Tipo de Respuesta	Número de Estudiantes	Porcentajes
Completa	13	
Visual Completa	12	
Incompleta	14	
Inconexa	19	
Inconsistente	19	
Incapacidad	12	
Extrapolación	4	
No contesta	4	

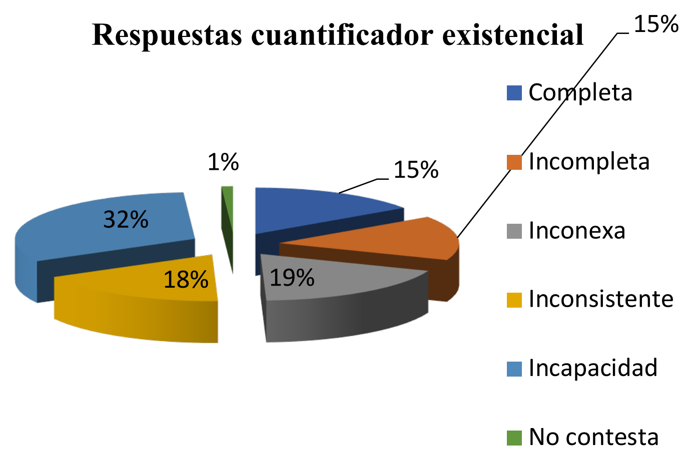
Se observa claramente que casi la mitad de los estudiantes pudieron detectar la verdad de la función proposicional cuantificada existencialmente, pero, o no pueden sostener tal verdad, o lo hacen erróneamente. Una cuarta parte de esta muestra puede probarlo, aproximadamente, la mitad de éstos lo hacen chequeando elemento por elemento, y la otra mitad visualmente, mientras que un ínfimo porcentaje de esta cuarta parte puede extrapolar la verdad desde un caso general válido para todos los reales hacia un subconjunto del mismo. Es claro que los estudiantes desde la intuición pueden llegar a establecer la verdad de una proposición, ya que es pequeño el porcentaje del que no puede detectarla. Pero los que la detectan no pueden usualmente sostenerla.

Ejercicio 2: La idea de este ejercicio fue observar como intuitivamente el estudiante procede cuando se encuentra con una proposición verdadera cuantificada existencialmente. Primero se analizó cómo evaluaba su valor de verdad y luego cómo validaba la proposición. Si bien el estudiante al momento de realizar este ejercicio desconocía cuestiones de Lógica Simbólica, se apela a la noción de recuento discreto, que le permite una noción implícita de cuantificación y que se desarrolla entre los estadios del final del período preoperacional y el comienzo de las operaciones concretas (Piaget,1981).

Debe destacarse que en el análisis que se detalla a continuación en la Tabla 2, el tipo de razonamiento seguido incluye el tipo de respuesta expresada por el estudiante.

Tabla 2: *Resultados respuestas a ejercicio 2*

Tipo de Respuesta	Número de estudiantes	Porcentajes
Completa	15	
Incompleta	15	
Inconexa	18	
Inconsistente	17	
Incapacidad	31	
No contesta	1	



Se observa que en su mayoría los estudiantes no pudieron evaluar el valor de verdad de la función proposicional cuantificada existencialmente, confundiendo en muchos casos con el universal y en otros, evaluando correctamente la función proposicional pero sin mediar una justificación o la elaboración de una conclusión. Los estudiantes de esta muestra conocen el símbolo mostrado, simplemente como un símbolo más, pero no necesariamente este conocimiento implica que la lectura del mismo es meditativa y atenta, lo que influye notablemente a la hora de la prueba.

Conclusiones

Se puede pensar que cuando se le propone un problema matemático a un estudiante, éste pone en juego sus modelos mentales para resolverlo. Estos modelos, en algunos casos, posibilitan el descubrimiento de mayor cantidad de relaciones pero insumen mucha energía y tienen un límite, a la hora de la generalización. Particularmente, en las propuestas que se le realizaron a los estudiantes escogidos para la parte experimental de este trabajo, ellos acudieron a un modelo mental recurrente en estos casos (Balacheff, 2000) validando una proposición a través de una verificación para algunos casos particulares pero sin un criterio formado al hacerlo, como "tanteando" y esto para ellos es suficiente para establecer la verdad de una proposición matemática. Los estudiantes, por lo general, entienden qué se espera de ellos cuando se les pide una demostración y reconocen que la verificación es insuficiente como demostración. Sin embargo, tienden a recurrir a la misma como mecanismo de prueba cuando encuentran dificultades. Esto probablemente está asociado al hecho de que en la vida y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba estándar, enfrentándose los estudiantes a un problema epistemológico no menor. (D´Andrea et al, 2012).

Sin embargo, en casos concretos de validación como los presentados, el desconocimiento del lenguaje matemático, manifestado en una lectura inapropiada de los símbolos, más allá de la hoja que se entregó a cada estudiante, no es garantía para el conocimiento del símbolo y su funcionamiento y alcance dentro de la estructura proposicional en que se encontraba inserto.

Es claro también que se está apelando a la intuición del estudiante, pero con esa intuición no basta, porque además se necesita que este tenga claridad en distinguir que es lo que propugna un cuantificador existencial y uno universal. Esta falta de claridad radica en el desconocimiento del lenguaje matemático, lenguaje que en el ciclo medio se limita esencialmente a que el estudiante realice ejercicios de aplicación de algoritmos y que según opinión textual de ellos, Matemática es sinónimo de “sentarse a hacer ejercicios”.

De acuerdo con lo postulado por Johnson – Laird (1983), los estudiantes que pudieron evaluar adecuadamente el valor de verdad de las proposiciones que se le entregaron como consignas, lo hicieron porque el mundo concreto de su universo matemático encajó con la realidad percibida de la proposición. Esta percepción no pudo ir más allá de la determinación de ese valor de verdad en la mayoría de los casos, ya que no pudieron extrapolar la percepción hacia la barrera de la justificación, con lo cual la comprensión de la proposición se presume que fue parcial en cada caso.

Atento a los estudios de investigaciones anteriores, nuestro trabajo de investigación concluye que los estudiantes ingresantes a carreras de ingeniería vienen con un bagaje básico y podría presumirse que por debajo de lo que podría considerarse básico y elemental en cuánto a conocimientos de lógica matemática y casi nulos en el caso de su simbología. Esto involucra también todo lo referente al lenguaje matemático y su epistemología, ya que ambos están íntimamente ligados. Esto es un obstáculo que se evidencia en los resultados de nuestra investigación y al que se le agregan los modos intuitivos de proceder que son compatibles con el escaso desarrollo acerca del conocimiento adquirido del lenguaje lógico matemático en la escuela media ya mencionado. Los estudiantes ingresantes a la Universidad manifiestan que para ellos Matemática, y esta es una opinión textual, es ‘sentarse a hacer ejercicios’. Esto ya ha sido expuesto párrafos atrás.

Para ellos, hacer estos ejercicios, es un trabajo compulsivo sin reflexión, y esto queda manifestado cuando al estudiante ingresante a la universidad se le pide justificar, explicar o argumentar razones de porque eligen tal o cual método; porque deciden si una proposición es verdadera o falsa. ¿Por qué el estudiante actúa de este modo?;¿Por qué tienen esta imagen de que Matemática es ‘sentarse a hacer ejercicios’?;¿Quiénes son responsables de estas acciones?

El estudiante del ciclo medio recibe una formación e ideas que imita, porque es una tendencia de este que está en una edad donde busca modelos y en la generalidad no es creativo, reproduce. Es importante una cuestión clave en esta reflexión, y es la formación del profesorado. Es el docente en clase quien tiene que intentar anclar ciertas ideas y estructuras conceptuales claves en el estudiante en una franja de edad impresionable y que tiene una amplificación de por vida y una extrapolación futura hacia la vida académica, si la lleva a cabo y laboral tanto en este último caso como si no lo hace.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

Johnson – Laird, P.N. (2001). Mental models and deduction. Trends in Cognitive Science, 5, 435 – 442.

Johnson – Laird, P.N. (1983). Mental models. Cambridge. M.A.: Harvard University Press.
Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics*, *15*(3), 42 – 49.

Piaget, J. (1981). La teoría de Piaget. Infancia y Aprendizaje, *Monografía.* (2), 13 – 54.