

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y ACTUARÍA

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Antonio Pérez González, Ileana Borja Tecuatl
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
lhernan@fcfm.buap.mx, jimy-67@hotmail.com, iborjat@fcfm.buap.mx

Resumen

En este reporte presentamos evidencias de las estructuras y mecanismos mentales relacionados con el concepto transformación lineal, que se hacen presentes en estudiantes de las Licenciaturas en Matemáticas Aplicadas y Actuaría después de aprobar un curso tradicional de Álgebra Lineal en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). El cuestionario que nos permitió recabar dichas evidencias tomó como base al propuesto por Roa (2008). El objetivo fue conocer estas construcciones mentales para hacer algunas recomendaciones didácticas que impacten favorablemente en el aprendizaje de este concepto.

Palabras clave: álgebra Lineal, transformaciones, apoe

Abstract

This report presents the evidence of mental structures and mechanisms related to the concept of linear transformation shown by students of the bachelor's degree of Applied Mathematics and Actuary, after having passed a traditional course of Linear Algebra in the Faculty of Physical Mathematical Sciences at the BUAP. The questionnaire, that allowed us to gather such evidence, was based on the one proposed by Roa (2008). The objective was to know these mental constructions to make some didactic recommendations to nurture the learning of this concept.

Key words: linear Algebra, transformations, apos

■ Introducción

Álgebra Lineal es una materia que se encuentra en los programas de matemáticas de diferentes carreras tanto en ciencia como en ingeniería y economía. En distintas investigaciones (Dorier, 2000; Dorier & Sierpinska, 2001; Sierpinska, 2000) se reportan dificultades asociadas a la naturaleza del álgebra lineal que la hacen una materia difícil para los estudiantes; por ejemplo, el alto nivel de abstracción de sus conceptos y los distintos modos de pensamientos que deben estar presentes para comprenderla. De entre los conceptos que causan mayor dificultad para los estudiantes se encuentran las transformaciones lineales, y es en este concepto que centramos nuestra atención en este artículo. Recuperamos las

investigaciones al respecto de Roa (2008) y de Roa y Oktaç (2010, 2012) para estudiar la construcción del concepto de transformación lineal en estudiantes de matemáticas aplicadas y actuaría. Nuestro interés en este tema proviene de las dificultades observadas en nuestros estudiantes y compartidas con las reportadas en los trabajos mencionados.

■ Antecedentes

Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) realizaron una investigación sobre la introducción geométrica de los conceptos de vectores, vector propio y transformación lineal, así como las implicaciones que dicho enfoque genera en las concepciones de los estudiantes y en la que buscaron evitar el obstáculo del formalismo del concepto transformación lineal. En palabras de estos autores: “El obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes que operan a nivel de la forma de expresiones sin ver que estas expresiones se refieren a algo más que a sí mismas” (Sierpinska et al., 1999, p.12).

En su investigación utilizaron el software Cabri-Géomètre II debido a sus características dinámicas y la posibilidad de realizar representaciones geométricas y aritméticas simultáneas de vectores y transformaciones lineales, lo que consideraron apropiado para la comprensión de dichos conceptos matemáticos. Al iniciar el experimento a los estudiantes nunca se les proporcionó la definición formal de transformación lineal. Se pretendía que al finalizar las actividades propuestas, los estudiantes tuvieran la capacidad de proporcionar una definición de transformación lineal.

Los investigadores reportaron que la conservación de la suma vectorial no apareció de manera explícita en la definición de los estudiantes del concepto transformación lineal e incluso la condición $T(v + w) = T(v) + T(w)$ fue interpretada como una especie de proporcionalidad.

Posteriormente, Uicab y Oktaç (2006) desarrollaron una investigación sobre el problema de extensión lineal, el cual consiste en determinar una transformación lineal dadas las imágenes de los vectores de una base. Se buscaba identificar el obstáculo del formalismo, identificar las características del pensamiento teórico en los estudiantes, haciendo mayor énfasis en la detección del pensamiento sistémico. El objetivo de la investigación se centró en: “Observar la presencia de conexiones entre conceptos y su naturaleza, basándonos en observaciones empíricas” (Uicab y Oktaç, 2006, p.471). La investigación incorporó el software Cabri-Géomètre II, y consistió de seis módulos. Los cuatro primeros se enfocaron en conocer los comandos del software, así como los conceptos de vector, coordenadas de un vector en una base y cambio de base en un ambiente geométrico, los módulos cinco y seis se enfocaron en el desarrollo del concepto transformación lineal donde se les proporcionó la definición formal.

Los resultados que obtuvieron fueron los siguientes: los estudiantes no establecieron una conexión entre los conceptos de base y transformación lineal e hicieron referencia a las transformaciones basándose en intuiciones relacionadas con su propia experiencia.

Con los resultados obtenidos encontraron evidencias del obstáculo del formalismo en un contexto geométrico, debido a que los estudiantes manipularon objetos concretos (vectores y construcciones geométricas relacionadas con ellos) pero que carecían de significado para ellos y sólo lo interpretaron como la necesidad de hacer algo.

En el trabajo presentado por Molina y Oktaç (2007) describen el tipo de concepciones sobre la transformación lineal adquiridas específicamente en un contexto geométrico basándose en las ideas planteadas por Fischbein (1987, citado en Molina y Oktaç, 2007, p.243) sobre la intuición y los modelos intuitivos. La conjetura central de su investigación fue que algunos estudiantes asocian la idea del movimiento con las transformaciones lineales. Lo que concluyeron fue que el concepto transformación lineal se degrada con el tiempo y solamente persiste la idea de transformación.

Como la mayoría de los cursos que se imparten en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, el de Álgebra Lineal se imparte de manera tradicional, siguiendo el índice de algún libro, mediante una clase expositiva y la resolución de ejercicios por parte de los estudiantes.

Con esta investigación nos propusimos identificar la forma en la que un grupo de estudiantes ha construido el concepto de transformación lineal, después de haber aprobado un curso de Álgebra Lineal impartido de manera tradicional. Nos apoyamos en la teoría APOE para analizar las estructuras y los mecanismos mentales de estos estudiantes. Específicamente, tomamos como base la descomposición genética propuesta por Roa (2008) y Roa y Oktaç (2010, 2012), así como algunos de los problemas que ellas presentaron para el diseño del instrumento de recolección de datos.

■ Marco teórico

APOE es el acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, es una teoría desarrollada por Dubinsky (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget, para describir la construcción de objetos matemáticos específicos. Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (Interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y generalización) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) las cuales no necesariamente ocurren de manera secuencial.

Un individuo posee una concepción acción de un concepto matemático si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo estímulos externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso del concepto si puede realizar la misma transformación enteramente en su mente, sin necesidad de realizar todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. Un esquema es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados en la mente del individuo de manera consciente o inconsciente en una estructura cognitiva coherente.

La investigación basada en la teoría APOE tiene incorporado un ciclo de investigación compuesto por tres etapas: (1) Análisis teórico del concepto. (2) Diseño e implementación de la enseñanza o de instrumentos para recabar información después de la enseñanza. (3) Observación, análisis y verificación de datos. La primera etapa toma en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable en la construcción del concepto. Este camino describe las construcciones y mecanismos mentales que un estudiante puede realizar para la construcción de un concepto matemático. A esta descripción se le denomina descomposición genética del concepto. La segunda etapa consiste del diseño e implementación de la enseñanza, cuyas actividades están destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. En la tercera etapa la ejecución de la enseñanza permite la oportunidad de recolectar datos y analizarlos; los resultados obtenidos mediante la aplicación de los instrumentos deben ser analizados mediante la descomposición genética preliminar para detectar qué

elementos no fueron considerados y cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente en efecto son requeridas y cuáles no se perciben. Con esta información puede validarse o refinarse la descomposición genética, y tras sucesivas repeticiones del ciclo de investigación, se puede dar una descripción cada vez más apropiada de las construcciones mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico.

■ Metodología

Se siguió el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE. En la etapa 1 se utilizó la descomposición genética refinada propuesta por Roa y Oktaç (2010), ver la figura 1. En la etapa 2, el cuestionario propuesto por los mismos autores, pero con algunas modificaciones que se explican más adelante. En la etapa 3 se analizaron las producciones de los alumnos para detectar las estructuras y los mecanismos mentales propuestos en la descomposición genética.

El instrumento se aplicó en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la BUAP durante el semestre de otoño de 2016. Participaron 42 estudiantes que estaban cursando la materia de Programación Lineal y que ya habían aprobado un curso de álgebra lineal; 24 pertenecen a la Licenciatura en Actuaría y 18 a la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Todos contaron con 120 minutos para responder.

El cuestionario está compuesto por seis problemas con incisos y puede consultarse en Pérez (2016). El primer problema tiene como finalidad detectar si los estudiantes presentan una concepción acción del concepto transformación lineal; la finalidad de los problemas dos, tres y cinco es mostrar si los estudiantes presentan una concepción proceso del concepto; con el ejercicio cuatro pretendemos observar la percepción geométrica que tienen los estudiantes cuando se aplica una transformación lineal con dominio y codominio en R^2 . Finalmente, el ejercicio seis fue diseñado explícitamente para detectar si los estudiantes poseen una concepción objeto del concepto transformación lineal; para ello indagamos si los estudiantes consideran las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial.

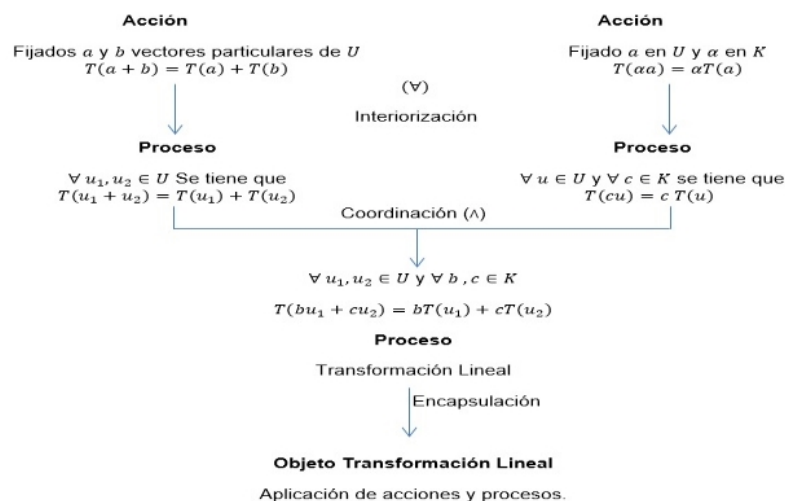


Figura 1. Descomposición genética refinada (Roa, 2008, p.112)

El ejercicio seis se compone de tres incisos; en el primero se proporciona una transformación lineal y se pide que el estudiante busque otra transformación lineal que al sumarse con la que se le proporcionó, también sea una transformación lineal. En el segundo inciso se cuestiona si se puede concluir que los sumandos son transformaciones lineales cuando la suma es una transformación lineal. En el tercer inciso se cuestiona si se puede concluir que un sumando es una transformación lineal cuando el otro lo es y la suma de ambas transformaciones también. En todos estos incisos se requiere que el estudiante sea capaz de reconocer la estructura y características generales de las transformaciones que se le aportan, y se espera que sea capaz de proponer transformaciones con características similares, así como de realizar operaciones con ellas. Al reconocer su estructura, pensar en cualquier otro elemento que comparta sus propiedades y operar con ellas, el estudiante demuestra una concepción objeto de las transformaciones lineales. En particular, que las percibe como elementos de un espacio vectorial de transformaciones del mismo tipo.

■ Resultados

Como ya se había señalado con anterioridad los resultados empíricos fueron analizados con la ayuda de la descomposición genética. Los criterios utilizados durante el análisis fueron los siguientes:

Consideramos que un estudiante tiene una concepción acción si puede encontrar las imágenes de los vectores dadas las funciones, pero consideran que la preservación de la suma de dos vectores particulares del dominio y la multiplicación de un vector por un escalar particular del campo son condiciones suficientes para afirmar que la transformación dada es lineal.

Para el análisis de la concepción proceso consideramos dos etapas de abstracción: la concepción proceso de las propiedades de una transformación lineal, como primera etapa, y la concepción proceso del concepto en sí, como segunda. Consideramos que un estudiante posee una concepción proceso de las propiedades si demuestra la linealidad de una transformación mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera individual, o en caso de no ser una transformación lineal si demuestra que no se cumple alguna de las dos propiedades, ya sea con un contraejemplo o de forma general. Afirmamos que un estudiante cuenta con una concepción proceso del concepto cuando demuestra la linealidad de una transformación mediante el cumplimiento simultáneo de ambas propiedades. Es decir, demuestra que una función es una transformación lineal si preserva combinaciones lineales. Diremos que un estudiante posee una concepción objeto del concepto, si considera las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial.

El análisis de los datos mostró que las concepciones de los estudiantes varían según la carrera que estudian, por lo que, a pesar de que no era un objetivo de la investigación el comparar el desempeño de los estudiantes según su formación académica, consideramos adecuado y útil presentar los resultados por separado. Las evidencias encontradas sobre la concepción que lograron los estudiantes se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. *Tabla comparativa de la concepción construida por los estudiantes según su carrera de estudio*

Concepción construida	Estudiantes de Actuaría	Porcentaje (%)	Estudiantes de Matemáticas Aplicadas	Porcentaje (%)	Participantes totales	Porcentaje general (%)
Acción	3	13%	1	6%	4	10%
Proceso	14	58%	10	56%	24	57%
Objeto	7	29%	7	39%	14	33%
Total	24	100%	18	100%	42	100%

Como se puede observar en la tabla, es mayor el porcentaje de estudiantes de la Licenciatura en Actuaría que permanecieron en una concepción acción del concepto transformación lineal que el de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

De igual manera hay más estudiantes de Actuaría que de Matemáticas Aplicadas que lograron una concepción proceso. Sin embargo, es importante señalar que la mayoría de ellos evidencian solo una concepción proceso de las propiedades y no del concepto. Un 60% de estudiantes de Matemáticas Aplicadas evidenció la concepción proceso del concepto, mientras que un 14 % de los de Actuaría se ubicó en este nivel (estos porcentajes no aparecen en la tabla 1). Por lo que debemos resaltar que la concepción lograda por los estudiantes de Matemáticas Aplicadas es más abstracta que la conseguida por la mayoría de los estudiantes de Actuaría. Esto se respalda al observar que un mayor porcentaje de estudiantes de Matemáticas Aplicadas logró una concepción objeto del concepto, comparado con el de estudiantes de la carrera de Actuaría que lograron esta concepción. Dichos estudiantes respondieron solo uno de los tres incisos del problema 6, con lo que en realidad muestran que su concepción objeto es incipiente; y solo dos estudiantes de Matemáticas Aplicadas fueron capaces de responder con argumentos sólidos el resto de los incisos, con lo que demostraron una concepción objeto más robusta.

Los datos ponen en evidencia que tras haber aprobado un curso de álgebra lineal bajo una instrucción tradicional, la concepción construida por la mayoría de los participantes no les permitió pensar las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial que pueden ser operados dentro de éste como entes abstractos sin perder sus propiedades. Esto impidió que pudieran realizar acciones sobre ellas y pensar en sus propiedades de forma estructural y no únicamente operativa para casos particulares.

En la figura 2 se puede observar la respuesta al primer inciso del ejercicio 2 de un estudiante de actuaría con etiqueta EA20, quien muestra una concepción acción del concepto transformación lineal. Este estudiante no logró interiorizar las propiedades que caracterizan a este objeto matemático ni generalizarlas a elementos arbitrarios del espacio vectorial.

Ejercicio 2 Determine si la función dada es una transformación lineal

a) $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $T(A) = a+b+c+d$
 donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $2 \in \mathbb{F}$

① $T(A) = 10$ $T(A+B) = T \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = 36$ ② $T(2A) = 20$
 $T(B) = 26$ $\therefore T(A) + T(B) = T(A+B)$ $2T(A) = 20$
 $T(A) + T(B) = 36$ $\therefore T(2A) = 2T(A)$
 \therefore Si es una trans. lineal

Figura 2. Ejemplo de la respuesta de un estudiante con una concepción Acción.

En la figura 3 se muestra otro ejemplo de una respuesta al mismo ejercicio 2 inciso a del estudiante etiquetado como EMA41 quien da evidencia de una concepción proceso de las propiedades. Finalmente, en la figura 4, la respuesta de un estudiante (EA4) quien logró una concepción proceso del concepto.

2. $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ $T(A) = a+b+c+d$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(a)

- Sea k una constante
 $T(kA) = T \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = ka + kb + kc + kd = k(a+b+c+d) = kT(A)$.
- Sea $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$
 $T(A+B) = a+e+b+f+c+g+d+h = (a+b+c+d) + (e+f+g+h) = T(A) + T(B)$

$\therefore T$ es una transformación lineal.

Figura 3. Ejemplo de estructura mental concepción proceso de las propiedades

2. a) P.P. $T(\lambda A + B) = \lambda T(A) + T(B) \quad \forall A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda T(A) + T(B) = \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$

$= (\lambda a_1 + b_1) + (\lambda a_2 + b_2) + (\lambda a_3 + b_3) + (\lambda a_4 + b_4) = T(\lambda A + B)$

$\therefore T$ es lineal

Figura 4. Ejemplo de estructura mental concepción proceso del concepto

■ Conclusiones

Afirmamos que la descomposición genética que consideramos en nuestra investigación es, en general, una buena herramienta de análisis debido a que describe adecuadamente la manera en que los estudiantes encuestados construyeron el concepto transformación lineal.

El grupo de estudiantes encuestado mostró diferencias en el nivel de abstracción alcanzado, lo cual podría explicarse por los objetivos y cantidad de materias teóricas propias de cada carrera. Al momento de cursar la materia de Álgebra Lineal los estudiantes de la carrera de Matemáticas Aplicadas a tuvieron que haber aprobado dos materias más de matemáticas puras que los de la carrera de Actuaría. Esto pudo haber

contribuido al desarrollo de habilidades que les permitieron interiorizar, generalizar y en algunos casos, encapsular el concepto en estudio.

A partir del análisis de las respuestas se sugiere que los estudiantes trabajen con distintas funciones lineales en las que se le permita verificar que el cumplimiento de las dos propiedades de una transformación lineal, para la totalidad de los elementos del dominio, y no solo de casos particulares, es equivalente a la preservación de combinaciones lineales.

Finalmente, consideramos de suma importancia que los estudiantes tengan más oportunidades de reflexión que les permitan desarrollar una concepción objeto del concepto. Como trabajo a futuro se plantea el utilizar los resultados de esta investigación para el diseño de una secuencia de aprendizaje que permita la construcción de este concepto hasta la concepción objeto.

■ Referencias bibliográficas

- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.
- Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra*, (pp. 3-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.L. & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. In D. Holton et al. (eds.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Molina, J. G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.
- Pérez, A. (2016). *Construcciones mentales del concepto transformación lineal bajo la teoría APOE en estudiantes de ciencias exactas*. Tesis de Licenciatura no publicada, FCFM, BUAP.
- Roa, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV- IPN.
- Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Roa, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 199-232.
- Sierpinska, A., Dreyfus, T. and Hillel J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), pp.7-40.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Uicab, R. y Oktaç, A. (2006) Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 459-490.