

DIFERENTES INTERPRETACIONES DE LA IMPLICACIÓN: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Isabel García-Martínez, Marcela Parraguez
Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

En esta investigación se presenta un estudio de la implicación en el nivel universitario. Tópico presente en diferentes cursos universitarios y que presenta dificultades para que los estudiantes lo comprendan, debido a sus diferentes interpretaciones. El marco teórico que sustenta esta investigación es la teoría APOE, marco de corte cognitivo que permitió explicar cómo se construyó el conocimiento matemático incluido en la implicación y en el contexto de sus diferentes interpretaciones. Con base en el análisis de actividades aplicadas a estudiantes universitarios y a textos de estudio, se diseñaron descomposiciones genéticas para algunas de las interpretaciones de la implicación.

Palabras clave: implicación, lógica, apoe

Abstract

This investigation shows a study of implication at the university level. This topic is included in different university courses and the students have difficulties to understand it, due to its different interpretations. The cognitive theoretical framework that supports this research is the “APOE” theory, which allowed explaining how mathematical knowledge included in the implication and in the context of its different interpretations was constructed. Based on the analysis of activities applied to university students and on textbooks, we designed genetic decompositions for some of the implication interpretations.

Key words: implication, logic, apos

■ Introducción

En este reporte se presenta un estudio de la implicación en el nivel universitario. Varios autores han reportado que los estudiantes de dicho nivel, presentan dificultades con la comprensión de dicho concepto (Alvarado y González, 2009, 2013; Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Ernest, 1984; García-Martínez y Parraguez, 2017; Reid, 1992). Si a lo anterior se le adiciona el hecho de que la implicación está presente (explícita o implícitamente) en los diversos cursos de matemática, de distintas carreras universitarias, hace que la indagación en este tópico de estudio sea muy relevante.

Pero, ¿qué es la implicación? Desde el punto de vista matemático, una implicación se define, en general, como una proposición de la forma $p \Rightarrow q$, a través de su tabla de verdad, p se denomina antecedente y q

consecuente y es falsa si y solo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Sin embargo, Quine (1950) sostiene que hay, por lo menos, cuatro interpretaciones de las sentencias condicionales (o implicaciones), que son:

- El entendimiento común.
- El conectivo proposicional.
- El condicional lógicamente válido.
- El condicional generalizado.

En el entendimiento común, en general, no se considera que el antecedente pueda ser falso; el conectivo proposicional está definido mediante las tablas de verdad; el condicional lógicamente válido está determinado por las reglas de inferencia y el condicional generalizado es la estructura que rige los teoremas y las definiciones. De acuerdo a Durand-Guerrier (2003), deben tenerse en cuenta estos cuatro tipos de sentencias condicionales para que haya un real entendimiento de la implicación.

En Matemática Educativa, no se han reportado investigaciones sobre la construcción de este concepto desde la Teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema–, referente teórico sobre el cual se basó la presente investigación.

En este escrito se presenta explícitamente la construcción mental dos de las cuatro interpretaciones de la implicación: el entendimiento común y el condicional generalizado.

■ Marco teórico

La teoría APOE es un marco teórico de corte cognitivo que surge a partir de la abstracción reflexiva de la teoría de Piaget. Fue creada por Ed Dubinsky (1996) y desarrollada junto a un grupo de investigadores (Arnon et al., 2014). Según esta teoría la construcción de un concepto matemático (o fragmento de él) puede interpretarse a partir de las estructuras (construcciones) mentales denominadas acción, proceso, objeto y esquema, que se ligan –en la mente de un aprendiz– a través de los mecanismos mentales (abstracciones reflexivas), para aprender dicho concepto. Algunos mecanismos mentales son: interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación. En la figura 1 se muestra la manera cómo se entrelazan las construcciones y los mecanismos mentales relacionados con un concepto matemático determinado.

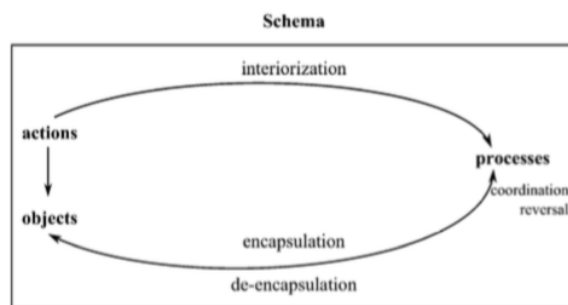


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014, p. 10).

■ Diseño metodológico

La teoría APOE (Arnon et al., 2014) también proporciona un ciclo de investigación formado por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética (DG), diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de los datos. En este reporte se atiende la primera componente del ciclo –la DG–, que es un modelo cognitivo hipotético en donde se plasman las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender la implicación como entendimiento común y como condicional generalizado.

Implicación como entendimiento común

Para esta primera interpretación, se aplicó una actividad individual (números primos) a once estudiantes de segundo año de pedagogía de una universidad chilena, con la finalidad de determinar las estructuras mentales de los conceptos que subyacen en esta interpretación.

Posteriormente se les entregó una segunda actividad (laberinto) para que la realizaran de manera individual y la entregaran en la siguiente clase. Solamente cinco de los estudiantes lo hicieron, los cuales fueron etiquetados como E1, E2, E3, E4 y E5, mientras que el resto de los estudiantes fueron etiquetados como E6, E7, ..., E11.

Las actividades son las siguientes:

Actividad 1 (números primos)

Determine el universo más grande dentro de los números enteros desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera:

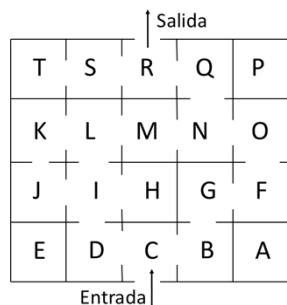
“si n es un número par, entonces $n + 1$ es un número primo”.

- a) ¿Cómo responderían los estudiantes de media?
- b) ¿Cómo respondería usted?

Justifique todas sus respuestas.

Actividad 2 (laberinto) (Durand-Guerrier, 2003, p. 7)

Una persona llamada X logró pasar a través del siguiente laberinto (desde Entrada hasta Salida) sin utilizar la misma puerta (abertura) dos veces.



Se pueden formular frases pertinentes a la situación. Para algunas de estas frases, podemos determinar un valor de verdad (VERDADERO o FALSO); para otras, no tenemos suficiente información para decidir si son verdaderas o no (en ese caso, responda NO SE PUEDE DECIR).

De esta forma, analice cada una de las siguientes seis frases (justificando sus respuestas):

- 1- *X cruzó P.*
- 2- *X cruzó N.*
- 3- *X cruzó M.*
- 4- *Si X cruzó O, entonces X cruzó F.*
- 5- *Si X cruzó K, entonces X cruzó L.*
- 6- *Si X cruzó L, entonces X cruzó K.*

Implicación como condicional generalizado

Para esta interpretación, se analizaron dos textos guías de álgebra lineal, los cuales forman parte de las referencias bibliográficas sugeridas por los programas de estudio de algunas universidades sudamericanas (Grossman, 2008; Lay, 2007), adherido a la experiencia docente de las autoras, esto, con la finalidad de diseñar una DG de esta interpretación de la implicación.

■ Resultados

De acuerdo con la descripción metodológica planteada, el análisis de los documentos evidenció los siguientes resultados, para cada una de las interpretaciones.

Implicación como entendimiento común

De todas las evidencias recopiladas, se han elegido dos porque en ellas se muestran las respuestas que fueron más comunes entre los estudiantes y, a su vez permitieron a las investigadoras proponer elementos para el diseño de una DG.

En general, respecto de la actividad 1, seis de los once estudiantes consideran solamente el caso en el cual el *antecedente de la implicación es verdadero*. Particularmente, E9 determina los números para los cuales el consecuente es verdadero (con algunos errores), le resta 1 a cada uno de los elementos y determina

cuáles de ellos son números pares, o sea, los números para los cuales el antecedente es verdadero (figura 2).

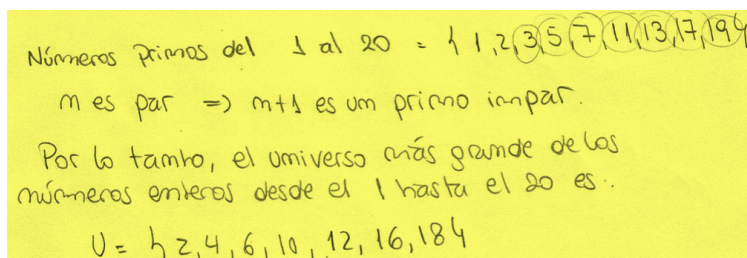


Figura 2. Respuesta de E9 a la actividad 1 b).

En la respuesta a la actividad 2, E4 considera la implicación cuantificada (figura 3), evidencia que permitió incorporar otro elemento –*cuantificar la implicación*–, en el diseño de la DG.

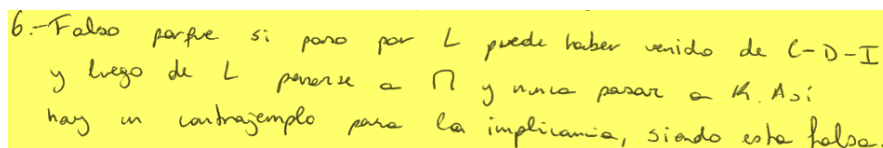


Figura 3. Respuesta de E4 al ítem 6 de la actividad 2.

Otros elementos que constituyen esta DG, fueron determinados de manera análoga: *causalidad de la implicación* y *temporalidad de la implicación* (García-Martínez y Parraguez, 2016). La figura 4 muestra el diseño de la DG para la interpretación de la implicación como entendimiento común.

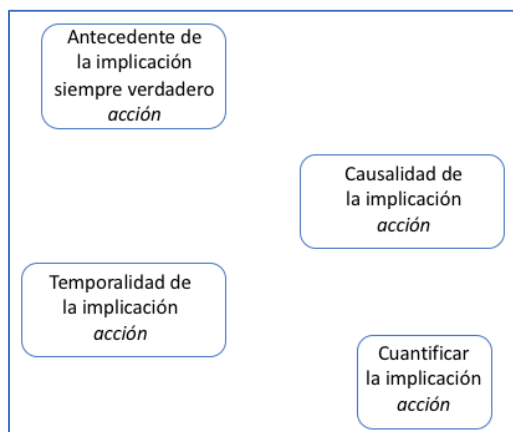


Figura 4. DG de la implicación como entendimiento común.

Es importante señalar que tres de los cinco estudiantes que realizaron las dos actividades, en la primera, consideraron que el antecedente de la implicación debe ser verdadero, sin embargo, en la segunda, donde se les dio la posibilidad “no se puede decir”, responden de manera correcta.

Implicación como condicional generalizado

Al indagar definiciones y teoremas en libros de texto (Grossman, 2008; Lay, 2007), se observaron algunos elementos comunes entre ellos, que están incidiendo en la construcción de esta interpretación de la implicación.

DEFINICIÓN 1	Base Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si i. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. ii. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a V .
TEOREMA 1	Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para V y si $v \in V$, entonces existe un conjunto <i>único</i> de escalares c_1, c_2, \dots, c_n tales que $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$.

Figura 5. Una definición y un teorema del libro de Grossman (2008, p. 332 y p. 333, respectivamente).

A modo de ilustración, se muestra una definición y un teorema (figura 5) del libro de Álgebra lineal de Grossman (2008), los cuales han sido reinterpretados (figura 6) para mostrar conceptos comunes que sustentan el diseño de la DG. De donde se resaltan los conceptos de *función proposicional*, de *antecedente* y *consecuente* y de *implicación cuantificada* (este último no está señalado en la figura 6, ya que abarca toda la definición y todo el teorema).

Definición 1	
$(\forall V \text{ espacio vectorial})(\forall n \in \mathbb{N}^+)(\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V)$	
Si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n , no todos cero tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots, c_nv_n = 0$, entonces	
<u>v_1, v_2, \dots, v_n son linealmente independientes.</u>	
antecedente	
	consecuente
Teorema 1	
$(\forall V \text{ espacio vectorial})(\forall n \in \mathbb{N}^+)(\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V)$	
Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para V y $v \in V$, entonces $\exists c_1, c_2, \dots, c_n$, escalares, únicos tales	
<u>que $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots, c_nv_n$.</u>	

Figura 6. Reinterpretación de la definición y del teorema de la figura 5.

En la definición 1 se observan otras funciones proposicionales, por ejemplo “existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n , no todos cero tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots, c_nv_n = 0$ ” en donde las variables son los vectores v_1, v_2, \dots, v_n del espacio vectorial V .

A partir de estos elementos y la experiencia docente de las investigadoras, se diseñó la DG de esta interpretación de la implicación (figura 7). Consideramos que un estudiante que muestra el concepto de *función proposicional*, lo hace a través de la coordinación de *función* como proceso y de *proposición* como proceso, los cuales debe haber construido previamente.

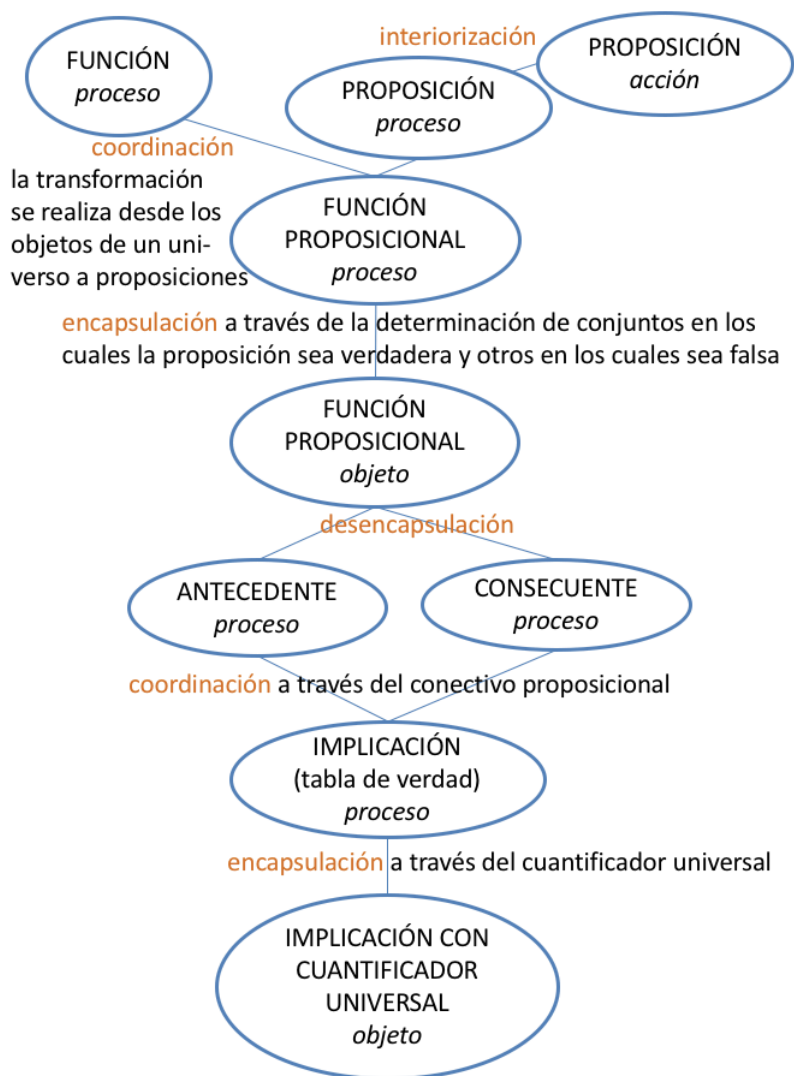


Figura 7. DG de la implicación como condicional generalizado.

■ Reflexión y conclusiones

La única estructura mental presente en la DG de la implicación como entendimiento común, es *acción* y no se evidencian indicios de mecanismos mentales entre los diferentes elementos de la DG. En cambio, en la DG de la implicación interpretada como condicional generalizado, las estructuras mentales que están son *acción* (proposición), *proceso* (proposición, función, función proposicional, antecedente, consecuente e implicación –dada por la tabla de verdad–) y *objeto* (función proposicional e implicación con cuantificador universal). Y los mecanismos mentales son *interiorización*, *coordinación*, *encapsulación* y *desencapsulación*.

Según Gladys Palau (2014), la lógica que trae el estudiante al comenzar un estudio más formal de la misma, es la lógica del sentido común, cuyas características funcionan como obstáculos epistemológicos para la enseñanza-aprendizaje de la lógica clásica. Esta podría ser una de las dificultades para la comprensión de “la implicación” y para relacionar estas dos DG. Al parecer, los esquemas de estas interpretaciones de la implicación no se relacionan entre sí.

En lo que sigue, la investigación pretende diseñar descomposiciones genéticas para las otras interpretaciones de la implicación, validar o refinar todas las descomposiciones genéticas diseñadas, establecer relaciones entre ellas –si existen– y determinar si es posible diseñar una única descomposición genética que incluya las cuatro interpretaciones mencionadas por Quine (1950).

Entre las conclusiones más importantes, sobresalen la necesidad de diseñar actividades para una propuesta didáctica que permita la construcción del concepto de implicación interpretado como entendimiento común y condicional generalizado, como por ejemplo, actividades que incluyan frases contingentes, ya que el desarrollo de éstas les permitirá a los aprendices alcanzar abstracciones reflexivas de encapsulación.

■ Agradecimientos

Las autoras agraden la buena disposición de todos los participantes en la investigación. Una de las autoras es Beneficiaria Beca Postgrado PUCV 2017.

■ Referencias bibliográficas

- Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 73-84.
- Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(1), 37-63.
- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática*, 8(3), 25-41.

- Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics*, 53(1), 5-34.
- Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly* 110, 886-899.
- Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 173-189.
- García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2016). Estructuras mentales para un esquema de la implicación como entendimiento común. Estrella, S., Goizueta, M., Guerrero, C., Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A., Parraguez, M., Ramos, E., Vásquez, P. y Zakaryan, D. (Eds.) (2016). *XX Actas de las JNEM*, ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV.
- García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 128-143.
- Grossman, S. (2008). *Álgebra lineal* (6ta ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Lay, D. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson educación.
- Palau, G. (2014). *Lógica formal y argumentación como disciplinas complementarias*. La Plata: Editorial De la Universidad de La Plata.
- Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching*. (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.
- Quine, W.V.O. (1950). *Methods of Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston.