VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

ELEMENTOS PARA UN DISEÑO DE SITUACIÓN PARA EL ESTUDIO DEL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DESDE LAS ESTRATEGIAS VARIACIONALES

Rodolfo David Fallas Soto, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
rfallass@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Basados en las investigaciones del Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Teoría Socioepistemológica, presentamos una descripción de las estrategias variacionales en la interpretación de la construcción del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Dicha descripción se obtuvo con la ayuda de la problematización de este conocimiento matemático, realizado desde el estudio de la génesis histórica del problema. La descripción de estas estrategias, contribuyen para la base de futuros diseños de situaciones para la comprensión de este conocimiento abstracto, pero ahora, con una vía más constructiva e intuitiva.

Palabras clave: Socioepistemología, ecuaciones diferenciales, existencia, unicidad

Abstract

Based on the investigations of Thought and Variational Language in Socioepistemological Theory, we present a description of the variational strategies in the interpretation of the construction of the existence and uniqueness theorem in the ordinary differential equations. This description was obtained with help to the problematization of this mathematical knowledge, realized from the study of the historical genesis of the problem. The description of these strategies, contribute to the basis of future designs of situations for the understanding of such this abstract knowledge, but now, more constructive and intuitive way.

Key words: Socioepistemology, differential equations, existence, uniqueness

Introducción

Presentamos resultados que son producto y continuación de una investigación sobre el teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La Teoría Socioepistemológica, sustento teórico de la investigación, enfrenta desde una vista sistémica una posible reconstrucción de su significado a la luz de las prácticas usadas en su desarrollo (Cantoral, 2013), sin limitarse a una reproducción cronológica de las aportaciones de las obras matemáticas, ni tampoco a una reinterpretación con lo que conocemos actualmente de dicho teorema.

Durante la investigación (Fallas-Soto, 2015, 2016) en la *problematización del saber matemático* abordada, parte de las conclusiones es que el papel de la *variación infinitamente pequeña* aplicada en la condición inicial del problema de Cauchy en las ecuaciones diferenciales, juega un papel primordial para argumentar la existencia y unicidad de la solución. Se concluye que el teorema de existencia y unicidad corresponde un modelo predictivo, pues al aplicar la variación infinitamente pequeña se busca predecir el comportamiento del sistema, si se mantiene o cambia la solución de la ecuación. Es en este punto, donde se nota la presencia de las estrategias variacionales asociadas a la construcción de la demostración del teorema. Por dicha razón, se decide ampliar la mirada describiendo las estrategias variacionales involucradas en la construcción de las nociones matemáticas relacionadas con el teorema mencionado y complementándolo con el estudio de un artículo científico que investiga los parámetros en la simulación de la trayectoria de un dron. Las estrategias variacionales son resultado de una amplia gama de investigaciones desarrolladas dentro del programa de estudio llamado Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) que desarrolla el programa Socioepistemológico.

Actualmente, hablar del teorema de existencia y unicidad representa una centración en el objeto matemático que forma parte de un mundo abstracto, tanto en los libros de textos utilizados para la enseñanza y aprendizaje como la forma de enseñarlo, basado en operaciones matemáticas e hipótesis para comprobar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial. El enfoque socioepistemológico es el que nos permite descentrarnos del objeto y estudiar aquellas prácticas que se manifiestan como las estrategias variacionales. Por lo tanto, el problema de investigación está ligado al significado en matemáticas, pues la forma en cómo se presenta el teorema no parece deducirse del mundo de las prácticas o propiamente de los usos, ni tampoco de la *matemátización de la naturaleza*.

■ Elementos teórico-metodológico

La problematización del saber matemático metafóricamente es la columna vertebral de nuestra metodología. En este caso, la problematización se realiza desde un estudio de la génesis histórica del teorema y su evolución, estudiando los cambios e invariantes en los argumentos entre los matemáticos que construyeron la demostración del teorema y ejemplos de no unicidad de la solución que ayudaron a comprender la unicidad, todo esto entre la relación de las acciones de *historizar* y *dialectizar*. A partir de esto, se realiza una reconstrucción racional del estudio de la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales y las prácticas asociadas que hacen del teorema un modelo predictivo, esto en diferentes etapas.

En una primera etapa se realiza una búsqueda bibliográfica y se hace lectura de los trabajos matemáticos de la época, trabajos que ayudaron a la construcción de este conocimiento, tanto de las fuentes primarias que corresponden a las obras originales, así como las fuentes secundarias, en este caso los artículos. Estos son:

- (Cauchy y Moigno, 1844), obra llamada “Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral”
- (Lipschitz, 1880), obra titulada “Lehrbuch der Analysis”
- (Lipschitz, 1868) artículo con el título “Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie”

- (Peano, 1973) artículo retomado del original correspondiente al año 1885-1886, llamado: “Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine”.
- (Picard, 1886) obra llamada “Cours D' Analyse”

La primera obra en estudiarse fue la de Picard, donde menciona que los mayores responsables en el estudio de este teorema fueron (Cauchy & Moigno, 1844) y (Lipschitz, 1880). Además, se estudia la obra de Peano, ya que existe el teorema de existencia a su nombre en algunos libros de texto actuales.

La segunda etapa corresponde a un análisis documental, se reconstruyen los elementos utilizados en las obras matemáticas para el estudio del teorema de existencia y unicidad. Esto brinda aportes para explicar estrategias de implementación que propicien la esencia social de la construcción de dicho teorema con base en una evolución pragmática (de prácticas), esta corresponde a la tercera etapa. Por último, en una cuarta etapa, se inicia el estudio de artículos en otras disciplinas, asociados a las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales pero que den indicios de elementos a identificar de la existencia y unicidad. Para este escrito, estaremos reportando lo estudiado de (Rosales, Scaglia, Carelli y Jordan, 2011) sobre el seguimiento de la trayectoria de un dron basado en métodos numéricos.

Con respecto a las estrategias variacionales presentes en el teorema, nos basamos en los resultados de investigaciones desarrolladas en el programa de PyLV que se trabaja al lado de la Teoría Socioepistemológica, en particular Caballero (2012, 2016) ha permitido explicitar las estrategias variacionales (prácticas presentes en el estudio del cambio de estados en fenómenos estudiados con herramientas deterministas) a partir de un estudio profundo de las investigaciones previas, sobre los cuales describe:

- Comparación: Está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados.
- Predicción: La acción de poder intuir después de analizar algunos estados para deducir estados posteriores. Significa anticipar con cierta racionalidad.
- Seriación: Está asociada con la acción de establecer relaciones entre estados sucesivos. Estudiar los cambios para determinar un patrón.
- Estimación: Se parte del hecho de conocer estados cambiantes, proponiendo estados a corto plazo.

Resultados de las obras matemáticas

Cauchy & Moigno (1844), consideran a la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ con las hipótesis de que $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas con la condición inicial (x_0, y_0). Los autores prueban la convergencia de la sucesión de puntos obtenidos por el método de las quebradas.

386 CALCUL INTÉGRAL.

n valeurs correspondantes de $y, y_1, \ldots, y_{n-1}, Y$, à l'aide des équations

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on obtiendra une valeur de Y de la forme

$$Y = F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X, y_0),$$

Figura 1. Método de las quebradas
Fuente: (Cauchy y Moigno, 1844, pág. 386)

Este método es utilizado en las obras de Lipschitz, Peano y Picard, como argumento invariante para la demostración del teorema. Consiste en ir determinando estados sucesivos que dependen del estado que lo precede a partir del estudio de la linealidad y *pequeñas variaciones* (infinitesimal) que se permite realizar con la ecuación diferencial (como razón de cambio que determina la pendiente de la recta) y la condición inicial (punto por donde pasa la recta). Tal y como mostramos en las siguientes ilustraciones.

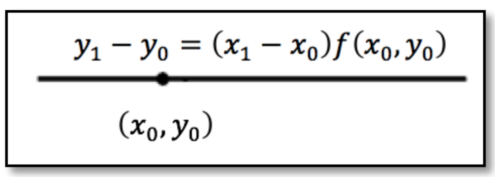

Figura 2. Primera iteración del método de las quebradas

Conociendo el siguiente valor como aproximación de la solución, se procede a realizar la siguiente iteración

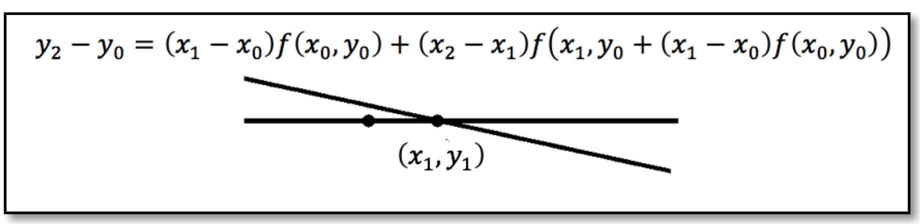

Figura 3. Segunda iteración del método de las quebradas

Por lo tanto, se generaliza y aproxima que $y - y_0 = \pm\Theta A(x_n - x_0)$ donde A es un promedio de las $f(x_n, y_n)$ y Θ un valor entre 0 y 1.

Entonces los autores generalizan lo anterior asegurando que y_n es igual a

$$y_n = y_0 + (x_n - x_0) f\big(x_0 + \theta(x_n - x_0), y_0 \pm \Theta A(x_n - x_0)\big)$$

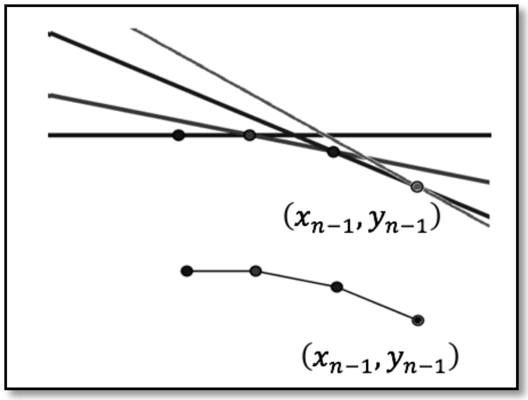

Figura 4. N-ésima iteración obteniendo una aproximación numérica de la solución

Del cual y_n corresponde prácticamente del mismo valor que y_0 si la diferencia $x_n - x_0$ es muy pequeña. En otras palabras, si $x_n \to x_0$ entonces $y_n \to y_0$.

Además, estudian la convergencia de la siguiente manera como parte de una estabilidad del sistema. Si se le realiza un incremento pequeño ς_0 a y_0, entonces y_n tendrá un incremento ς_n. Para que converja, este último incremento debe ser igual de pequeño que ς_0. Lo anterior pues se busca la estabilidad de la función y para asegurar existencia. Nuevamente en juego la pequeña variación para comparar estados y así determinar una predicción local con cada iteración para determinar al final una predicción global (estimación) del sistema.

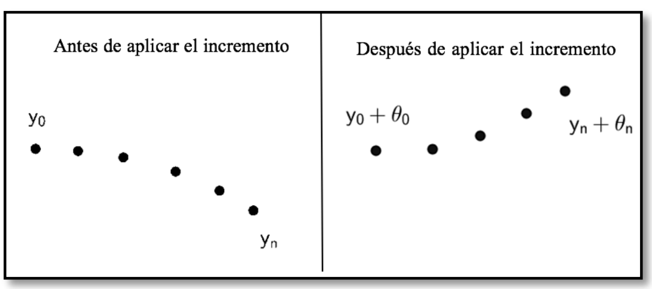

Figura 5. Caso en donde el incremento de y_n cambia considerablemente con respecto al incremento de y_0

Este resultado lo profundiza Lipschitz (1880) al trabajar con sistemas de ecuaciones y la unicidad de la solución. Basándonos como ejemplo en la ilustración 05, lo que en realidad está pasando, es que a partir de la primera iteración se están obteniendo dos rectas tangentes que corresponden respectivamente a cada una de las dos soluciones. Por eso, en el punto (x_1, y_1) y otro muy cercano (x_1, η_1), con $\eta_1 = y_1 + \theta_1$ tal que $\eta_1 - y_1$ es cercano a cero, se están determinando dos rectas tangentes, las cuales son.

$$y - y_1 = (x - x_1) f(x_1, y_1)$$

y

$$y - \eta_1 = (x - x_1)f(x_1, \eta_1)$$

Tal y como se muestra en la siguiente representación

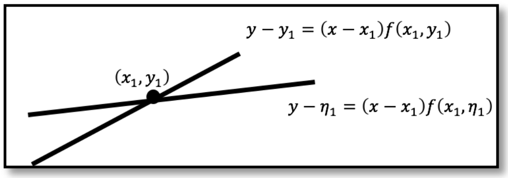

Figura 06. La existencia de dos soluciones para la ecuación

Entonces si estudiamos la diferencia entre estas dos rectas, vemos que es lo mismo que restar las pendientes de ambas, pues η_1 es un valor muy cercano a y_1. Observe que esta distancia entre las rectas está determinada por la resta

$$|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)|$$

Es por eso, que la condición de Lipschitz juega un papel importante, pues esta diferencia se vería acotada por

$$|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)| < M|\eta_1 - y_1|$$

En donde la constante M es la cota de la $\frac{\partial f}{\partial y}$ que no necesariamente es continua. Entonces si se cumple esta condición, tendríamos que $|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)| = 0$ siendo una solución única a la ecuación. Si la condición de Lipschitz no se cumple, no se puede garantizar unicidad, puede que exista o puede que no exista.

Interpretación de la simulación de la trayectoria de un dron

Para nuestro trabajo, es de interés conocer el uso de la matemática en fenómenos relacionados en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, para caracterizar las nociones de existencia y unicidad desde esta práctica de referencia. Por eso, se decide estudiar el trabajo de (Rosales, Scaglia, Carelli, & Jordan, 2011) que trata de dar un seguimiento de trayectoria de un mini helicóptero de cuatro rotores basados en métodos numéricos, con el objetivo de encontrar las acciones de control optimas que permiten llevar al vehículo del estado actual al deseado. Los autores deciden abordar su estudio con estos vehículos por su versatilidad y maniobrabilidad que permiten un gran número de tareas.

Figura 7. Drones de cuatro rotores

Durante el diseño del controlador, mencionan que construyen una ley de control capaz de generar señales, con el objetivo de que *la posición del helicóptero siga la trayectoria deseada*. Justamente esta frase, se interpreta como un uso de la unicidad en el comportamiento del fenómeno, colocando las condiciones necesarias para que tenga la solución que se desea obtener. Al momento de encontrar estas condiciones aparece la esencia de la condición de Lipschitz que asegura la unicidad de la trayectoria, muy de la mano con la noción matemática de error.

Esta comparación que realizan es una herramienta de análisis para comprobar la robustez del controlador frente a errores en los parámetros establecidos. Esto es un resultado importante, de acuerdo a los autores, ya que aseguran que no siempre se cuenta con los valores de los parámetros sus resultados ayudan a tener respuestas satisfactorias en la simulación de estas trayectorias.

Conclusiones

Este estudio, muestra el tipo de prácticas (estrategias variacionales) que se ponen en juego para justificar la existencia y la unicidad desde la solución, ampliando desde el enfoque socioepistemológico, el papel de la variación infinitamente pequeña y la predicción que caracteriza a la esencia social que ayuda a construir estas nociones matemáticas. Sostenemos que una de las preguntas que debe llevar un diseño de situación en el estudio de fenómenos debe ser: ¿Qué se necesita hacer para obtener el resultado deseado?, llevando al individuo a realizar medidas de control ante variaciones en el sistema para obtener el resultado que se desea dependiendo del fenómeno de estudio.

Del análisis documental sobre obras originales de matemáticas se obtuvo componentes: numéricos, variacionales, analíticos y visuales, que podrían ayudar a una mejor comprensión del teorema o el método de Euler como método de aproximación de la solución de la ecuación diferencial. Por otra parte, se significaron otros constructos, como la convergencia, la condición de Lipschitz y la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, respecto de y.

Además, las estrategias variacionales en la construcción de este teorema y presentes en la simulación del dron, fueron de forma concreta:

- Comparación: Se comparan los estados que corresponden a los valores de la solución numérica de la ecuación diferencial. Además, se compara a la solución obtenida antes y después de la pequeña variación en la condición inicial para determinar su unicidad.
- Predicción: De las estrategias más utilizadas, y confirmando que este teorema corresponde a un modelo predictivo, se utiliza para predecir la existencia de la solución, y con la pequeña variación nos asegura la convergencia y la unicidad de la solución.
- Seriación: Al encontrar una relación entre un estado y otro, partiendo de las condiciones iniciales, en muchos casos se logra obtener la solución analítica de la ecuación diferencial, mientras que en otros casos solamente se predice el valor que tendrá el siguiente valor de la solución numérica de la solución, ambos casos con apoyo del estudio de patrones entre un estado y otro.

- Estimación: Al conocer los valores iniciales y desconocer el siguiente valor que determina la solución numérica de la ecuación diferencial, es que entra en juego la aproximación lineal para determinar el siguiente valor o estado.

Para la realización de un diseño de Situación de aprendizaje, es pertinente realizar dos preguntas asociadas a la noción de unicidad, esto en común que se pudo observar entre la simulación de la trayectoria de un dron y el análisis documental de las obras matemáticas:

- Dada una condición inicial de un fenómeno y su comportamiento, se obtiene un cierto modelo que lo describe, ¿Qué ocurre con el fenómeno y el modelo, cuando se recibe una pequeña variación a la condición inicial o pequeña variación en los parámetros que estén en juego?,
- ¿Dado el fenómeno y el modelo en estudio, qué condiciones en los parámetros y sobre la condición inicial se deben realizar para obtener un estado futuro deseado?

Al realizar un estudio como el actual, se puede observar que emergen diversas racionalidades que servirán al momento de diseñar situaciones de aprendizaje mediante el empleo de variables didácticas o variables de control para modificarlas, manteniendo presente la construcción de estos significados. Al reconstruir estas significaciones, ayudaron a comprender otros problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales, como su estabilidad en un sistema de ecuaciones diferenciales, y construir para ello, otras interpretaciones visuales

Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fallas-Soto, R., & Cantoral, R. (2016). Estudio Socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. *História da Educação Matemática, 2*(3), 256-280.

Cauchy, A., & Moigno. (1844). *Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*. Paris: Libraire de École Polytechnique.

Lipschitz, R. (1868). Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*., 2(2), 288–302.

Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. Bonn. Deutschland: Verlag Von Max Cohen & Sohn.

Peano, G. (1973). Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 21 (1885-1886): 677-685. Hamburger Which Was Reprinted in Peano 1957-1959., 1, 74–81.

Picard, E. (1886). Cours D' Analyse. Faculté des Sciences de Paris.

Rosales, C., Scaglia, G., Carelli, R., & Jordan, M. (2011). Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos. *XIV Reunión de Trabajo Procesamiento de la Información y Control*, 495-500.