

ANÁLISIS EXPLORATORIO SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MATRICES Y FORMAS CUADRÁTICAS, Y SU RELEVANCIA EN EL ESTUDIO DE SECCIONES CÓNICAS PARA ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA

Camilo Higuera, Hernaldo Millar, Guisell Sepúlveda

Universidad Central de Chile. (Chile)

calejandrohiguera@gmail.com, h.millar01@gmail.com, guisell.s.g@gmail.com

Resumen

La presente investigación se basa en una Ingeniería Didáctica como método de investigación, diseñando una secuencia didáctica que permita generar una propuesta de inclusión de contenidos de nivel superior y analizar los aprendizajes logrados a partir de la aplicación de una secuencia didáctica para la enseñanza de las matrices y formas cuadráticas a estudiantes de la asignatura Álgebra y Modelos Analíticos. Es posible considerar que dicha asignatura no responde a la profundización de contenidos especificados en el Decreto 220 de Educación, ya que el Ministerio de Educación de Chile no ha re-evaluado y realizado ajustes al programa que sigue este curso, evidenciando que los enfoques no se encuentran contextualizados ni ahondan en la búsqueda de las competencias necesarias para una sociedad del conocimiento del siglo XXI. Este estudio, se realizó en base a la metodología investigación-acción, la que pretende, realizar una práctica reflexiva social en la que interactúan la teoría y la práctica en miras de establecer cambios en una situación estudiada.

Palabras clave: cónicas, curriculum, formas cuadráticas, ingeniería didáctica, matrices, secuencia didáctica.

Abstract

The current research work is based on a Didactic Engineering as the method of investigation. It involves the design of a didactic sequence that allows us to include higher level contents and to analyze the students' acquisition of knowledge from the application of a didactic sequence for the teaching of matrix and quadratic forms in the subjects Algebra and Analytical Models. It is possible to regard that such subject does not correspond to the deepening of contents specified in 220 Education Decree, since the Education Ministry of Chile has not re-evaluated and readjusted the course program, what shows that the approaches are not contextualized nor go deeply in the needed skills for the XXI century knowledge society. This study has been based on the research-action methodology which aims to carry out a social reflexive practice in which theory and practice interact in order to establish changes in a studied situation.

Key words: conics, curriculum, quadratic forms, didactic engineering, matrix, didactic sequence.

■ Planteamiento del problema

La asignatura de Álgebra y Modelos Analíticos ha quedado como un programa de estudio que merece una revisión, no tan solo porque los contenidos de enseñanza media han cambiado radicalmente en los últimos ocho años, sino para los programas de estudio, sin embargo, luego de realizar un análisis al plan diferenciado de III° Medio es posible notar que no cumple con implementaciones didácticas.

Lo que se denota como orientaciones didácticas dentro del programa de estudio referente a la asignatura de Álgebra y Modelos Analíticos, es más bien una descripción de algunas de las características del lenguaje algebraico y cómo se construye a partir de las propiedades correspondientes, también menciona que dentro de los objetivos del plan diferenciado se encuentra el entregar herramientas a los estudiantes para que estos sean capaces de profundizar en los contenidos estudiados durante I° y II° Medio. Así mismo lo menciona el MINEDUC:

...Es importante que los alumnos y alumnas logren percibir el álgebra como una herramienta que generaliza y, en consecuencia, está directamente relacionada con las demostraciones; se sugiere invitar constantemente a los estudiantes a la reflexión y a diferenciar los casos particulares del general. (2001, p.10)

Es posible observar que el programa de estudio carece de propuestas didácticas, si bien sugiere a los docentes invitar a sus estudiantes a realizar reflexiones, no es posible evidenciar situaciones didácticas que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

Al analizar las actividades que se proponen en el programa de estudio solo se puede observar que se entregan indicaciones al docente, no supone posibles errores, ni se evidencia el interés en cómo los estudiantes son capaces de reflexionar o encontrar respuestas a ciertos conflictos matemáticos.

Además es importante rescatar lo señalado por el CINDA en la introducción del libro “El proceso de transición entre Educación Media y Superior”.

Se debe considerar la necesidad de establecer instancias bipartitas de coordinación, en las cuales estén presentes los dos niveles educacionales: medio y superior, y que ayuden a perfeccionar el nivel de la enseñanza media y a tomar sus condiciones reales de funcionamiento como un elemento fundamental para el diseño de las asignaturas iniciales de la formación de profesionales. (2011, p. 20)

En base a lo anterior y tomando en cuenta el programa de estudio del plan diferenciado de matemática para estudiantes que cursan III° Medio, resulta interesante realizar un análisis exploratorio del cual es posible generar conexiones con contenidos de la asignatura Álgebra Lineal de educación superior, específicamente el tema de formas cuadráticas. Es aquí donde se desprende la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aprendizajes logran, a partir de la implementación de una secuencia didáctica, estudiantes que cursen la asignatura Álgebra y Modelos Analíticos con los contenidos de matrices y formas cuadráticas?

■ Estructura teórica del reporte

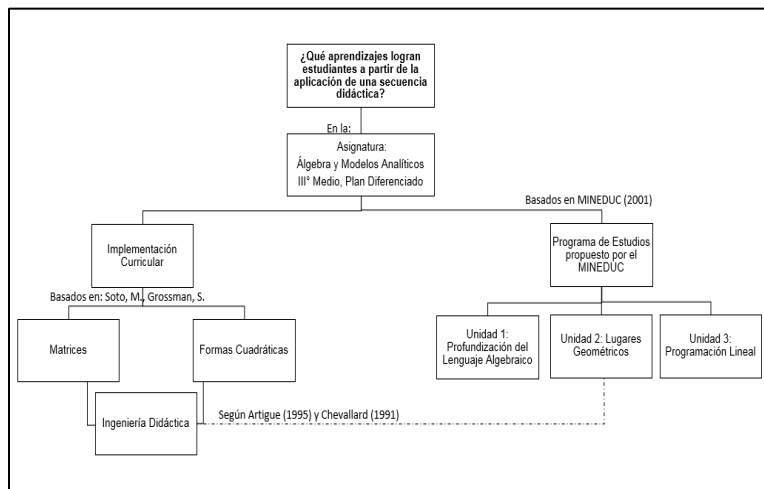


Figura 1. Mapa conceptual Estructura Teórica

En síntesis, esta investigación se basará en la implementación de una secuencia didáctica de acuerdo con la teoría de Brousseau, se ha seleccionado esta metodología por el hecho que permite realizar secuencias didácticas las cuales permiten ordenar secuencialmente un contenido determinado. Cuyo objetivo es obtener mejoras a partir del contraste entre el análisis a priori y a posteriori, esto en directo beneficio para los estudiantes, de tal manera que les resulte fácil la interiorización de los nuevos conceptos. Según el programa de estudio del MINEDUC, con respecto al curso de Álgebra y Modelos Analíticos se orienta la profundización de contenidos matemáticos como complementos de lo propuesto en los programas de estudio en la asignatura de matemática en la formación general. Las unidades que se plantean tienen como principal objetivo el desarrollo de las habilidades de modelación y análisis geoanalíticos en el plano cartesiano.

La propuesta de la secuencia didáctica contempla la inclusión de los contenidos de matrices y formas cuadráticas, como nuevos temas dentro de la unidad del plan diferenciado Lugares Geométricos, esto debido a la conexión realizada entre las secciones cónicas y las formas cuadráticas, desde una visión de la geometría analítica. La nueva propuesta curricular entregada por el MINEDUC apunta a formar estudiantes integrales, con el fin de desarrollar todas las habilidades posibles para su futuro específicamente, dentro de los desafíos emanados por el diagnóstico elaborado para la propuesta curricular, se encuentra un elemento muy importante para la formación de los estudiantes que cursan la educación científico-humanista, donde se señala que es necesario redefinirla, creando espacios de reflexión, con el fin de contestar a las inquietudes educativas de la realidad en Chile (MINEDUC, 2017). En virtud de lo expuesto por el MINEDUC, es posible establecer que desde el punto de vista de Artigue, la ingeniería didáctica permite al docente generar una secuencia de clases, organizadas y articuladas, que permitan construir un proyecto de aprendizaje que transcurra el tiempo.

■ Metodología implementada.

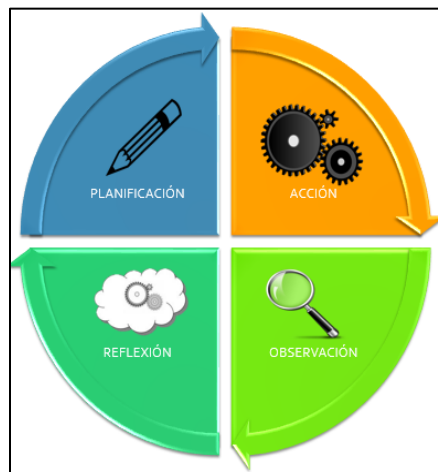


Figura 2. Diseño Investigación-Acción

En este punto es preciso tener en claro que el propósito de la investigación es realizar un análisis exploratorio sobre el aprendizaje de las matrices y formas cuadráticas, junto con ello la relevancia del estudio de las secciones cónicas para estudiantes de enseñanza media. Por lo anteriormente mencionado, se opta por la utilización del método de Investigación-Acción. Este método fue introducido el año 1944 por Kurt Lewis como un programa de acción social. Dentro de las características de este diseño se puede entender que su finalidad es intentar explicar “lo que sucede” esto significa desarrollar un esquema que contextualice la situación de los actores y su entorno. En resumen, a lo que se denominó “explicación” es más bien efectuar una comprensión de la realidad, evitando algún tipo de comparación o asimilar la realidad en base a algún estereotipo. (Rodríguez, Herraiz, Prieto, Martínez, Picazo, Castro y Bernal, 2011).

El método de investigación-acción está ligado al paradigma socio crítico quien busca una relación entre lo práctico y lo teórico, transformando la estructura de vínculos sociales para buscar respuestas a dilemas específicos dados por lo anterior. Además, se caracteriza por ser un paradigma que utiliza la autorreflexión, donde los miembros son participantes activos buscando la independización de estos. (Martínez, 2011)

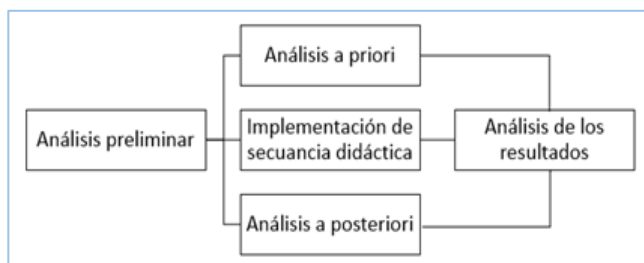


Figura 3. Fases Ingeniería Didáctica

Para lograr el desarrollo de esta investigación se opta por la utilización de herramientas propias de la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno, y Moreno. 1995) lo que se describe a continuación en la Figura 3.

Dada la factibilidad de los centros educativos para desarrollar la práctica profesional, se escoge mediante un muestreo del tipo intencional o de conveniencia el curso III° Medio del Liceo Bicentenario Provincial Santa Teresa de Los Andes de la comuna de Colina, Santiago de Chile para realizar un análisis exploratorio sobre la implementación de metodologías de enseñanza de nivel superior a estos alumnos sobre el tema de matrices y formas cuadráticas respectivamente.

Algunas características de este establecimiento son: de dependencia municipal, se encuentra en un grupo socioeconómico de nivel medio, donde la mayoría de los apoderados han declarado tener entre 12 y 13 años de escolaridad y un ingreso del hogar que varía entre \$450.001 y \$700.000, entre 31,01% y 50% de los estudiantes se encuentran en condición de vulnerabilidad social. (Recuperado de www.simce.cl). Para efecto del análisis, se escoge el curso III° Año Educación Secundaria (Álgebra y Modelos Analíticos), el cual es dividido en dos grupos, compuestos por 41 y 25 estudiantes. Considerando una muestra total de 66 estudiantes, donde la muestra es intencionada, de modo de establecer un muestreo intencional o de conveniencia. En base a lo anteriormente mencionado, es que los cursos III° Medios son una variable no controlable, ya que estos están compuestos por el azar natural al igual que los alumnos que componen los cursos de Álgebra y Modelos Analíticos.

Finalmente es importante establecer la calidad de la investigación, para eso se presentan en la Figura 4, las estrategias y realizaciones para lograr los criterios de rigor de la investigación. Este esquema se basa en un diseño planteado por Suárez, en su investigación “El saber pedagógico de los profesores de la Universidad de Los Andes Táchira y sus implicaciones en la enseñanza”.

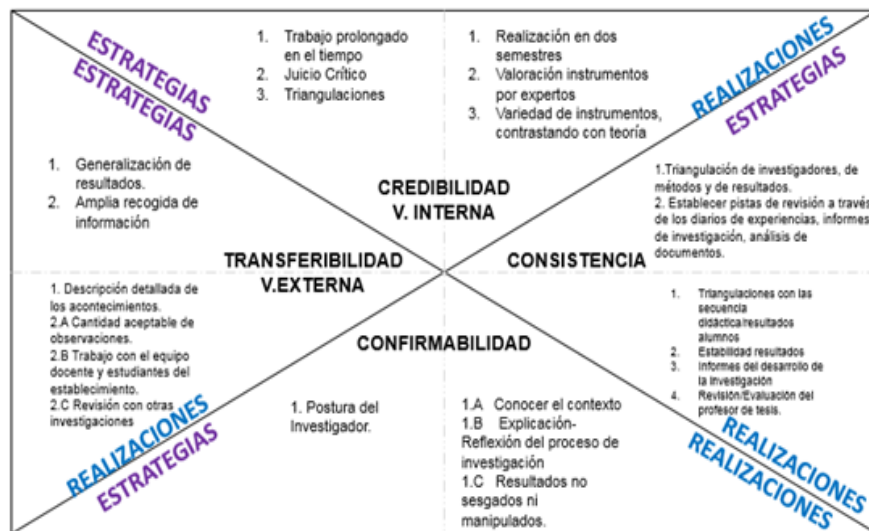


Figura 4. Síntesis criterios de rigor científico

■ Análisis de algunos problemas.

Para esta investigación, hemos tomado 3 ejemplos como relevantes y que resultan interesantes de profundizar. El problema N° 1, cuyo objetivo era “Determinar y reconocer problemas que implican la adición o sustracción de matrices, considerando que la matriz debe ser del mismo orden para poder sumar o restar términos correspondientes.” Al codificar las respuestas se evidenció que los estudiantes en su totalidad comprendieron el problema como una adición de matrices, se entiende que para efectuar el proceso de adición de matrices deben cumplir con la condición de que sean de igual orden. De acuerdo a las respuestas entregadas se destaca lo que indica Pérez (2008):

Dadas dos matrices del mismo orden, A y B, se define su suma como otra matriz, C, del mismo orden que las matrices sumando cuyos elementos se obtienen sumando a cada elemento de la primera matriz, A, el correspondiente elemento de la segunda matriz sumando, B. (p.8)

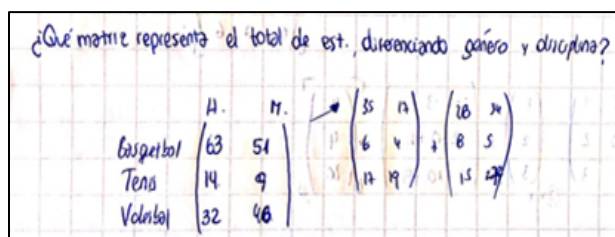


Figura 5. Representación Estudiantes P1

Otro ejemplo fue el problema relacionado con la multiplicación de matrices donde los estudiantes en su mayoría contestaron respondiendo a lo establecido, teniendo presente las condiciones para efectuar la multiplicación. Nuevamente se presenta la dificultad de argumentación frente a la respuesta de los gastos efectuados por las sucursales. Sardá habla de la argumentación como Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten.

En la Figura 6 se presenta un caso donde un grupo de estudiantes no lograron efectuar la matriz de gasto de forma correcta debido a que no consideró lo que señala Soto (2013) quien indica:

La matriz producto, se obtiene multiplicando elementos de la fila *i* de la matriz A por cada elemento de la columna *j* de la matriz B y finalmente se suma. Además, para multiplicar matrices el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

Figura 6. Representación Estudiantes P2

Finalmente el problema relacionado con la rotación de cónicas el 94% de los estudiantes lograron:

- Determinar de forma matricial la sección cónica en rotación.
- Calcular los autovalores y autovectores, y si son ortogonales-ortonormales.
- Reconstruir la ecuación matricial para determinar la cónica en su ecuación principal.
- Identificar y graficar la sección cónica.

Para lograr estos propósitos se recurrió a relaciones con la asignatura de Física del establecimiento, ya que, deben conocer los vectores ortogonales y ortonormales para la resolución de problemas de fuerza y movimiento, tal como muestra la Figura 7.

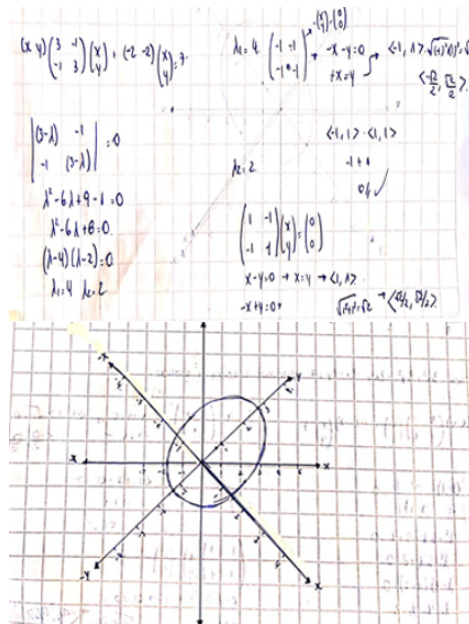


Figura 7. Representación Estudiantes P2

■ Análisis de los resultados

Para llevar a cabo esta investigación se han establecido como instrumentos para la recogida de la información un test que corresponde al inventario de conocimiento de los estudiantes denominado Test KPSI, luego tenemos la Secuencia Didáctica y finalmente un conjunto de reactivos (evaluación).

En lo que respecta al Test KPSI como Test de autopercepción de los conocimientos que tienen los estudiantes permitieron en esta investigación que el diseño de instrumentos y secuencia didáctica fuera el correcto. Tras la aplicación de la secuencia didáctica planteada para la enseñanza de las matrices y formas cuadráticas se puede observar que la ordenación de contenidos cumplió coherentemente con los pasos propuestos por la Ingeniería Didáctica. La secuencia didáctica bien ejecutada y planificada permitió al docente que al finalizar la unidad de aprendizaje propuesta se obtuviera mayores aprendizajes logrados, debido a que la construcción de la secuencia no se rige para un contexto general como país, sino que está creada en función de un grupo de estudiantes en específico. Es muy importante reconocer que el “contexto” donde se desarrolló esta investigación permitió desenvolver de mejor manera el proyecto didáctico, debido al capital cultural e intelectual de los estudiantes participantes de esta investigación, quienes desarrollaron su autonomía, y fueron capaces de dar respuestas a problemas aplicados a nuevas áreas de la matemática.

En la actualidad, la sociedad del siglo XXI no sólo debe poseer la información, sino que también es necesario que los estudiantes sean capaces de interpretar, aplicar, relacionar y comprender los aprendizajes propuestos en la enseñanza de las matemáticas, ya que estas habilidades desarrollan en el estudiante las capacidades científicas necesarias para otras disciplinas o áreas.

■ Conclusiones

Considerando los objetivos específicos, es que se hace posible concluir en esta investigación que, al realizar el diseño de una secuencia didáctica en base a una Ingeniería Didáctica respecto a las matrices y formas cuadráticas, resulta exitosa su implementación. Se pudo observar que esto se debe a una correcta contextualización hacia un determinado grupo de estudiantes, lo que permitió obtener buenos resultados por medio de la organización de las clases en función de las problemáticas en estudio y del ritmo de aprendizaje de los estudiantes. Por medio de esta secuencia, es posible reafirmar que la ingeniería didáctica como método de investigación exclusivo de la educación matemática, permite a los investigadores realizar actividades reflexivas que hacen posible mejorar las prácticas docentes dentro de las aulas. La aplicación de manera secuencial de los contenidos de matrices y formas cuadráticas, presentaron los mayores y menores aprendizajes tras la aplicación del reactivo final de la secuencia didáctica, evidenciando que los estudiantes son capaces de operar expresiones matriciales a través de problemas de enunciados con la adición y la identificación de secciones cónicas con rotación de los ejes cartesianos y su gráfica respectiva, a partir del método de las formas cuadráticas. En síntesis, se puede determinar que el objetivo general se cumple en gran medida, respaldado por las triangulaciones con la teoría en el análisis de cada pregunta, ya que, si bien la secuencia didáctica presentó falencias al momento de la ejecución por factores estructurales y externos, permitió de igual forma tratar los contenidos de educación superior y lograr considerablemente los aprendizajes esperados.

Esta investigación sigue un enfoque mixto, basado en el paradigma socio-crítico y con una muestra intencionada, es por esto, que no se hace posible generalizar los resultados a otros tipos de establecimientos educacionales, sin embargo, genera la posibilidad de que cada establecimiento educacional construya secuencias didácticas específicas para sus estudiantes para avanzar así en la alfabetización matemática de la población estudiantil en Chile. Además, para poder ahondar en el tema de investigación planteado, es que es posible reformular la pregunta orientadora, quedando de la siguiente manera: ¿Qué otras temáticas de nivel superior son posibles de implementar en estudiantes que cursan el Plan de Formación Diferenciada de Matemática?

■ Referencias bibliográficas

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Editorial Iberoamericana. Bogotá. Colombia.
- Brousseau, G. (1981). Problemas de Ingeniería Didáctica. *Didáctica de las Matemática*. Francia
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica* (1era.ed.). Editorial AIQUE. Francia.
- CINDA. (2011). *El proceso de transición entre Educación Media y Superior*. MINEDUC. Chile.
- Godino, J., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., Wilhelmi, M. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño*. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20et%20al_2013%20Ingenieria%20didactica.pdf.
- Grossman, S. (1998). *Álgebra Lineal*, Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana. Ciudad de México. México.
- Martínez, J. (2011) Métodos de investigación cualitativa. *Revista de la Corporación Internacional para el Desarrollo Educativo* Bogotá. Colombia.
- MINEDUC. (2001). *Matemática Álgebra y Modelos Analíticos, Programa de Estudio Plan Diferenciado*. Santiago. Chile. Recuperado de: http://www.curriculumlineamineduc.cl/605/articles-34389_programa.pdf
- MINEDUC. (2017). *Propuesta curricular para 3° y 4° medio. Documento de consulta pública*. Unidad de Currículum y evaluación. Chile.
- Rodríguez, S., Herraiz, N., Prieto, M., Martínez, M., Picazo, M., Castro, I. y Bernal, S. (2011). *Investigación Acción, Métodos de investigación en Educación Especial*. Recuperado de: https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/Inv_accion_trabajo.pdf
- Sardá, A. (2003). Argumentar; proposar i validar models, en N. San Martí (coord.), *Aprendre Ciències tot aprenent a escriure ciència* (121-148). Barcelona Edicions 62.
- Soto, M. (2013). *Apuntes del curso Álgebra Lineal I*. Universidad Central de Chile. Santiago. Chile