

CONVERSIONES ENTRE LOS REGISTROS SIMBOLICO Y COLOQUIAL EN TÉRMINOS DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

María Laura Distéfano, María Andrea Aznar, Marcel David Pochulu
Universidad Nacional de Mar del Plata, Universidad Nacional de Villa María. (Argentina)
mldistefano@fi.mdp.edu.ar, maznar@fi.mdp.edu.ar, marcelpochulu@hotmail.com

■ Resumen

En esta comunicación se presentan resultados provenientes de una investigación focalizada en describir el proceso de construcción de significado, por parte de estudiantes universitarios, de algunos símbolos matemáticos. Los lineamientos teóricos están dados por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y por la Teoría de Registros Semióticos. Se describen las conversiones entre los registros simbólico y coloquial en términos de funciones semióticas definidas para la investigación. Esta forma de análisis puso en evidencia la diferencia del grado de complejidad de las conversiones en los dos sentidos estudiados, y permitió explicar distintos tipos de errores cometidos por los estudiantes en esta actividad.

Palabras clave: símbolos matemáticos, conversiones, funciones semióticas

■ Abstract

This paper shows the outcomes from a research focused on describing the process of building meaning of some mathematical symbols by university students. The theoretical guidelines are based on the Onto-semiotic Approach (OSA) and by the Theory of Semiotic Registers. The conversions between symbolic and colloquial registers are described in terms of semiotic functions defined for research. This kind of analysis revealed the difference between the complexity degree of the conversions in both studied senses, and it allowed explaining different kinds of errors made by the students in this type of activity.

Keywords: mathematical symbols, conversions, semiotic functions

■ Introducción

La investigación que da origen a este reporte estuvo orientada a describir el proceso de construcción de significado, por parte de estudiantes universitarios, de algunos símbolos matemáticos. Dicha investigación centrada en las prácticas matemáticas que tienen lugar en el proceso de construcción de significado, abordando el estudio de aspectos sintácticos y semánticos, ligados a la lectura y escritura de expresiones simbólicas.

Los estudiantes que inician carreras universitarias que contienen matemática en sus planes de estudio, se enfrentan a la necesidad de leer y escribir utilizando símbolos matemáticos. En el marco de estas tareas, los estudiantes manifiestan numerosas dificultades. Entre las prácticas identificadas en la construcción de

significado de estos símbolos, se encuentran las transformaciones entre las expresiones simbólicas y sus correspondientes en el lenguaje coloquial o natural. En este reporte se estudian las prácticas matemáticas correspondientes a estas transformaciones combinando herramientas de dos enfoques teóricos.

■ Marco teórico

Los lineamientos teóricos de la investigación están dados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), de Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2009), y por la Teoría de Registros Semióticos (TRS), de Duval (2004).

De entre los constructos definidos en el marco del EOS se consideraron el de *práctica matemática* (cualquier acción, expresión o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos), el de *significado* (sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas) y el de *función semiótica* (vinculación de una expresión con un contenido, que realiza un sujeto –persona o institución– de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia) (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

De la TRS se consideraron las actividades cognitivas definidas por Duval (2004, 2006): la *formación* de representaciones, los *tratamientos* y las *conversiones*.

La formación de representaciones en un registro de representación semiótica implica la selección de signos apropiados, dentro del conjunto de signos utilizados en dicho registro, y la posterior combinación de acuerdo a las reglas de conformidad. Los tratamientos y las conversiones están ligados a la transformación de las representaciones semióticas. En el caso de los tratamientos la transformación se efectúa dentro de un mismo registro mientras que, en las conversiones, la mencionada transformación se realiza entre distintos registros (Duval, 2004). Las conversiones resultan de un nivel de dificultad superior puesto que son transformaciones externas al registro de partida y con frecuencia no hay reglas regulen su ejecución o que las sistematicen. Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, ya que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización (Duval, 2006).

■ Antecedentes

Es posible encontrar numerosas publicaciones relativas a cuestiones simbólicas focalizadas en la educación primaria o secundaria, pero son escasos los antecedentes de estudios realizados en el nivel superior. Entre estos últimos se encuentran los trabajos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012), que exponen como problemática la escasa atención que los docentes dan al uso simultáneo del registro del lenguaje natural y del registro simbólico al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad.

Focalizadas en experiencias de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico-algebraico con estudiantes de nivel universitario, las publicaciones de Distéfano, Urquijo y González (2010) y de Lacués Apud (2011, 2014), reportan la evaluación de distintas intervenciones educativas para favorecer el manejo de expresiones simbólicas, arribando a que el impacto de las mismas fue positivo y

concluyendo que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en la utilización de símbolos matemáticos.

Conjugando el estudio de significado de símbolos matemáticos a través funciones semióticas, Distéfano, Pochulu y Font (2015), analizan la complejidad cognitiva de distinto tipo de expresiones simbólicas, identificando categorías en los tipos de respuestas de los estudiantes ante tareas con esas expresiones simbólicas. También analizan, en términos de las funciones semióticas, algunos errores frecuentes que presentan los estudiantes vinculados a cuestiones simbólicas.

Por otra parte, los artículos de Pino-Fan, Guzmán, Duval, y Font (2015) y de Godino, Wihelmi, Blanco, Contreras, y Giacomone (2016) dan cuenta de la complementariedad entre las herramientas teórico-metodológicas proporcionadas por EOS y TRS. Estos autores observan que desde perspectiva de la TRS la actividad cognitiva de los sujetos se analiza sin realizar valoraciones desde un punto de vista matemático, mientras que con las herramientas del EOS se pueden analizar los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de tratamiento y conversión.

■ Metodología

En el marco de la investigación realizada, se decidió focalizar el estudio sobre seis símbolos matemáticos, que son de uso frecuente en las materias de Matemática de los primeros cursos universitarios: \in , \subset , \wedge , \vee , \forall y \exists . Para indagar sobre el proceso de construcción de significado que los estudiantes realizan sobre estos símbolos, se determinaron las prácticas matemáticas que están ligadas a este proceso de significación (Distéfano, Aznar y Pochulu, 2016).

Las prácticas matemáticas, como componentes del significado, involucran asociaciones de objetos. Así, la práctica en la que se observa si un estudiante conoce el símbolo implica la asociación del grafismo del símbolo con el vocablo de la lengua natural que lo identifica. Las prácticas ligadas a la estructura formal de una expresión simbólica que emplea determinado símbolo, requiere la asociación del símbolo a la forma sintácticamente correcta de su uso. Las prácticas vinculadas con la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica implican, en un caso, poder asociar la proposición simbólica con su valor de verdad, y en el otro, asociar la expresión simbólica y la expresión coloquial equivalente. Esta última práctica corresponde a las conversiones entre representaciones realizadas en el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial, y es la que se aborda en este trabajo.

Estas asociaciones pueden representarse a través de funciones semióticas, que vinculan los distintos objetos involucrados en las prácticas matemáticas descritas. Teniendo en cuenta los objetos involucrados en las prácticas matemáticas ligadas al proceso de construcción de significado de un símbolo, se definieron tres funciones semióticas a las que se consideró como *principales*, las cuales se describen en la Figura 1, a través de la definición de sus respectivos antecedentes y consecuentes.

Para analizar las conversiones de expresiones entre el lenguaje coloquial y el registro simbólico-algebraico, se definieron dos funciones semióticas, F_{cs} y F_{sc} , cuyos respectivos antecedentes y consecuentes se representan en la Figura 2. Obtener la expresión en lenguaje coloquial, a partir de una simbólica, involucra tanto una conversión como un tratamiento, dado que la respuesta final requiere

construir una oración que manifieste el sentido de la expresión, más allá de la traducción símbolo a símbolo que podría efectuarse con la conversión congruente de los símbolos uno a uno. Por lo tanto, se definió la función semiótica correspondiente al tratamiento, F_t , que también se representa en la Figura 2.

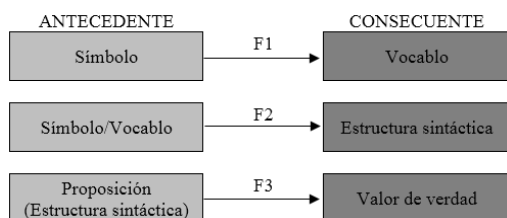


Figura 1. Funciones semióticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo

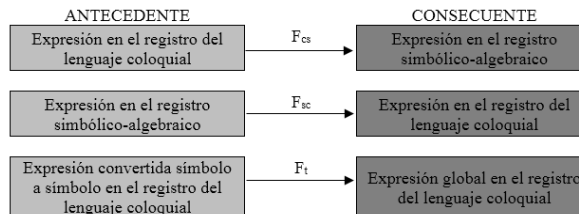


Figura 2. Funciones semióticas definidas para analizar las actividades cognitivas consideradas

Para el relevamiento de datos, se diseñó un instrumento que, a través de distintos tipos de tareas, evalúa las distintas prácticas matemáticas vinculadas a cada uno de los seis símbolos en estudio. Este instrumento fue administrado a 90 estudiantes de distintas carreras (Ingeniería, Profesorado en Matemática, Bioquímica y Licenciatura en Biología), de la Universidad Nacional de Mar de la Plata, Argentina. Entre las mencionadas tareas se encuentran las conversiones de expresiones del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.

■ Descripción de las conversiones mediante funciones semióticas

Las funciones semióticas vinculadas a actividades cognitivas, relativas a representaciones en los registros coloquial y simbólico-algebraico, pueden ser expresadas o desagregadas en términos de las funciones F_1 y F_2 , definidas anteriormente.

A modo de ejemplo se representan los esquemas de dos de las conversiones propuestas en el instrumento. En la Figura 3 se representa el esquema correspondiente a la conversión de la expresión $\exists x (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$, donde aparecen las funciones semióticas F_1 que intervienen en la conversión F_{sc} , que da lugar a la primera parte de la transformación al registro coloquial (conversión SaS) y luego la función semiótica F_t , que permite obtener una expresión coloquial global, similar a la que se utilizaría en forma oral para comunicar la idea que está expresada en la forma simbólica. Las figuras ovaladas muestran los agrupamientos que se producen en los tratamientos dentro del registro coloquial.

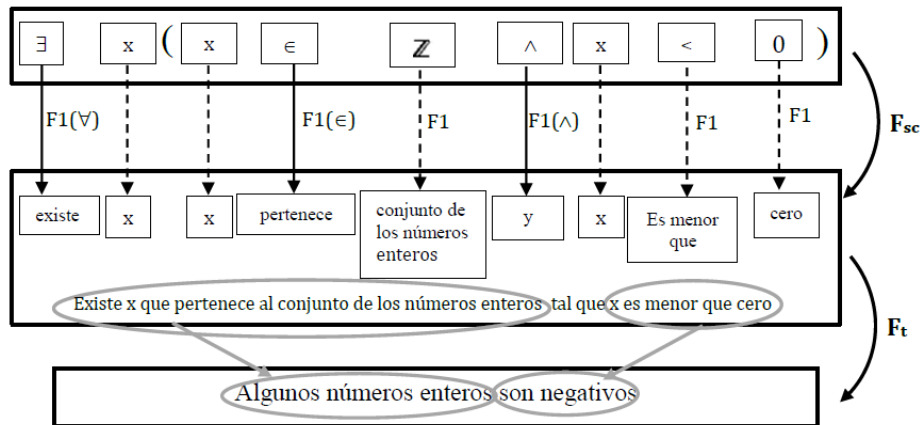


Figura 3. Representación de una conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial a través de funciones semióticas.

En el caso de las conversiones del registro coloquial al registro simbólico-algebraico intervienen las funciones semióticas F1, correspondientes a cada uno de los símbolos que forman parte de la expresión, y la función semiótica F2 (con preponderancia de la correspondiente al símbolo principal) para obtener una fórmula bien formada en el registro simbólico-algebraico. A modo de ejemplo, en la Figura 4 se representa la conversión de la expresión ‘Cada número entero es menor que su sucesor’. En la misma se observan las funciones semióticas F1 de los símbolos que intervienen y la función semiótica F2 correspondiente al cuantificador universal.

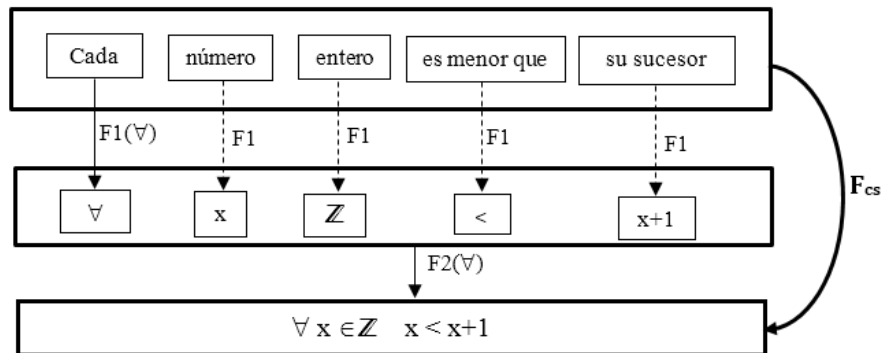


Figura 4. Representación de una conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico a través de funciones semióticas.

Este desagregado se pudo realizar para todas las conversiones propuestas en el instrumento. Esto permitió obtener esquemas generales que describen las conversiones entre el registro simbólico y el coloquial, en cada uno de sus sentidos. Dichos esquemas se presentan en las Figuras 5 y 6.

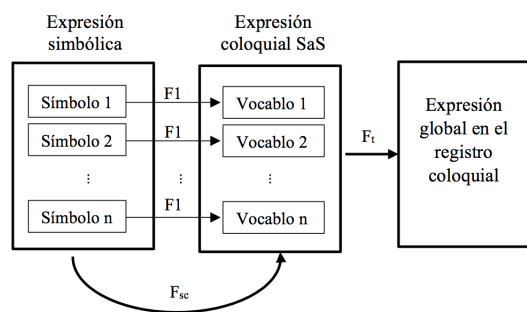


Figura 5. Conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial en términos de las funciones semióticas F1

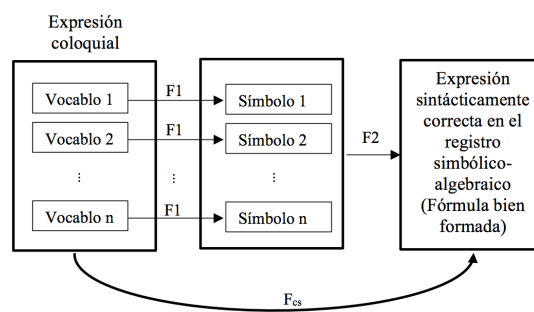


Figura 6. Conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico en términos de las funciones semióticas F1 y F2

En la Figura 5 se esquematiza la función F_{sc} , que interviene en la transformación de una expresión dada en el registro simbólico-algebraico a otra en el registro del lenguaje coloquial. En ella están involucradas las funciones semióticas F1 correspondientes a cada uno de los símbolos que conforman la expresión, tanto las de los símbolos en estudio como las funciones semióticas –equivalentes a la F1– para otros símbolos que participen de la expresión. La conversión podría ser entendida como la composición de todas estas funciones F1, que producen vocablos en el lenguaje coloquial. Con esta transformación se obtiene una expresión a la que se denominó conversión *Símbolo a Símbolo* (SaS), produciendo una expresión que es una especie de decodificación de cada uno de los símbolos que participan de la expresión simbólica. Luego participa la función semiótica correspondiente al tratamiento, F_t , para obtener una oración que expresa la idea global en el lenguaje coloquial, tal como las que se utilizan en la lengua oral para comunicarse.

Análogamente, en la Figura 6 se representa el desagregado de la función semiótica F_{cs} , correspondiente a la transformación de una expresión en el registro coloquial al registro simbólico-algebraico. En la misma participan las funciones semióticas F1, para transformar los vocablos en símbolos, y la función F2 para obtener una expresión bien formada en el registro simbólico-algebraico (podría intervenir más de una función semiótica F2, correspondientes a distintos símbolos que forman parte de la expresión, como por ejemplo, en el caso de las expresiones cuantificadas).

■ Resultados

En el caso de las conversiones del registro simbólico-algebraico al coloquial, la mayoría de los estudiantes efectúa la transformación (en promedio entre el 85% y el 90%). Sin embargo la mayoría de estas transformaciones son efectuadas SaS, pues sólo un 15% de los estudiantes que efectúan la conversión aplican el tratamiento para obtener una expresión que refiera a la idea global representada simbólicamente. Puede observarse que con el establecimiento de la función semiótica *nominal* (F1) de cada uno de los símbolos involucrados en la expresión, sería suficiente para efectuar la conversión SaS, mientras que esto no parece garantizar la comprensión del contenido semántico de la expresión.

En cuanto a las conversiones del registro coloquial al simbólico-algebraico, se registró que fueron efectuadas, en promedio, por aproximadamente el 62% de los estudiantes. Esta merma en el porcentaje de

éxito parece indicar que este sentido de conversión es el que resulta de mayor dificultad para los estudiantes. Esto podría deberse a que, en este sentido de conversión, la construcción de la expresión final requiere de la participación de función semiótica relativa a la sintaxis (F2), para obtener una expresión bien formada.

En el caso de las conversiones del registro simbólico al coloquial, los errores más observados están vinculados con la falta de establecimiento de la función semiótica F1 de algunos de los símbolos participantes, es decir que esos estudiantes manifiestan no conocer alguno de los símbolos participantes y no comprenden la idea general a la que se refiere la expresión simbólica. Por ejemplo, de entre las expresiones formuladas en el instrumento utilizado, al realizar la conversión de expresiones simbólicas del tipo $-2 < 0 \wedge -2 \in \mathbb{Z}$ se observa que algunos estudiantes confunden la conjunción con la disyunción o bien los confunden con los símbolos de las operaciones de unión o de intersección entre conjuntos. Otro ejemplo, para efectuar la conversión de la expresión cuantificada $\exists x (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$ se observa que algunos estudiantes agregan un condicional 'si' que no corresponde para un cuantificador existencial: '*Si x es entero es menor a cero*'.

En las conversiones en el sentido inverso, es decir del registro coloquial al registro simbólico, los errores más frecuentes están vinculados a la sintaxis, es decir que estos estudiantes no logran obtener una expresión bien formada en el registro simbólico. Por ejemplo, al efectuar la conversión de la expresión '*3 y 5 son números naturales*', algunos estudiantes formulan expresiones simbólicas que son sintácticamente incorrectas como las siguientes: ' $3 \wedge 5 \in \mathbb{N}$ ' o ' $\{3, 5\} \in \mathbb{N}$ '. Errores similares se observan en la conversión de la expresión '*4 es un número natural o entero*', para la cual realizan la conversión como si fuera congruente, generando la expresión simbólica que también es sintácticamente incorrecta: ' $4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$ '.

■ Conclusiones

En el este trabajo se describió a las conversiones entre los registros simbólico-algebraico y coloquial como la composición de funciones semióticas, lo cual establece una vinculación entre los dos marcos teóricos utilizados y permite explicar procesos que acontecen en un sujeto cuando opera con algunos símbolos.

Duval (2004) advierte que las conversiones entre los mismos registros, pero en sentidos inversos, no siempre poseen el mismo grado de dificultad. En la investigación que dio origen a este trabajo se ha observado que las conversiones que van del registro coloquial al simbólico-algebraico son las que presentan mayores dificultades para los estudiantes. Este mayor grado de complejidad podría ser explicado, en este caso, a través de las funciones semióticas que participan en cada una de las conversiones.

Las conversiones que tienen al registro simbólico-algebraico como registro de llegada requieren de la función semiótica correspondiente a la sintaxis (F2), la cual se manifiesta como establecida después que la función nominal (F1). Además, la representación simbólica obtenida en la conversión resulta, en general, no congruente con la representación coloquial, lo que le confiere un mayor grado de dificultad, según Duval (2004, 2006). En cambio, la conversión hacia el registro coloquial, particularmente si se realiza símbolo a símbolo, puede ser efectuada sólo con la decodificación de cada símbolo, aunque no garantiza la comprensión del contenido semántico de la expresión.

■ Referencias bibliográficas

- Camós, C.; Rodríguez, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior*. Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI CIBEM). Chile. Disponible en: <http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393>.
- Colombano, V., Formica, A. y Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 115-152). Los Polvorines, Argentina: EDUVIM y Ediciones UNGS.
- Distéfano, M., Aznar, M. y Pochulu, M. (2016). Prácticas matemáticas y funciones semióticas en la significación de representaciones simbólicas de la matemática superior. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 11(2), 1-16.
- Distéfano, M.L.; Pochulu, M.; Font, V. (2015). Análisis de la Complejidad Cognitiva en la Lectura y Escritura de Expresiones Simbólicas Matemáticas. *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education*, 4(3), 202-233. DOI: 10.4471/redimat.2015.1568.
- Distéfano, M.L.; Urquijo, S., González, S. (2010). Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 59-70.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103-131.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91-110.
- Lacués Apud, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, 29-35.
- Lacués Apud, E. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema*, 28(48), 299-318.
- Pino-Fan, R.; Guzmán, I.; Duval, R. y Font, V. (2015). The Theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-40). Hobart, Australia: PME Group.