

PRESENCIA DEL CÍRCULO HERMENÉUTICO DE LA COMPRENSIÓN EN LA INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ALUMNOS

Jesús Gallardo Romero, Verónica A. Quintanilla Batallanos
Universidad de Málaga. (España)
gallardoromero@uma.es, veronicaquintanilla@uma.es

Resumen

En este trabajo describimos el recorrido que propone el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas para acceder de un modo operativo a la comprensión matemática del otro. Este círculo no es solo producto de la investigación hermenéutica en Educación Matemática. Vislumbramos su presencia en las interpretaciones particulares que los estudiantes realizan de forma innata durante su quehacer matemático cotidiano. Nos servimos para ello de un episodio concreto de interpretación de protocolos escritos que transcurre en el ámbito de la divisibilidad de los números naturales. Los resultados obtenidos nos permiten presentar el círculo hermenéutico como una herramienta metodológica útil para examinar y mejorar en la práctica los procesos interpretativos en el aula de matemáticas.

Palabras clave: comprensión matemática, divisibilidad, hermenéutica, interpretación

Abstract

In this work we describe the path advocated by the hermeneutic circle of understanding in mathematics for the one to have access, in an effective way, to the mathematical understanding of the other. This circle is not just the product of hermeneutic research in mathematics education; its presence can also be observed in the particular interpretations naturally made by students during their day- to- day mathematical doing. We illustrate a specific episode of interpretation of written protocols occurring within the context of divisibility of natural numbers to observe, in practice, the use of the different interpretive planes that constitutes the hermeneutic circle of understanding in mathematics. The results allow us to show the hermeneutic circle as a useful methodological tool to examine and improve the interpretive processes in the mathematics classroom.

Key words: mathematics understanding, divisibility, hermeneutics, interpretation

■ Introducción

En los últimos años venimos desarrollando un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas cuya dimensión hermenéutica incorpora como método un círculo interpretativo para explorar de forma inclusiva la comprensión matemática de los estudiantes (Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014; Gallardo y Quintanilla, 2016). El trabajo que presentamos aquí tiene como principal propósito mostrar también la presencia natural de este círculo en las prácticas interpretativas de

los escolares, a través de la identificación de rasgos genuinos del mismo en las interpretaciones particulares que los estudiantes realizan durante el desarrollo de su propia actividad matemática. Analizamos un episodio concreto donde dos alumnas de primer curso de educación secundaria (12-13 años) interpretan un protocolo de resolución de una tarea de divisibilidad de números naturales elaborado previamente por una compañera de aula. El método nos aporta referencias específicas para explorar los procesos interpretativos que los escolares emplean en el aula de matemáticas y criterios con los que identificar y promover las buenas interpretaciones durante la actividad matemática.

■ Marco Teórico

Nuestra propuesta interpretativa (Figura 1) se inicia en el plano cognitivo con el reconocimiento de la comprensión matemática como fenómeno mental que comparte el carácter interno e inmaterial propio de las actividades intelectuales cognitivas específicas (plano cognitivo). Al mismo tiempo, se centra en el análisis de la experiencia matemática del alumno, una experiencia que siempre emerge y se desarrolla por mediación del lenguaje. En una primera transición, la interpretación se distancia provisionalmente del interés por lo mental y queda restringida al ámbito de lo observable. En este hecho encuentra la propia interpretación su justificación como requerimiento necesario para la detección y caracterización de rasgos genuinos de comprensión del conocimiento matemático, en lugar de ser un condicionante limitador del acceso a la misma. La interpretación demanda entonces la textualización de todo lo observable, por lo que el primer compromiso supone identificar los rastros de comprensión diseminados a lo largo del registro escrito mediante aproximaciones de tipo semiótico (plano semiótico).

Seguidamente, aunque la interpretación se ejerza sobre la mediación de un texto, rebasa el campo de lo meramente semiótico y se dirige en una segunda transición hacia referencias externas complementarias que garantizan el retorno a la comprensión matemática del alumno. Al actuar, el estudiante interviene en el mundo de las prácticas matemáticas y de los fenómenos organizados por los conocimientos matemáticos puestos en uso, transformándolos de algún modo. Esta intervención sobre la realidad matemática, sobre el mundo fenomenológico de los objetos matemáticos, trasciende la esfera semiótica y constituye una primera referencia extrasemiótica presente en la acción o actividad matemática (plano fenómeno-epistemológico). El uso del conocimiento matemático en sus distintas facetas fenómeno-epistemológicas se propone como primera extensión no ostensiva (y no mental) del registro escrito matemático.

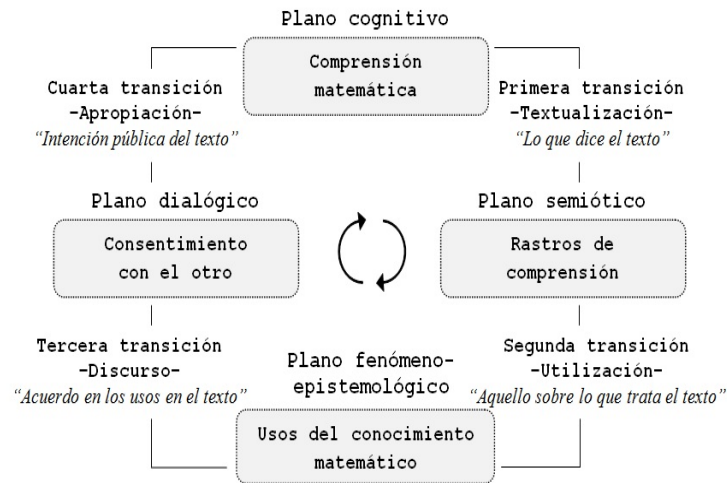


Figura 1. Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas

A partir de aquí, la interpretación avanza hacia una segunda fase de carácter esencialmente discursivo, donde la explicitación de la intención del estudiante a través de sus acciones matemáticas públicas (lo que hace y dice) se confronta con la apropiación por parte del agente intérprete (alumno, profesor, investigador) de los usos intencionales identificados. En esta fase se busca lograr el consentimiento con el otro. Los acuerdos comunes alcanzados por los protagonistas sobre lo realizado en la actividad matemática previa, por estar mediatizados por la comprensión propia de cada uno de ellos, constituyen la segunda referencia complementaria a los usos del conocimiento matemático (plano dialógico).

Por último, la apropiación que acontece durante el consentimiento con el otro provoca un efecto transformador sobre el propio intérprete: el proceso de interpretar la comprensión matemática termina transformando al intérprete al apropiarse éste de los usos intencionados del conocimiento matemático del estudiante. Es decir, termina haciendo propios los usos realizados con una intención de cuya faceta pública o externa tiene constancia. Finalmente, en la confluencia de la explicitación de esta intención pública del texto y de su apropiación por parte del intérprete es donde se completa el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

■ Método

Analizamos un estudio de caso donde dos alumnas de primer curso de educación secundaria (12-13 años), Andrea y María Jesús, interpretan juntas la producción escrita de su compañera Sara, elaborada previamente al intentar resolver una tarea de divisibilidad de números naturales (Figura 2). Este trabajo interpretativo se realizó en el marco de un programa educativo más amplio destinado al fomento de la elaboración y análisis de protocolos escritos, que las estudiantes llevaron a cabo en su centro educativo durante el curso 2014-2015 mientras cursaban la asignatura de matemáticas.

La mayoría de las tareas matemáticas incluidas en el programa de interpretación de protocolos, como la utilizada en este episodio, son tareas escolares, convencionales y estereotipadas, extraídas de los libros de texto implantados en el centro educativo. Elegimos de forma intencionada este tipo de tareas con el

propósito de asignar al libro de texto una utilidad didáctica alternativa y complementaria a la tradicional usualmente extendida. En esta ocasión, la tarea aritmética utilizada aparece incluida en la propuesta didáctica del libro de texto de las alumnas para la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad de números naturales:

Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:

- Si los envaso por docenas, me sobran 5.
- Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10.
- Casi he cogido 100.

¿Cuántos huevos tiene? (Colera y Gaztelu, 2011, p. 71)

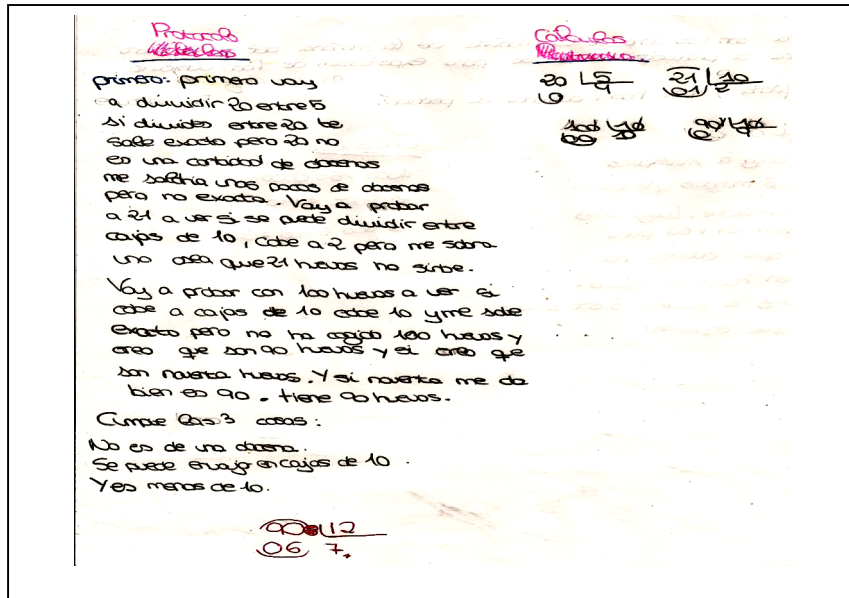


Figura 2. Registro escrito de Sara en forma de protocolo

La actividad de interpretación asociada a esta tarea se inicia con la propuesta de su resolución individual a los alumnos del grupo-clase, incorporando a su procedimiento particular de resolución un protocolo explicativo de las principales estrategias y acciones realizadas en casa caso. A continuación, los productos obtenidos por cada estudiante se distribuyen entre otros alumnos distintos a fin de que estos últimos interpreten lo realizado por sus compañeros y extraigan información acerca de su comprensión matemática. En esta ocasión, registramos en audio la discusión de María Jesús y Andrea al interpretar el protocolo de Sara. La transcripción de la grabación nos permite generar un nuevo registro escrito que refleja sus interacciones en forma de diálogo textual (201 entradas). Los datos así recopilados se analizan tomando como referencia la estructura del propio círculo hermenéutico. En concreto, en cada entrada del registro buscamos posibles rastros significativos del proceder característico de cada uno de los planos

hermenéuticos. Estos elementos nos permiten reconocer en cada momento el centro de atención variable de las alumnas, las facetas de comprensión en las que ponen interés y los lugares hacia donde dirigen la interpretación.

■ Resultados

Las alumnas perciben la comprensión del conocimiento matemático como un fenómeno interno que acontece en la esfera mental del individuo. Consideramos este reconocimiento consecuencia de las continuas alusiones que realizan a la faceta cognitiva de la comprensión matemática de su compañera (*plano cognitivo del círculo hermenéutico*). María Jesús y Andrea tienen interés por ver y explicar lo que pasa en la mente de Sara y buscan razones del porqué de su desempeño en la tarea matemática. Para encontrar una justificación interna de las manifestaciones externas de Sara las alumnas plantean de forma reiterada cuestiones centradas en la intencionalidad oculta de su compañera (3, 16, 69, 90) e intentan responderlas con suposiciones sobre la misma que provoca una variedad de afirmaciones distintas (43, 67, 71, 193).

3	María Jesús	<i>¿Pero ese 20 a qué viene?</i>
16	Andrea	<i>¿Dónde va?</i>
43	María Jesús	<i>Sí, es que yo creo que se ha equivocado porque como no ha copiado el problema entero...</i>
67	Andrea	<i>Sí, pero eso es por toda la cara, maestro [en referencia a la división de 21 entre 10]. Yo no sé qué ha intentado hacer esta mujer, de verdad.</i>
69	Andrea	<i>¿De dónde ha cogido los datos de este problema, por favor?</i>
71	María Jesús	<i>No sobra. No sobra ninguno y se habrá equivocado.</i>
90	Andrea	<i>¿El 20 a qué viene? A ver, dínos qué has puesto ahí volando ¿Y lo de las cuantas de docenas?</i>
193	María Jesús	<i>Es que es para matarte, niña. ¿Cómo has sacado un 20? ¡Un 21! ¿Qué dices, qué dices? ¡Ay, se le ha ido la olla a Sara!</i>

También se perciben intentos de aclarar lo que dice el texto (*plano semiótico*). Las intervenciones en este plano se caracterizan por incluir análisis breves en forma de comprobaciones y reflexiones en torno a la idoneidad matemática de los elementos semióticos que configuran la respuesta del protocolo. La atención la centran sobre todo en las elecciones numéricas y los procedimientos de cálculo empleados (1, 4, 15), la consideración de las condiciones del problema (19, 25, 27) y la identificación de la respuesta final dada por Sara (19, 29, 30).

1	María Jesús	<i>¿Qué dice aquí? Se lo va a dividir entre 20.</i>
4	Andrea	<i>Y entre 5, ¿sabes? Entre 5.</i>
15	María Jesús	<i>Y ahora dice acá 100 huevos, entre 10.</i>
19	María Jesús	<i>¿100 huevos? Y cree que son 90 huevos. Mira... Después dice que cumple las tres condiciones.</i>
25	Andrea	<i>Pero Maestro una de las condiciones es que le sobren 5 y aquí dice que le sobran unas pocas de docenas. Es muy raro.</i>

- 27 María Jesús *No tiene sentido.*
 29 Andrea *Es que dice que no es una docena, que cree que...*
 30 María Jesús *Que es 90. Que tiene 90 huevos.*

Se aprecian además reflexiones significativas en torno a los usos dados a los conocimientos matemáticos presentes en la resolución (*plano fenómeno-epistemológico*). Las descripciones elaboradas en el plano semiótico vienen acompañadas de afirmaciones acerca de los conocimientos matemáticos utilizados y sus posibles modos de empleo vinculados a la situación matemática propuesta. Los comentarios de María Jesús y Andrea subrayan su disconformidad con la consideración dada por Sara a las condiciones del problema y con su elección de los dividendos, cocientes y restos como conocimientos matemáticos vinculados con la división (2, 6, 33, 147). Incorporan, asimismo, comprobaciones propias para justificar tales desacuerdos (98, 99, 107).

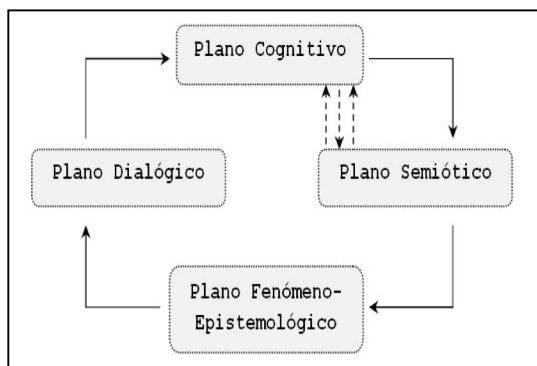
- 2 Andrea *Pero si es que 20 no tiene nada que ver.*
 6 Andrea *5 es lo que te sobra. Pero debería dividirlo entre 12, ¿no?*
 33 María Jesús *[Regresa a la lectura del enunciado de la tarea]. Casi ha cogido 100. ¡Pero yo no estoy diciendo que hayas cogido 100! Ni 20, ni 30, ...*
 98 Andrea *Haz la cuenta María Jesús [la división de 90 entre 12].*
 99 María Jesús *¡Pero yo no me acuerdo de dividir, eh? [risas]. 90 entre 12, ¿no?*
 107 Andrea *Son 6. [en referencia al resto].*
 147 María Jesús *Si casi ha cogido 100, pues un número que esté más cerca de 100. Pero ahí no es [no identifica como válida ninguna opción de Sara].*

Finalmente, las alumnas muestran predisposición por consentir con su compañera (*plano dialógico*). Los indicios en favor de lograr el consentimiento tienen su origen en la negación de, o el desacuerdo con, lo que hizo Sara en su protocolo de resolución. Tales evidencias reflejan el empeño de María Jesús y Andrea por establecer lo que Sara debiera hacer como mejor alternativa (122, 123, 144, 146). Incluyen una explicación razonada del procedimiento que conduce a la identificación y justificación de la solución correcta al problema (155, 199).

- 122 María Jesús *Le preguntaría de dónde ha sacado ese 20.*
 123 Andrea *Eso, el 20. Y lo de las cuantas de docenas, también.*
 144 María Jesús *Que busque los múltiplos de 12.*
 146 Andrea *Y que se lo lea bien, por favor, que si no es un “relió”.*
 155 María Jesús *90 entre 10, a 9. O sea, es 89. Y ahora, 89 como dice que tiene que envasarse en docenas y que tiene que sobrar 5, pues 89 lo dividimos entre 12 y nos da de resto 5.*
 199 María Jesús *Hay que dividir, porque como dice que ha cogido casi 100, pues divido 89. Y dice que al final le sobran 5, pues a 89 le sumamos 1 y nos da 90. Ahora, como dice que las agrupa en cajas de 10 exactamente: 90 entre 10 y nos da a 9. O sea, que es 89.*

Al vislumbrar los cuatro planos ponemos de relieve que las alumnas desarrollan una estrategia interpretativa multifacética a lo largo del episodio, que se asemeja además a la propuesta metodológica sugerida por el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas. En principio, en la interpretación desplegada por María Jesús y Andrea percibimos, a través del orden numérico de las entradas que registran sus intervenciones, tres etapas genéricas que transcurren de forma correlativa y donde la actividad principal se desarrolla en alguno de los planos semiótico, fenómeno-epistemológico y dialógico, respectivamente. En concreto, el episodio incluye una primera etapa de marcado carácter semiótico que acontece al inicio del proceso interpretativo. A continuación, prosigue en una segunda etapa posterior donde las alumnas centran la atención en los aspectos que caracterizan sobre todo al plano fenómeno-epistemológico. Por último, en una tercera etapa final la actividad interpretativa transcurre principalmente en el plano dialógico.

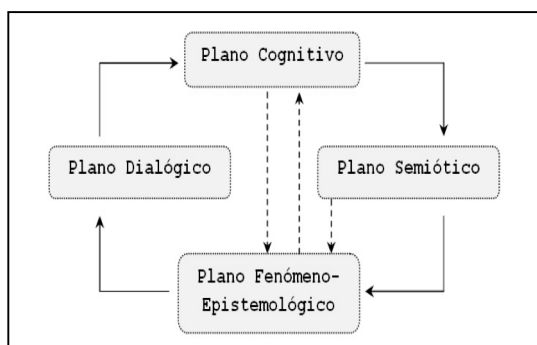
Por el contrario, el plano cognitivo, a diferencia de los otros, se hace presente de forma regular en el transcurso del episodio. En sucesivas ocasiones, a las alumnas les bastan unos primeros resultados obtenidos de su interpretación semiótica, fenómeno-epistemológica y/o dialógica, respectivamente, para extraer de manera reiterada conclusiones acerca de la comprensión matemática de su compañera. De este modo, trazan recorridos directos hacia el plano cognitivo en un juego de correspondencias de doble sentido entre planos que recuerda metodológicamente a la conexión entre los ámbitos interno y externo de la comprensión que promueve la orientación cognitiva de la interpretación (Figura 3a). A nivel aún más local, se vislumbran incluso recorridos puntuales por distintos planos en una misma intervención. Estos recorridos cubren parcial o totalmente el círculo hermenéutico, tanto en el sentido prefijado por él como en otros alternativos (Figura 3b y 3c).



7 María Jesús [Lee un fragmento del protocolo de Sara] “[...] una cantidad de docenas me sobraría. Unos pocos de docenas, pero no exacta” **[plano semiótico]**. Pero, ¿de dónde viene eso? **[plano cognitivo]**

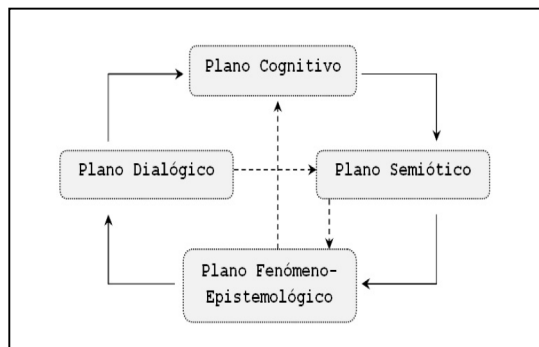
8 Andrea Maestro mira, dice que le sobran unas cuantas de docenas. **[plano semiótico]** ¡Dónde vas? **[plano cognitivo]**

Figura 3a



186 María Jesús Yo, ya ves maestro, porque ella dice que tiene unas cuantas de docenas. **[plano semiótico]**. Y le tienen que sobrar 5 huevos. **[plano fenómeno-epistemológico]**. ¡Dónde va? **[plano cognitivo]** Que lo ha hecho mal Sara, maestro, totalmente **[plano fenómeno-epistemológico]**.

Figura 3b



200 María *O sea, que es 89 porque como dice que*
 Jesús *le sobran 5, pues es 89 porque dividido*
en docenas da 5. ¿Ok? [plano
dialógico]. Pero yo eso de que dice que
hay que considerar tres cosas, que hay
docenas [plano semiótico], vale eso
está muy bien [plano fenómeno-
epistemológico]. Pero, ¿de dónde viene
ese 20 y ese 21, Sara? ¿De dónde viene?
[plano cognitivo]

Figura 3c

Figura 3. Ejemplos de recorridos por el círculo hermenéutico

En resumen, estos resultados considerados en conjunto ponen de manifiesto la presencia natural de los planos hermenéuticos y su consideración innata por parte de las alumnas para interpretar la comprensión matemática de su compañera. También la posibilidad de realizar recorridos diferentes por el círculo hermenéutico. En esta ocasión concreta, la manera en la que los planos se relacionan entre sí durante el proceso interpretativo difiere de lo establecido por el círculo. Avances y retrocesos no previstos terminan materializando recorridos alternativos que permiten establecer diferencias entre las interpretaciones y caracterizar perfiles de interpretación propios.

■ Discusión y conclusión

Constatamos que la actividad interpretativa desarrollada por las alumnas transgrede con fines utilitarios el problema epistemológico de las otras mentes. Esta transgresión, sin embargo, no siempre se realiza de forma directa sino también con el apoyo de diferentes elementos externos y visibles de tipo semiótico, fenómeno-epistemológico y dialógico, lo que contribuye a dar “el salto al interior” con mayores garantías y a reducir riesgos en la interpretación cuando se transita entre los ámbitos externo e interno de la comprensión del otro. De este modo, podemos afirmar que el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas expuesto en este trabajo se evidencia en las interpretaciones que realizan los escolares en contextos de actividad matemática conjunta en el aula. En el ejemplo discutido, no obstante, la manera en la que los planos se relacionan entre sí durante el proceso interpretativo difiere de lo previsto por el círculo hermenéutico. Esta circunstancia sugiere la posibilidad de establecer diferencias entre las interpretaciones de los escolares y valorar la idoneidad de cada una de ellas en función de su correspondencia con lo fijado por el círculo. El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas se muestra entonces como un instrumento metodológico de referencia para la observación y, al mismo tiempo, justifica que pensemos en él como una vía operativa para mejorar la interpretación matemática de los escolares. En concreto, proponemos utilizarlo como referencia para hacer transitar a los alumnos desde sus modos idiosincrásicos de interpretar hasta el método interpretativo que propone. Haciendo explícito el método sugerido por el círculo podremos ayudar a los alumnos a transformar el suyo propio y transitar hacia formas más operativas y efectivas de acceder a la comprensión matemática del otro. También planteamos la interpretación a través del círculo como una vía para desarrollar la comprensión matemática propia y

garantizar la obtención de nuevos aprendizajes de calidad. En resumen, consideramos que la interpretación de los escolares puede mejorar si los planos se conectan y se organizan siguiendo la estructura del círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

■ Referencias bibliográficas

Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 1. Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, 25(2), 61-88.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 319-336. doi: <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1158>

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 625-648. doi: <http://dx.doi.org/00.1590/1980-4415v30n55a16>