VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

ELEMENTOS PARA UNA PROPUESTA DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE UN CONJUNTO DE FRACTALES GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL ESCOLAR

Ximena Gutiérrez Figueroa, Marcela Parraguez González
Universidad de Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ximenagutierrez@u.uchile.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Este artículo presenta los avances de un estudio que se propone generar un modelo teórico y práctico basándose en elementos provenientes de dos teorías: APOE y TAD, que posibiliten la incorporación de los fractales geométricos como conocimiento de enseñanza en el aula. Dichos objetos se construyen a partir de conexiones con otros conceptos matemáticos, lo que podría favorecer un tratamiento articulado de la enseñanza de la matemática escolar y la activación del pensamiento intuitivo, por su relación directa con aspectos cotidianos naturales, sociales y económicos, dotando a estos objetos de un amplio potencial formativo.

Palabras clave: apoe, tad, estudio epistemológico, fractales geométricos

Abstract

This paper shows the advances of a study that aims to generate a theoretical and practical model based on elements from two theories: APOE and TAD, which enable the incorporation of geometric fractals as useful knowledge to teach in the classroom. These objects are constructed from connections with other mathematical concepts, which could favour an articulated treatment of the teaching of school mathematics and the activation of intuitive thinking, due to its direct relationship with natural, social and economic daily aspects, providing these objects with a wide formative potential.

Key words: apos, atd, epistemological study, geometric fractals

Introducción

El tratamiento desarticulado de la enseñanza de la matemática se ha puesto en evidencia por distintos investigadores desde hace varias décadas. Por ejemplo, lo menciona Klein (1924) cuando alude al tratamiento atomizado de los contenidos que busca la materialización de las áreas particulares de la matemática tratando de prescindir de las herramientas de otras áreas colindantes, la búsqueda de la axiomatización conduce a una concepción lineal de la estructura y construcción del conocimiento matemático.

Guzmán (2007) pone el acento en la necesidad de no abandonar el carácter empírico, manipulativo e intuitivo en la enseñanza de la matemática en los primeros años de escolaridad, dejando su tratamiento formal para niveles superiores. Lo que se plantea es mostrar un desarrollo de esta disciplina científica más ligado a su evolución histórica y relación con la cultura, haciéndola más cercana e interesante. Aspectos de esta visión también son compartidos por Chevallard (2015), la tradición de mostrar una matemática monumentalista en la que el conocimiento se manifiesta en parcelas específicas a derivado en que los temas tratados puedan ser fácilmente olvidados, la propuesta a destacar el valor de la matemática por su rol en la comprensión del mudo natural y social conlleva un equilibrio entre los paradigmas de las matemáticas puras y el de las aplicadas en pos de aportar a mejores soluciones relacionadas con problemáticas más cercanas al ser humano.

La visión sobre la enseñanza de la matemática anteriormente retratada pone de relieve una problemática vigente durante décadas, desafiando las posturas epistemológicas que sustentan los trabajos de investigación de didactas y docentes avocados al desarrollo de herramientas sustentables para abordar los actuales desafíos educativos.

Estas motivaciones nos llevaron a identificar un conocimiento que conlleva un potencial formativo intrínseco, basado en sus conexiones con aspectos de la vida cotidiana y problemáticas modernas ligadas a otras ciencias. Centramos este estudio en los fractales geométricos como estructuras que permiten comprender procesos estrechamente ligados a la realidad, por favorecer la articulación con otros conocimientos del currículum y promover una re-significación de la matemática escolar. Ya se posee evidencia que avala la premisa de que este conocimiento puede ser reconstruido por estudiantes de nivel escolar secundario (16-18 años) Gutiérrez y Parraguez (2017) presentan un modelo cognitivo-teórico que configuró la base de una secuencia puesta a prueba en el aula recabando elementos conceptuales y procedimentales que emergen en el trabajo de estudiantes que no conocían del tema. Dicha secuencia se sustentó en un estudio epistemológico sobre fractales geométricos que evidenció la naturaleza intrínseca de estas estructuras: su construcción iterativa y su autosimilitud a diversas escalas. Estas características fueron contempladas como base para generar actividades que consideraron elementos geométricos y analíticos, los que fueron puestos a prueba, en el aula.

Los propósitos de la investigación en curso, conllevan dos desafíos esenciales: (1) Disponer evidencia, con sustento teórico, sobre cómo pueden ser construidos los fractales geométricos por estudiantes que no conocen del tema y, (2) Diseñar un constructo epistemológico-didáctico que posibilite la transposición de los fractales geométricos en la sala de clases.

Marco teórico APOE como base del estudio

La Teoría APOE, (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) creada por Dubinsky y desarrollada por otros investigadores (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) está basada en las investigaciones de Piaget (1971) sobre las formas en que un individuo construye y re-construye un conocimiento matemático, proceso que es favorecido por la abstracción reflexiva, mecanismo que favorece la organización de estructuras mentales en esquemas. APOE dispone de un ciclo de investigación propio (Figura 1), el cual se adecúa al trabajo de la Didáctica de la Matemática (DM) como disciplina experimental, proponiendo y poniendo a prueba ciertos modelos predictivos y explicativos sobre el aprendizaje de ciertos tópicos del conocimiento matemático que son propios de la enseñanza. Este ciclo de investigación se inicia con un estudio en profundidad del concepto que interesa investigar, esto junto a la experiencia profesional de quienes hacen el estudio, conlleva al diseño de una Descomposición Genética

(DG), como modelo que permite organizar situaciones de aprendizaje para ser implementadas en el aula. Los datos empíricos son analizados para evaluar la consistencia del modelo y retroalimentar el ciclo adecuando las secuencias de enseñanza o el modelo teórico.

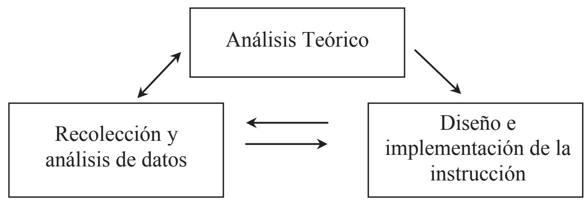


Figura 1. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al. 1996 por Arnón, et al. 2014, p. 94)

Avances del estudio desde marcos teóricos explícitos: articulación de esquemas

APOE ha permitido disponer de fundamentos para generar un modelo cognitivo-teórico denominado Descomposición Genética (DG), que da cuenta de construcciones y mecanismos mentales por los cuales un estudiante podría avanzar en la estructuración de esquemas cognitivos para el aprendizaje de un conjunto de fractales geométricos. Con base a este modelo se diseñaron dos secuencias de actividades escritas, la secuencia del triángulo de Sierpinski (TS) y su homóloga basada en la curva de Koch (CK), las que fueron desarrolladas por los informantes que conformaron los dos casos de estudio. En este proceso emergen esquemas (E_i) que evocan otros conocimientos, algunos de ellos se sintetizan en la Figura 2.

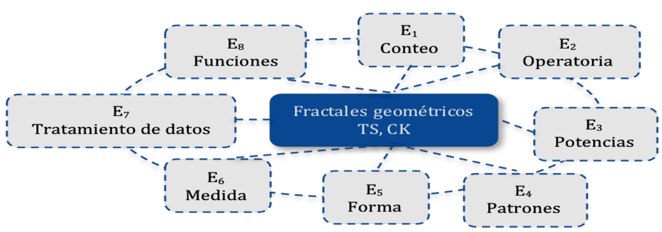
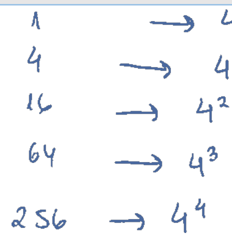
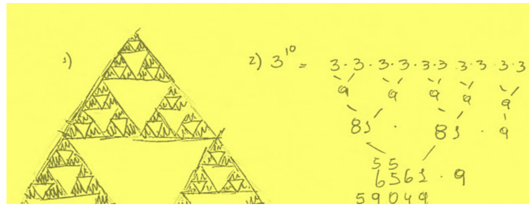


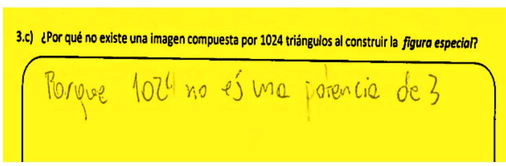
***Figura 2**.* Esquemas emergentes en la construcción de TS y CK

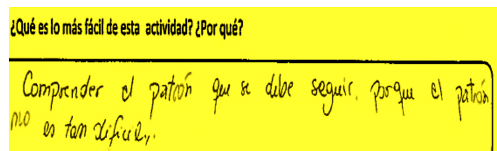
Algunos ejemplos de estas producciones se aprecian en la Tabla 1.

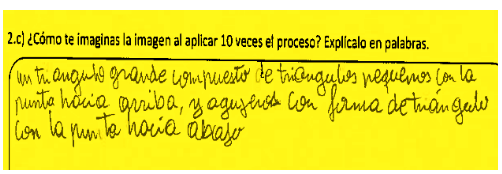
Tabla 1. *Algunos esquemas emergentes en la construcción de fractales geométricos*

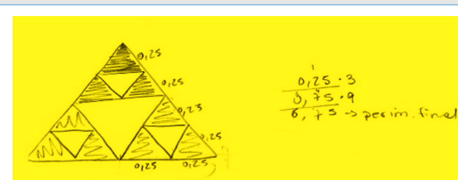
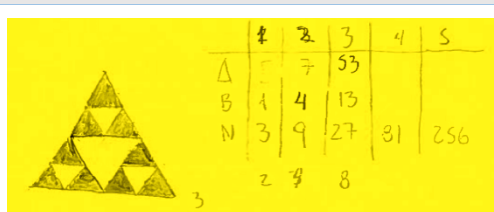
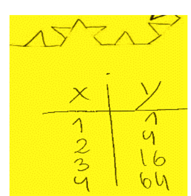
<table>
<tr><th>E_1</th><th>E_2</th></tr>
<tr><td>

Ante la tarea contar los segmentos que conforman la CK en sus primeras iteraciones, este estudiante activa un conteo basado en las potencias de base 4.</td>
<td>

Este estudiante calcula la décima potencia de 10 organizando las cantidades y agrupando factores para determinar la cantidad de partes el TS.</td></tr>
<tr><th>E_3</th><th>E_4</th></tr>
<tr><td>

Transcripción respuesta de E_3: *Porque 1024 no es una potencia de 3.*
La justificación dada por este estudiante frente a una figura del TS que no es parte del proceso, se basa en sus conocimientos sobre potencias.</td>
<td>

Transcripción respuesta de E_4: *Comprender el patrón que se debe seguir porque el patrón no es tan difícil.*
Frente a la tarea de dibujar las primeras iteraciones de la CK, un estudiante alude a la dificultad de encontrar el patrón.</td></tr>
<tr><th>E_5</th><th>E_6</th></tr>
<tr><td>

Transcripción respuesta de E_5: *un triángulo grande compuesto de triángulos pequeños con la punta hacia arriba, y agujeros con forma de triángulo con punta hacia abajo.*
La descripción considera distintas posiciones relativas entre partes de la imagen del TS, que evidencian la construcción del generador.</td>
<td>
Este estudiante determina la longitud de la segunda iteración del TS calculando por fases sucesivas el perímetro fractal.</td></tr>
<tr><th>E_7</th><th>E_8</th></tr>
<tr><td>
La necesidad de organizar datos para responder a la tarea de contar partes de las primeras iteraciones del TS, activa el registro tabular de datos.</td>
<td>

Este estudiante presenta un registro que donde se muestra una dependencia funcional de los datos los que ha rotulado con las variables x e y.</td></tr>
</table>

La evidencia recopilada a la fecha permite proyectar a un conjunto de fractales geométricos como potencial formativo articulador para una enseñanza más integral de la matemática escolar. Como lo proponen Klein (1924) y Chevallard (2015), una visión más integral contempla conceptos que se articulan entre sí dando respuestas a fenómenos o problemas más globales, evitando una enseñanza que encapsula los conocimientos tratándolos como entes aislados unos de otros. En este sentido, los fractales geométricos no solo integran conceptos, algunos de los cuales fueron presentados en la Figura 2, sino también, pueden ser concebidos como modelos matemáticos de fenómenos que acontecen en la vida cotidiana de las personas.

Las actividades presentadas en la Tabla 1, diseñadas con base en las construcciones mentales presentes en la DG, son parte de un conjunto más amplio y muestran algunas vinculaciones de conceptos siendo una primera aproximación a la construcción de un conjunto de fractales geométricos que pueden ser abordados con el currículum de educación secundaria.
No obstante, se hace necesario disponer de herramientas didácticas que hagan posible que este concepto pueda ser tratado en el aula por el profesorado.

Hacia una articulación de marcos

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), (Chevallard, 2007), propone que en toda actividad humana pueden distinguirse, a) un saber hacer, donde se reconocen cierto tipo de tareas y formas de abordarlas, b) un saber, reconocido a partir de los discursos teóricos, que avalan a los primeros. La praxis y el logos conforma así un modelo definido como praxeología que permite describir los proceso de trasposición del conocimiento y profundizar en la compresión de los fenómenos didácticos. La TAD contempla un modelo epistemológico de referencia (MER) que permite profundizar en los saberes y su evolución en los proceso de transposición, antes de llevarlo al aula (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2006), dando paso a recorridos de estudio e investigación.

Los fractales no son parte del currículum escolar obligatorio, por lo que se propone un uso no habitual de dicho modelo: definir elementos epistemológico-didácticos y antropológicos que permitan diseñar praxeologías que faciliten al profesorado la enseñanza de estos objetos.

De esta forma se configura una articulación de marcos a partir de un eje común, el que se ha definido en este estudio como el *eje epistemológico de base.* Los fundamentos para tal definición están dados en los constructos basales de ambos marcos teóricos presentados en esta comunicación: APOE y TAD se sostienen en mayor o menor medida, en el desarrollo epistemológico del conocimiento, así la aparente disyunción entre premisas cognitivas y antropológicas encuentran una articulación en esta propuesta de investigación.

Esta propuesta de articulación de marcos, pretende responder a uno de los fines de esta investigación: disponer de elementos para que la transposición didáctica sea posible. En este sentido, no basta estudiar solo lo que los estudiantes pueden construir cognitivamente, lo que es abordado desde APOE, sino también, cómo los docentes de aula pueden llevar a cabo tales procesos de enseñanza, considerando un concepto que no es parte del currículum obligatorio. Este problema que se aborda desde la TAD, la que se usa en este estudio como herramienta para construir elementos, que desde este marco se denominan:

tareas y técnicas, que respondan a la praxis, y por otra parte disponer del logos: elementos que sirvan para la interpretación y argumentación de las mismas, denominados elementos tecnológicos y teóricos.

A modo de conclusión y proyección

La Tabla 2 presenta las categorías establecidas para generar el modelo cognitivo que originó la secuencia para TS y CK la que incluye un estudio epistemológico para abordar este propósito. Desde este estudio se pretende configurar un trabajo con docentes de aula con la finalidad de definir algunas praxeologías situadas al contexto nacional con el propósito de desarrollar en conjunto tareas para la enseñanza de lo que denominamos un conjunto de fractales geométricos.

Se contempla un estudio de los programas de formación del profesorado, así como la evolución del currículum escolar nacional a modo de enriquecer el *eje epistemológico de base* que posibilite alcanzar los objetivos propuestos.

Tabla 2. *Categorías para el análisis teórico de los fractales geométricos (APOE)*

Estudio histórico-epistemológico	Usos y aplicaciones recientes en la Matemática y otras ciencias	Usos y aplicaciones recientes en enseñanza y DM
Representantes fractales: *analíticos *geométricos *experimentales Rechazo de sus primeros representantes.	*Procesos deterministas y aleatorios; estudio del caos y dimensión fractal. *Generación computacional de imágenes fractales. *Modelación de órganos humanos, fenómenos de la naturaleza y comportamientos sociales.	*Análisis del currículum escolar. *Tratamiento lúdico de la geometría. *Actividades para la clase. *Aspectos cognitivos. *Obstáculos sobre el infinito

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile (CONICYT), en virtud de la adjudicación de la Beca Folio 21161593.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer-Verlag

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática 18,* (2), 37-74.

Chevallard, Y. (2007). Passé el présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológicas de lo didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Intellectual and Attitudinal Challenge, 8 july-15july, 2012, COEX, Seul, Korea* (pp. 173-187). doi: 10.1007/978-3-319-12688-3

Gutiérrez, X. y Parraguez, M. (2017). *El triángulo de Sierpinski.* Medellín: Sello editorial de la Universidad de Medellín.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 043*, 19-58.

Klein, F. (1924). *Elementary Mathematics: from an advanced standpoint: aritmetic, algebra, analysis.* New York: Dover.

Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology*. New York: W.W. Norton y Company INC.