CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DETECTADAS EN ESTUDIANTES DEL PREUNIVERSITARIO

Javier García-García, Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
jagarcia@uagro.mx, cdolores2@uagro.mx sirlene-neves@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br

Resumen

Este artículo da cuenta de una investigación que tiene por objetivo establecer las relaciones que guardan las conexiones matemáticas detectadas en los estudiantes del preuniversitario asociadas al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Las conexiones matemáticas se asumen como un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Se utilizó el análisis temático para analizar los datos obtenidos mediante entrevistas basadas en tareas con 25 estudiantes del preuniversitario que habían cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral. Los resultados muestran que el nivel de comprensión que puede lograr cada estudiante es diferente en cada caso según la frecuencia y usos que les dan a las conexiones matemáticas que establecieron. Asimismo, el conjunto de conexiones matemáticas identificadas permite establecer un sistema de conexiones asociadas al TFC.

Palabras clave: sistema de conexiones matemáticas, cálculo, análisis temático, preuniversitario.

Abstract

The aim of this paper is to establish the relations of the mathematical connections associate with the Fundamental Theorem of Calculus that were detected in pre-university students. Mathematical connections are assumed as a cognitive process by means of which a person relates or associate two or more ideas, concepts, definitions, theorems, procedures, representations and meanings with each other, with other disciplines or with the real world. Thematic analysis was used to analyze data obtained through task-based interviews to 25 pre-university students who had taken and passed Differential and Integral Calculus subject. The results show that the level of comprehension that each student can achieve is different in each case according to the frequency and uses that they give to the mathematical connections they established. Also, the set of mathematical connections identified allows establishing a mathematical connection system associated with the fundamental theorem of calculus.

Key words: mathematical connections system, calculus, thematic analysis, pre-university.

Introducción

Las Matemáticas por naturaleza, tiene contenidos conectados unos con otros, sin embargo, para fines de enseñanza-aprendizaje, tanto en los programas de estudio, en los libros de texto y en el aula de clases, se presentan en campos separados y, por lo tanto, es posible que activen creencias distintas para cada dominio

(Drageset, 2010). Como consecuencia, los contenidos matemáticos son vistos como desconectados uno de otros (Evitts, 2004). Para evitarlo, se propone que en el proceso enseñanza-aprendizaje se establezca relación entre distintos objetos matemáticos, entre éstos y otras disciplinas y con la resolución de problemas planteados en diversos contextos, es decir, se promueve el uso de las conexiones matemáticas. Esto permitiría a las Matemáticas ser vistas como un campo integrado que posibilitaría además una mejora en la compresión matemática, como lo señalan Businskas (2008), Mhlolo (2012) y Eli, Mohr-Schroeder & Lee (2011).

Hoy día, las conexiones matemáticas son una demanda de la currícula de diversos países y han sido estudiadas desde diversas perspectivas. Por tanto, es pertinente seguir investigando en esa línea para identificar qué conexiones matemáticas hacen los estudiantes del preuniversitario al trabajar diversas tareas en Cálculo. La razón de esto es porque, además de los escasos trabajos que abordan conjuntamente el tema de conexiones matemáticas y las ideas centrales del Cálculo (derivada e integral), ambos juegan un papel preponderante en el aprendizaje de los estudiantes. Por otra parte, la conexión matemática entre la derivada y la integral está cifrada por el TFC. En ese sentido, es pertinente preguntarse si los estudiantes son conscientes de la relación de reversibilidad entre ambos conceptos al resolver tareas específicas de Cálculo como lo sugieren Dolores & García-García (2017).

Por lo expuesto anteriormente realizamos una investigación en la que planteamos dos preguntas de investigación a saber: ¿qué conexiones matemáticas establecen los estudiantes del preuniversitario al resolver tareas de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral? y, ¿qué relación guardan esas conexiones matemáticas y cómo contribuyen a la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)? Por las limitaciones de espacio, en este escrito se discutirá con mayor énfasis la respuesta a la segunda pregunta. Sin embargo, si el lector desea conocer otros resultados relativos a la primera pregunta de investigación puede consultar a García-García & Dolores-Flores (2017).

Las creencias y las conexiones matemáticas

Las creencias están estrechamente asociadas al dominio cognitivo (Drageset, 2010), así como las conexiones matemáticas y la comprensión matemática. Dado que ocurren en la mente del estudiante, entonces éste puede externarlas a través del lenguaje hablado, representaciones semióticas, gestos o producciones escritas. Por una parte, se asume que cuando un concepto matemático es objeto de enseñanza y aprendizaje, el estudiante trata de darle sentido usando sus creencias y concepciones previas. Estos intentos de dar sentido a sus resultados se constituyen en una colección de creencias (Katsberg, 2002) que se incorporan a su sistema de creencias (Pehkonen, 1994). Cuando estas creencias son consistentes con las creencias culturalmente aceptadas sobre el concepto matemático dentro de la comunidad matemática, entonces el estudiante tiene una comprensión matemática sobre ese concepto (Katsberg, 2002). Por otra parte, se acepta que las conexiones matemáticas son producto del sistema de creencias atribuido a cada estudiante, por lo que cada uno establecerá conexiones matemáticas a un nivel diferente (García-García & Dolores-Flores, 2017).

En relación con las conexiones matemáticas, Businskas (2008), las define, por un lado, como aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y, por otro lado, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática. En cambio, en este escrito las conexiones matemáticas se entienden como un "proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real (García-García & Dolores-Flores, 2017, p. 4)". Éstas emergen cuando los estudiantes resuelven tareas concretas y se identifican en sus producciones escritas o en sus argumentos verbales o gestuales. Por otra parte, se asume que las conexiones matemáticas tienen las siguientes características: (1) son relaciones correctas y deben ser útiles en la mejora de la comprensión matemática (Businskas, 2008), (2) una respuesta correcta no implica que el estudiante establece una conexión matemática, pero el uso de conexiones conlleva a respuestas consistentes (García-García & Dolores-Flores, 2017), (3) una parte importante de hacer conexiones matemáticas reside en el uso de diferentes representaciones semióticas (Businskas, 2008; Mhlolo, 2012) y, (4) las relaciones lógicas como la inclusión y la generalización (Businskas, 2008) son parte de establecer conexiones; así como la modelización también es una tipología de conexiones matemáticas (Evitts, 2004).

El Teorema Fundamental del Cálculo

EL TFC es esencial en el desarrollo del Cálculo, sin embargo, dado su complejidad teórica, provoca diversas dificultades en los estudiantes. El TFC relaciona a la derivada y a la integral como operaciones inversas de tal manera que cada uno deshace lo que el otro hace (Stewart, 2010). Matemáticamente, indica que:

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad\qquad a \leq x \leq b$$

Es una antiderivada de f, es decir, $g´(x) = f(x)$ para $a < x < b$.

Usando notación de Leibniz, podemos escribir este teorema como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

cuando f es continua. (Stewart. 2010, p. 369).

La segunda parte del TFC indicado en el libro del mismo autor, se indica que para una función f continua en $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Donde F es cualquier antiderivada de f, esto es $F’ = f$ (Stewart. 2010).

Metodología

La presente investigación es de carácter cualitativo. Para la colecta de datos se utilizó a las entrevistas basadas en tareas que consiste en la interacción, mínima, entre un sujeto (estudiante) y un entrevistador, en relación con una o más tareas presentadas al sujeto por el entrevistador en una forma pre planeada (Goldin, 2000). Para los propósitos de esta investigación se utilizó un protocolo semiestructurado que incorporó tareas de derivada y de integral en tres registros diferentes: algebraico, gráfico y lenguaje escrito (problemas de aplicación que evocaron conceptos de biología y de física). A los participantes se les proporcionaron hojas con las tareas a resolver; mientras éstos respondían cada tarea el investigador hacía preguntas para identificar las conexiones matemáticas que ellos establecían en ese momento. En el estudio participaron 25 estudiantes del preuniversitario (entre 15 y 19 años) del estado de Guerrero, México que habían cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral.

Para el análisis de los datos se utilizó el análisis temático (Braun & Clarke, 2006), cuyo objetivo es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada. Este método se estructura en seis fases:

Fase 1. Familiarizarse con los datos. Se hizo una lectura general de las narrativas de todos los estudiantes una y otra vez, además de que se revisaron sus producciones escritas. Mientras se hizo esto se realizaron anotaciones de algunas observaciones iniciales.

Fase 2. Generar códigos iniciales. Con base a la acepción de conexiones matemáticas adoptada, se buscó en las narrativas frases donde se infirieran conexiones matemáticas que los alumnos hicieron entre conceptos, procedimientos, representaciones, etc.

Fase 3. Buscar temas. Se contrastaron los extractos asociados a cada código para buscar temas potenciales. Se crearon temas que agruparon los patrones respuestas de los estudiantes. Se asumió que cada tema y subtema es una conexión matemática.

Fase 4. Revisión de los temas. Los temas fueron discutidos con profesionales de la Matemática Educativa con experiencia previa en la investigación. Algunos sufrieron modificaciones, asimismo fueron agrupados de acuerdo con el concepto matemático al que estaban asociados. En esta fase se encontraron las relaciones entre las temas y subtemas, de tal forma que se establecieron los sistemas de conexiones matemáticas asociadas al TFC.

Fase 5. Definición y nombre de los temas. En sesiones de trabajo se asignó el título a cada conexión matemática y su respectiva redacción.

Fase 6. Elaboración del informe. Finalmente, se hizo el reporte final del estudio.

Resultados y discusión

El análisis temático permitió identificar 335 conexiones matemáticas asociadas a 23 temas, sin embargo, por limitaciones de espacio en la tabla 1 se presentan sólo las conexiones matemáticas asociadas a la primera parte del TFC. En García-García & Dolores-Flores (2017) se puede encontrar descritas las principales conexiones matemáticas que se detectaron en la resolución de tareas algebraicas.

Tabla 1. *Conexiones matemáticas detectadas en estudiantes preuniversitarios*

Grupo	*Conexión matemática*		*Frecuencia*
Derivada o integral	1. La derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$.		25
	2. La integral de una función polinomial de la forma $f(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$.		24
	3. La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva.		11
		3.1 $f'(a)$ significa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$.	2
	4. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.		11
	5. La constante de integración C …	5.1 … significa una familia de primitivas desplazadas verticalmente en el eje de las ordenadas.	10
		5.2 … siempre acompaña al resultado de una integral indefinida	4
	6. El diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función.		5
TFC	7. La derivada y la integral son operaciones inversas.		22
		7.1. La derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función.	15
		7.2. La integral de la derivada de una función polinomial es la misma función.	12
	8. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada.		14
Conceptos biológicos	9. En $\int r(t)dt = p(t) + C$ la constante de integración C significa población inicial de animales.		11
	10. Calcular la velocidad de crecimiento de una especie significa encontrar la derivada de la representación algebraica asociada a la población total.		14
	11. La integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total.		12

	12. El resultado de $p'(2) = 20$ significa que en el segundo año la población aumentó 20 especies.	7
Conceptos físicos	13. La integral de la función aceleración de un objeto es su velocidad y la integral de la función velocidad es su posición.	15
	14. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración.	14
	15. La velocidad de un objeto en su punto máximo es cero.	13
	16. Encontrar una función primitiva de la posición de un objeto, dada una posición inicial, implica primero calcular una integral y segundo, resolver una ecuación lineal.	8
	17. El resultado de $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en $t = a$.	6

La variabilidad en la frecuencia de las conexiones matemáticas detectadas indica que el nivel de comprensión que los estudiantes pueden lograr es diferente en cada caso. Por otra parte, los datos indican que, similar a las creencias, las conexiones matemáticas también están fuertemente relacionadas formando un sistema. De esta manera, hay una conexión central (Figura 1) relacionada con el concepto superior que es objeto de comprensión por el estudiante y que está determinado por las normas oficiales. Esta conexión central permea en la forma en que los estudiantes resuelven todas las tareas propuestas, además de que rige sus concepciones sobre la derivada y la integral. En García-García & Dolores-Flores (2017) se hicieron los primeros intentos de explicar este sistema de conexiones matemáticas.

Las conexiones matemáticas que los estudiantes establecieron están asociadas a los conceptos de función, derivada, integral, constante de integración, diferencial, al TFC, a los conceptos biológicos y a los conceptos físicos. De ellos, el concepto superior que es objeto de comprensión es el TFC porque relaciona matemáticamente a la derivada con la integral, además de que engloba a los otros conceptos y sirve de soporte para resolver los problemas de aplicación. Esto se observó durante la entrevista ya que los estudiantes en distintos momentos establecieron la conexión matemática “la derivada y la integral son operaciones inversas”, que es en esencia, la primera parte del TFC.

Los datos indican que a partir de esta conexión central hay otras que son derivadas inmediatamente de ellas. A estas se les llamó conexiones derivadas de primer orden. La característica de estas es que están asociadas directamente a los dos conceptos centrales del Cálculo: la derivada y la integral que, en un nivel jerárquico, corresponden a un nivel de comprensión menor en comparación con el TFC. Pero, además, algunas de estas conexiones matemáticas permiten derivar otras, a las que se llamó conexiones derivadas de segundo orden. Por tanto, los datos indican que existe una cadena de conexiones que se derivan una de otras asociadas al nivel de comprensión que tiene cada estudiante. Un estudiante puede establecer esta cadena de conexiones, pero no siempre es logrado por todos.

Por otra parte, entre las conexiones matemáticas existe la relación lógica de implicación (Figura 1). Es implicación porque la existencia de una conexión matemática justifica la existencia de otra de la forma si A entonces B. Esta relación lógica permite distinguir las conexiones matemáticas de primer y segundo orden. El nivel de comprensión de los estudiantes y el sistema de creencias atribuido a uno de ellos determina en gran medida que esta relación lógica entre las conexiones matemáticas se manifieste en la tipología de conexiones que cada uno establece.

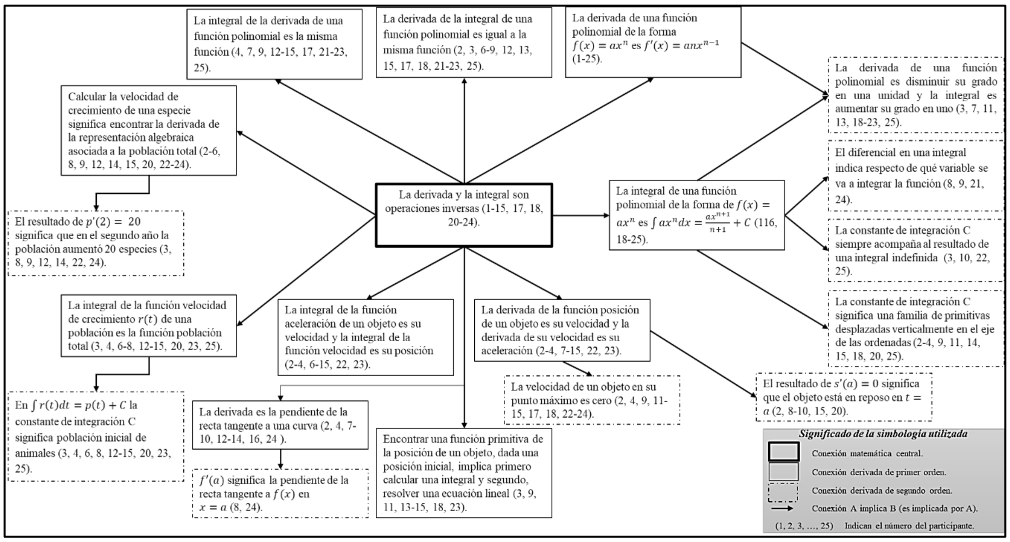

Figura 1. Sistema de conexiones matemáticas asociada a la primera parte del TFC.

A partir de la *figura 1* correspondiente al sistema de conexiones matemáticas asociadas a la primera parte del TFC, se puede plantear lo siguiente:

1. La conexión matemática central es “la derivada y la integral son operaciones inversas”, porque encierra la comprensión de un concepto matemático superior, a saber, la reversibilidad entre dos conceptos claves del Cálculo: la derivada y la integral. A partir de ella, se derivan otras conexiones matemáticas verdaderas (en el sentido de Businskas, 2008) que contribuyen a reconocer esa relación de reversibilidad y que posibilitan la comprensión del TFC tanto en el contexto matemático como en el extramatemático.
2. Conexiones matemáticas como: “la integral de una función polinomial de la forma de $f(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$”, “la derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración”, “la integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total”, entre otras son conexiones derivadas de primer orden. Todas ellas se ven posibilitadas por la conexión matemática central.
3. La conexión matemática “la integral de una función polinomial de la forma de $f(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$” permite que emerjan conexiones matemáticas como: “la derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno”,

"el diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función", entre otras, todas ellas conexiones derivadas de segundo orden. Otras conexiones matemáticas también permiten la emergencia de esta tipología de conexiones (Figura 1).

Conclusiones

En la resolución de las tareas propuestas y en los argumentos verbales y gestuales utilizados por los estudiantes del preuniversitario se detectaron una variedad de conexiones matemáticas (Tabla 1). Las diversas conexiones matemáticas se organizan en torno al TFC formando un sistema, que reconoce la relación inversa entre la derivada y la integral (Figura 1). Estos resultados indican que estos estudiantes han logrado cierta comprensión sobre esta primera parte del TFC, aunque limitados por su sistema de creencias el nivel de comprensión que logran es diferente en cada uno. Finalmente, el estudio sobre las conexiones matemáticas en Cálculo promete resultados interesantes que pueden ser útiles a la investigación, pero también para el diseño de una intervención docente con miras a promover la habilidad de utilizar conexiones matemáticas en situaciones intramatemáticas y extramatemáticas.

Referencias bibliográficas

Braun, V, & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Unpublished doctoral dissertation. Faculty of Education-Simon Fraser University. Canada.

Dolores, C. & García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Bolema, 31*(57), 158 – 180.

Drageset, O. G. (2010). The Interplay Between the Beliefs and the Knowledge of Mathematics Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *12*(1), 30-49.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297-319.

Evitts, T. A. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula.* Unpublished PhD Thesis. The Pennsylvania State University. EE. UU.

García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2017). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* DOI: 10.1080/0020739X.2017.1355994

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching.* New York: McGraw-Hill.

Kastberg S.E. (2002). *Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function.* Unpublished PhD Thesis. University of Georgia. EE. UU.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16(2),* 176-191.

Pehkonen, E. K. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal fûr Mathematic Didaktik,* 15 (3/4), 177–209.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: conceptos y contextos.* México: CENGAGE Learning.