EL CARÁCTER ESTABLE DEL CAMBIO Y SU ARTICULACIÓN CON LOS NIVELES DE CONSTANTIFICACIÓN: UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Jesús Enrique Hernández-Zavaleta, Ricardo Cantoral
CINVESTAV-IPN. (México)
jesus.hernandez@cinvetav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Esta investigación es parte del programa de investigación sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) cuyo objetivo consiste en caracterizar formas de significación de la variación en escenarios diversos. La *problematización del saber matemático* como metodología historiza y dialectiza en el análisis de textos originales, se presenta el análisis sobre la sección *De la Invención de las Fuerzas Centrípetas* de Newton (1687) y el trabajo sobre el problema colineal de los tres cuerpos tratado por Euler (1767), se muestra como *los niveles de constantificación* y *la búsqueda del carácter estable del cambio* son medios claves para tratar los procesos variacionales.

Palabras clave: socioepistemología, pensamiento-y-lenguaje-variacional, cambio, variación, problematización

Abstract

This work as part of a research program on Variation Language and Thinking is aimed at characterizing the variation meaning in different settings. We use problem-solving mathematical- knowledge as a methodology that provides a historical and dialectical character for the analysis of authentic texts. We present the analysis of Newton's "*From the invention of Centripetal Forces" (1687)* and the work on the co-linear problem of the three bodies by Euler (1767). So, we showed how the constant-levels and the search of the stable character of the change constitute key aids to work with variation processes.

Key words: sociepistemology, variational-language-and-thinking, change, variation, problematization

Introducción

El interés de este reporte es mostrar el análisis de los ejemplos que se han utilizado para la construcción y fortalecimiento de los mecanismos de *la búsqueda del carácter estable del cambio* y *los niveles de constantificación* (Cantoral, 1990; 2016). El primero tiene su origen en los *Philophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687), en la relación de lo que él llamaba las razones primeras, últimas y los momentos implican el uso de una forma de razonamiento que tiene como base la *pequeña variación*. El segundo encuentra su ejemplo en el artículo *Considérations sur le probleme des trois corps* (Euler, 1775) en la cual se describe la solución del problema colineal de los tres cuerpos y da argumentos de porqué comenzar su estudio con esas consideraciones, como complemento se consultó *De Motv Rectilinium: Trivm corporvm se mvtvo attrahentivm* (Euler, 1767).

El contexto de este escrito se adscribe a una investigación en curso que tiene como objetivo la búsqueda de regularidades en las prácticas predictivas en el trato de situaciones variacionales de naturaleza errática o caótica (Hernández Zavaleta & Cantoral, 2017). La hipótesis de partida consiste en asumir que la articulación de elementos como la elección adecuada de las variables y los órdenes de variación anteceden a la predicción y los mecanismos: *niveles de constantificación* y *la búsqueda del carácter estable del cambio*; ambos en correlación directa con prácticas socialmente compartidas involucradas en los procesos de construcción de lo variacional. Lo anterior da lugar a una forma particular de razonamiento para tratar con el cambio y la variación.

Elementos metodológicos

Centrados en la dimensión epistemológica de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2016) que se ocupa de la naturaleza epistemológica de los conceptos matemáticos, dando respuesta a la pregunta ¿qué debe la producción del saber a la experiencia y al contexto? De esta forma en la problematización (como método) se realiza el análisis de textos originales o paradigmáticos de una época que resultan clave para el desarrollo del campo teórico de interés para un investigador, con ella, es posible identificar que los saberes matemáticos nacen con una práctica de referencia específica. La propuesta es *historizar* y *dialectizar* las obras matemáticas que dieron lugar a las matemáticas presentadas en propuestas didácticas actuales, es decir, no basta con la descripción temporal de la evolución de un concepto, sino, es imperante cuestionar las formas que toma en una época determinada y explorar su evolución hasta su génesis y mostrar su dinamismo en la forma de presentarlo. Posteriormente con base en esta información se está en posición para proponer instrumentos que permitan intervenir en el aula o recabar datos experimentales.

Existen cinco elementos que conforman la problematización del saber matemático, todos actúan de forma tal que brindan información sobre un concepto, sin embargo, dependiendo de la naturaleza del concepto, las obras estudiadas o el interés del investigador se evidencian unos más que otros. La

Figura 1 resume estos cinco elementos.

Figura 1. *Elementos para la problematización del saber matemático*

En la *génesis histórica* se plantea la génesis de los conceptos y los procesos asociados, no sólo como un enfoque epistemológico sino evidenciando las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron la construcción de conocimiento a lo largo de su evolución histórica, en otras palabras, provee los elementos para la reconstrucción de la génesis de prácticas o la epistemología de prácticas.

El análisis de la *didáctica de antaño* se desprende de la forma como era concebida la enseñanza de la matemática, asimismo el grado de importancia de ésta en el panorama del conocimiento general y de su relación con otras áreas de conocimiento. Así a través de dicho análisis, es posible detectar concepciones de la enseñanza en las que se muestran diversas formas de difusión de la Matemática conformada por necesidades temporales y contextuales de los matemáticos de una época determinada.

La *fenomenología intrínseca* de los conceptos matemáticos es un constructo que restituye al significado actual mediante el conjunto de otros significados construidos a lo largo de la génesis conceptual y que la propia historia de las ideas y las prácticas eliminó. Resignifica al uso social de un concepto y lo dota de nuevas fuentes de significación que permiten elaborar nuevos discursos y formas de presentación de la matemática escolar.

Los *constructos característicos* se reconocen a través del análisis de los procesos "reales" por los que atravesó la construcción de cada concepto matemático; posibilitan la identificación de analogía y procesos inductivos que definen formas personales de aproximación al objeto. Así se llega a definir estilos de pensamiento matemático y se evidencian estructuras cognoscitivas que posibilitan la adquisición de nuevos conocimientos.

La *praxis educativa* se refiere a la reflexión sobre la práctica educativa, es la forma en que los resultados, conjeturas, modelos, teorías, métodos o técnicas develados por los análisis en los elementos anteriores inciden en el aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes, así la relación biunívoca entre la investigación y la praxis educativa asegura los aportes de la investigación afinados progresivamente en su aplicación e iteración con distintas poblaciones.

Sobre la elección de los textos analizados

La elección de los textos que se han analizado en esta investigación tiene su génesis en las ideas fundacionales de la TSME, es decir, I. Newton es referencia obligada debido a las aportaciones que se hicieron para el sustento de la teoría, aquí se retoma que una de las ideas centrales para la construcción de los elementos del Cálculo: las cantidades infinitamente pequeñas para la búsqueda de la ley. Luego L. Euler es una forma distinta de acuñar las cantidades infinitamente pequeñas, partiendo de los resultados en su trabajo sobre el problema de tres cuerpos que interactúan gravitacionalmente sobre la línea recta se obtiene que uno de los tres cuerpos es de masa infinitamente pequeña, esta idea es retomada para los estudios posteriores del problema, particularmente Poincaré (1898) la utiliza haciendo variar el tamaño de la masa en cantidades pequeñas.

Primer ejemplo: *De la Invención de las Fuerzas Centrípetas*

El primer ejemplo se sustenta en las leyes físicas que durante largo tiempo han dominado el quehacer de la Física, y en general el desarrollo científico, es la forma en que Newton concebía el movimiento de un

cuerpo sobre órbitas, en el cual pensar en las tangentes se vuelve de vital importancia debido a las fuerzas que actúan sobre él.
Proposición I, Teorema I, Sección II (*De la Invención de las Fuerzas Centrípetas):*

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Las áreas, descritas por cuerpos que giran sujetos a un centro de fuerza inmóvil por radios unidos a dicho centro, están en el mismo plano inmóvil y son proporcionales a los tiempos

Fuente especificada no válida.

Se debe demostrar que mismas áreas se recorren en tiempos iguales y se encuentran en el mismo plano. Newton recurre a la geometría haciendo el diagrama que aparece en la

Figura 2 (que hoy se diría de fuerzas, en su demostración no recurre a ninguna expresión vectorial).

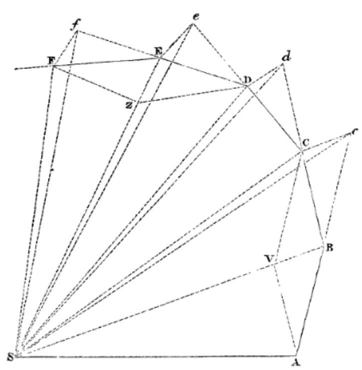

***Figura 2** Diagrama que muestra la interacción de fuerzas sujetas al centro S, la trayectoria del cuerpo es ABCDEF.*

La demostración comienza suponiendo el tiempo en intervalos iguales y un cuerpo moviéndose en línea recta, por su fuerza innata, en el primer tiempo de AB. Continúa, haciendo uso de la Primera Ley de movimiento que dice, todo cuerpo permanecerá en reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas aplicadas sobre él. Así el cuerpo seguirá su camino hasta el punto *c,* de tal forma que $AB = Bc$. Se trazan los radios SA, SB y Sc y escribe que los triángulos ΔASB y ΔBSc tienen áreas iguales por tener un lado con el mismo tamaño y compartir otro. Otra forma de verlo es que ambos triángulos comparten la misma altura, como se muestra en la
Figura 3 y al tener el mismo tamaño en la base sus áreas son iguales.

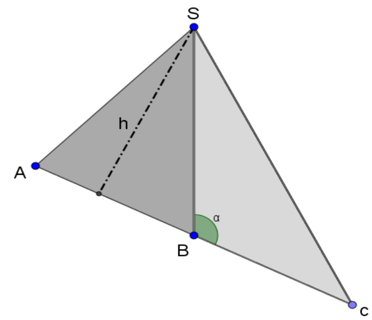

Figura 3 *Se muestra que ambos triángulos comparten la altura h y tienen la misma base, por lo tanto, sus áreas son iguales.*

Continua la demostración diciendo que cuando el cuerpo llega a B actúa sobre él una fuerza centrípeta instantánea que lo dirige hacia S, su trayectoria se modifica en la dirección d, así forma un paralelogramo trazando una recta desde c paralela a BS que interseca a Bd en C.

Para demostrar que las fuerzas están en el mismo plano recurre, al Corolario I de sus leyes, ahí plasma que la diagonal de un paralelogramo es la fuerza resultante de las otras actuando juntas en sus lados, entonces el cuerpo que inicia su movimiento en B se encontrará en C, por lo tanto, están en el mismo plano que el triángulo ΔASB. Con argumentos similares si una fuerza centrípeta actúa sobre C, D, E y F, demuestra que todas las trayectorias BC, CD, DE, EF están en el mismo plano y que los triángulos y que el área de los triángulos ΔCSD, ΔDSE, ΔESF, etcétera, son iguales. Por lo tanto, describen áreas iguales en tiempos iguales.
El *carácter estable del cambio* se presenta, cuando hace que el número de triángulos aumente y su área disminuya hasta el infinito, de esta manera el perímetro último de ADF pertenecerá a una curva. Entonces debido a la fuerza centrípeta, el cuerpo es continuamente separado de su tangente y siempre recorrerá áreas en tiempos proporcionales. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestra la demostración en latín y se encierra en un recuadro el texto que da indicios de como la búsqueda de la estabilidad del cambio permea en las ideas de Newton.

Este teorema dio pie al desarrollo del concepto de magnitud del momento angular y su conservación. Utilizando lo trabajado en la demostración de este teorema, Cantoral (1990, pág. 34) rescata la forma en que Newton prueba la ley del cuadrado inverso utilizando las leyes de Kepler. Poniendo énfasis en los movimientos rectos que hace el cuerpo, el inercial sobre la recta tangente y el de caída libre hacia el centro S y tomando al sistema Sol – Tierra como preliminar para llegar a ley de la gravitación universal y el planteamiento de la interacción gravitacional de dos o más cuerpos de masas diferentes.

Segundo ejemplo: *el problema colineal de los tres cuerpos*

En esta sección se mostrará las formas de expresión de los *niveles de constantificación* en la manera en que Euler (1767; 1775) plantea el problema de la interacción gravitatoria de tres masas de diferente tamaño y hace algunas acotaciones para obtener la primera solución particular homográfica (todas sus configuraciones son semejantes entre sí) conocida, también se retoman las interpretaciones que hace García (2007) sobre el álgebra y los conceptos actuales que se retomaron de estos escritos de Euler.

Primer nivel de constantificación: Euler (1775) comienza haciendo referencia al problema planteado por Newton y la dificultad que ha representado para los grandes geómetras de la época y comenta que aún no se ha llegado a la solución perfecta del problema. En los párrafos del 1 al 6 comenta que habrá de comenzar por el caso más simple, considerando el caso rectilíneo antes de comenzar a buscar en secciones cónicas y menciona que la solución general, debe esperar a encontrar una solución al caso de tres cuerpos que se mueven sobre una línea recta. Compara el caso con el problema de dos cuerpos que se atraen mutuamente de Newton y el caso de caída libre en el vacío planteado por Galileo; de esta forma plantea casos en los que existen variables que debe ser constantificadas para el manejo adecuado de los datos y proceder a una descripción de la ley que rige esos movimientos.

A partir del párrafo 7 comienza a plantear el problema y una matemátización sintetizada, utilizando la notación propuesta en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se propone trabajar con tres cuerpos de masas $m_1=a$, $m_2=b$ y $m_3=c$ que se mueven sobre una línea recta, manteniendo una distancia proporcional entre ellos y sus posiciones dadas por $r_1(t)=x$, $r_2(t)=y$ y $r_3(t)=z$, donde $x < y < z$ como se ve en la

Figura 4, las distancias p y q son cantidades que deben permanecer constantes en las trayectorias, es decir, al saber cómo es su comportamiento se resuelve el problema.

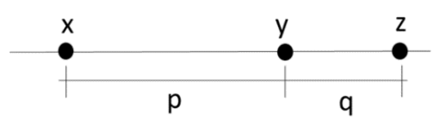

Figura 4 *Configuración sobre una línea recta del problema de los tres cuerpos.*

El problema al que se enfrenta Euler se matematiza mediante tres ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de las tres partículas, de esta forma, Euler convierte el problema en algo puramente analítico y sigue *constantificando* cuando propone que el sistema S puede ser reducido a otro de solo dos ecuaciones diferenciales en términos de las distancias p y q entre las partículas, es decir, $p = y - x$ mientras que $q = z - y$. Así hace que el sistema dependa de las distancias y sea manejable para los métodos conocidos en ese momento.

Segundo nivel de constantificación: Siguiendo el escrito (Euler, 1775), en el párrafo 9, hace una constantificación, sobre las variaciones, en la que considera un orden menor del problema que plantea, enfatiza que existe un caso en el que todas las dificultades desaparecen; cuando las distancias entre x y y conservan la misma relación entre ellas, es decir, cuando $q=np$, trabaja con el menor orden de variación que le permite transformar el problema de ecuaciones diferenciales en uno algebraico (y una ecuación diferencial de variables separables.

Ecuación 1

$$-(a+b)n^5-(3a+2b)n^4-(3a+b)n^3+(3c+b)n^2+(2c+2b)n+b+c=0$$

Ecuación 2

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{E}{p^2}$$

La Ecuación 1 es un polinomio de quinto grado y resolviéndola se obtiene el valor de n; asume la existencia de una raíz positiva, esto se comprueba por la regla de los signos de Descartes, ya que solo existe un cambio de signo en el polinomio. Por otro lado, el comportamiento gráfico de algunas condiciones iniciales de la

Ecuación 2 se muestra en

Figura 5, se observa que las condiciones iniciales en el cuadrante positivo decrecen conforme pasa el tiempo.

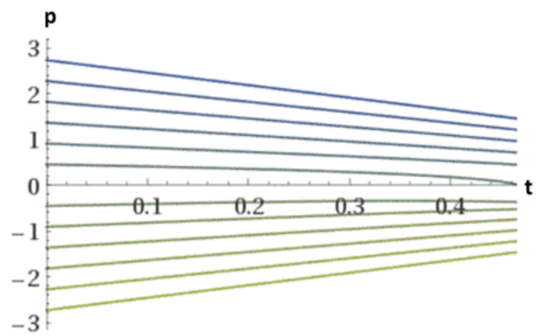

Figura 5. *Comportamiento gráfico de algunas condiciones iniciales, las positivas decrecen.*

En el párrafo 10 Euler habla del comportamiento de las soluciones, como $p = y - x$ dice que x se aproxima a y. La respuesta a cómo cambia la distancia entre estas dos partículas se ve en el comportamiento logarítmico de la función p, es decir, *crece cada vez más lento*, recurriendo a un segundo orden de variación se interpreta que la masa de y es *infinitamente pequeña* en comparación con un cuerpo de masa E debido a que su atracción gravitacional disminuye conforme se acerca. De esta manera se expresa el segundo momento de *constantificación* en el trabajo de Euler sobre el problema restringido de los tres cuerpos en su caso más simple. Este resultado es incorporado en los trabajos futuros de Euler sobre el Problema de los Tres Cuerpos y su uso se propaga en el tiempo hasta formar parte fundamental de la *búsqueda del carácter estable del cambio* en personajes como Langrange y Poincaré entre otros.

Reflexiones finales

La determinación del *carácter estable del cambio* es parte intrínseca de diversas *prácticas de referencia* en las que el cambio y la variación tienen un papel fundamental, así se debe considerar que la forma en que se expresa depende de las *prácticas socialmente compartidas*, que se dan en un contexto determinado; por ejemplo, un médico regula la cantidad de medicamento que se le aplica a un paciente dependiendo de su fisiología, así recurre a pequeñas variaciones que le permiten mantener un estado de salud viable para vivir. Otro ejemplo al que se puede recurrir es al balanceo de un péndulo invertido, que se puede construir fácilmente al poner sobre la palma de la mano un extremo de una barra con un peso en el otro, la mano debe hacer pequeñas variaciones en sus movimientos y en la dirección adecuada para mantener el estado de estabilidad de la barra.

Pensar en situaciones de comportamiento errático en contextos deterministas obedece, de cierta forma, a que los modelos matemáticos intrínsecamente presentan dinámicas no predecibles para todo tiempo, dicho de otro modo, en algún momento de tiempo no es posible saber cuál es el estado sucesivo. La fenomenología del sistema dinámico está llena de estados inestables, por lo que las prácticas matemáticas inmersas cambian en torno a la necesidad de evidenciar una aproximación al *carácter estable del cambio*, la emergencia de otras *acciones, actividades y prácticas* distintas a las que usualmente se encontraban en el paradigma mecanicista proponiendo una nueva relación con el saber y por lo tanto una forma de construcción social de conocimiento matemático y en conjunto con los *niveles de constantificación* conforman un sistema de elementos propios del estudio de la variación. Las formas de expresión de estos elementos han ayudado al estudio de la significación de la variación en la transición de casos de predicción a los no predecibles, en trabajos de Poincaré (1898), Lorenz (1963) y May (1976).

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1990). Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de “el Prædiciere y lo Analítico”. México: Tesis de Doctorado, CINVESTAV.

Cantoral, R. (2016). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático (Segunda ed.). México: Gedisa.

Euler, L. (1767). De motv rectilineo: trivm corporvm se mvtvo attrahentivm. *Euler Archive*, 144-151.

Euler, L. (1775). Considérations sur Probleme des Tois Corps. *Opera Omnia*, 194 -220.

García, A. (2007). Euler y la mecánica celeste. *Miscelánea Matemática, 45*, 67-86.

Hernández Zavaleta, J. E., & Cantoral, R. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1009-1017.

Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, 130-141.

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature*, 459-467.

Newton, I. (1687). Philophiae Naturalis Principia Mathematica. En P. N. *Mathematica, Bookman*, G. (edit).

Poincaré, H. (1898). Sur la stabilité du systéme solaire. *Scient*, 538-547.