VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

# PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA LA CONVERSIÓN DE REGISTROS EN EL TRATAMIENTO DE LAS FUNCIONES LINEALES Y AFINES

**Carlos Andrés Ledezma Araya, Elisabeth Ramos-Rodríguez, Patricia Vásquez**
**Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)**
**carlos.ledezma.a@mail.pucv.cl, elisabeth.ramos@pucv.cl, patricia.vasquez@pucv.cl**

## Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar una propuesta de enseñanza para alumnos de 13 y 14 años sobre funciones lineales y afines, convirtiendo los registros tabular y gráfico al modo algebraico. Para su diseño, se consideraron elementos teóricos y didácticos, se realizó una exhaustiva revisión bibliográfica relacionada al tema y se revisó el tratamiento curricular en textos de estudio. Para validar la propuesta, ésta fue implementada en un grupo de estudiantes y analizada para observar elementos que inhiben o desarrollan la conversión de registros. Desde el paradigma cualitativo se analizaron las producciones de los estudiantes, evidenciando que éstos generaron estrategias para realizar conversiones, permitiendo mejorar la propuesta para futuras implementaciones.

**Palabras clave:** conversión, función afín, función lineal

## Abstract

The aim of this paper is to show a teaching proposal for 13 to 14 year- old students about linear and affine functions, converting tabular and graphic registers into algebraic mode. To design the teaching proposal, theoretical and didactic elements were taken into consideration, and bibliography related to the topic was deeply reviewed, as well as the curricular treatment of the content in textbooks. To validate it we implemented it in a group of students, and observed the elements that hinder or develop the conversion of registers. We analyzed the students' performance from the qualitative paradigm, demonstrating that they generated strategies to carry out conversions, which allowed improving the proposal for future implementations.

**Key words:** conversion, affine function, linear function

## Introducción

La importancia del concepto de función es su carácter unificador dentro de la matemática, debido a su presencia en todas las ramas, desde la relación de variables de distinto tipo hasta la modelación de situaciones del mundo real (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006). Si bien esta noción aparece como objeto de forma implícita desde los primeros niveles educativos (en el conteo, en el trabajo con patrones numéricos y geométricos, y en la proporcionalidad directa e inversa, por mencionar algunos ejemplos), el currículo chileno postula la iniciación de su estudio formal en octavo año básico (13-14 años). Las bases curriculares vigentes centran el foco del eje álgebra y funciones en dicho contenido (función lineal y afín), de la mano de la habilidad de modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas (Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC, 2016).

Abrate et al (2006) asocian la función con una serie de conceptos y esquemas de conocimiento que generan cierto grado de dificultad, como lo son dominio, imagen, variable, dependencia, entre otros, lo que, además, implica vincular tales subconceptos entre sí. Desde el plano de la semiótica, es que una función puede ser representada en distintos registros, y de acuerdo a lo planteado por Janvier (1987), es que los estudiantes demuestran haber integrado el concepto de función cuando son capaces de convertirla y realizar transferencias entre sus distintas representaciones, de manera espontánea y flexible, al mismo tiempo que conservan su carácter global e inseparable, destacando así la importancia de realizar distintas representaciones semióticas de un mismo objeto para favorecer su aprendizaje.

En el trabajo de López y Landy (2008), se abordaron dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de las funciones, bajo la idea de que la forma en que la escuela suele enseñar este concepto no permite apreciar su naturaleza y utilidad con respecto al entendimiento, modelación y explicación de fenómenos de carácter variacional, razones que provocan dificultades en el aprendizaje y erradas concepciones sobre dicho objeto. El principal foco del estudio citado se encuentra en el tratamiento en la enseñanza de la función, donde la primera problemática que detectaron correspondería a la multiplicidad de registros semióticos en que puede ser presentado el concepto, los que son trabajados en forma aislada y no siempre enfocados hacia la idea de correspondencia entre elementos de dos conjuntos o como relación entre variables (López y Landy, 2008). En la figura 1 hemos elaborado un ejemplo que ilustra distintos registros de una función.


| $x$ | $f: A \to B$ | $y$ |
|---|---|---|
| $-4$ | $(4 \cdot -4)+3$ | $-13$ |
| $-2$ | $(4 \cdot -2)+3$ | $-5$ |
| 0 | $(4 \cdot 0)+3$ | 3 |
| 1 | $(4 \cdot 1)+3$ | 7 |
| 3 | $(4 \cdot 3)+3$ | 15 |

***Figura 3:*** Representaciones del objeto matemático función afín en sus distintos registros semióticos (fuente: elaboración propia).

La segunda problemática que los autores plantean, hace mención a una forma casi dogmática de presentar el concepto, en el ámbito escolar, a través de tres pasos (López y Landy, 2008):

Presentación mediante conjuntos:

La primera definición de función que los estudiantes conocen suele ser en la que se representan dos conjuntos unidos por flechas, denotada por una $f$ que sigue con la definición de Dirichlet. Durante la enseñanza, el enfoque se centra en la idea de correspondencia entre dos conjuntos, sin enfatizar acerca de la regla que permite que se establezca dicha relación, además de no desarrollar la definición como relación entre variables o las ideas de variación.

Expresión analítica

Luego, se suele denotar a la función a través de una expresión analítica de la forma $f(x) =$….

Gráfica

La función se grafica en el plano cartesiano, usando pares ordenados de puntos que se obtienen luego de haber construido una tabla de valores con ambas variables.

Si bien los autores citados plantean la importancia de realizar conversiones entre los distintos registros de un objeto matemático, los textos de estudio del nivel octavo año básico analizados (Blanco, Bozt, Calderón, Jiménez, González, López, Romero, Díaz, Muñoz y Rupin, 2009; Bórquez, Darrigrandi y Zañartu, 2010; Catalán, Pérez, Prieto y Rupin, 2015; Vega, Castro y Curiche, 2013) evidenciaron un trabajo unidireccional en la conversión de registros del objeto matemático función lineal y afín, desde su forma algebraica hacia la tabular y gráfica, sin desarrollar la conversión en el sentido contrario (desde lo tabular y gráfico hacia lo algebraico). Es por ello que una de las problemáticas que nos planteamos es que la unidireccionalidad en la conversión de registros en el caso de las funciones lineales y afines, puede provocar que la notación algebraica y la tabla de valores sean consideradas sólo como herramientas o pasos intermedios para formar la gráfica de la función, y no como otras representaciones del mismo objeto matemático.

En este contexto, este trabajo tiene por objetivo mostrar una propuesta de enseñanza para alumnos de 13 y 14 años sobre funciones lineales y afines, convirtiendo desde los registros tabular y gráfico al algebraico.

## Marco teórico

Nuestro marco teórico se enmarca en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), la cual pone énfasis en que el aprendizaje de los objetos matemáticos debe trascender de lo meramente conceptual, y que sólo es a través de las representaciones semióticas que se hace posible una actividad sobre estos (D'Amore, 2009). De este modo es que su autor establece una diferencia e interdependencia entre dos conceptos fundamentales: por una parte, la semiósis, que es entendida como la "aprehensión o producción de una representación semiótica" (Duval, 2004, p. 14), y por otra, la noesis, que corresponde a los "actos cognitivos tales como la comprensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia" (Duval, 2004, p. 14).

En este marco intervienen tres conceptos fundamentales, característicos de la semiótica: las representaciones semióticas, el tratamiento y la conversión. Las representaciones semióticas se caracterizan por ser conscientes y externas, que "permiten una 'mirada del objeto' a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos…) que tienen el valor de 'significantes'" (Duval, 2004, p. 35), ejemplo de ello son las expresiones simbólicas, algebraicas y del lenguaje verbal, las figuras y tablas, los esquemas gráficos, entre otros tipos de registros. El tratamiento es entendido como aquel tipo de transformación que se lleva a cabo dentro de un registro, sin transitar a otro (Duval, 2004), como, por ejemplo, resolver una ecuación de dos variables para obtener una función en el registro algebraico. La conversión, en cambio, consiste en una transformación desde un registro de representación hacia otro, previa coordinación del individuo que la lleva a cabo (Duval, 2004), es decir, si esta función representada en el registro algebraico, se grafica en el plano cartesiano.

Bajo tales términos es que este marco teórico plantea que no es posible la noesis sin la semiósis, pues no se puede aprender un concepto matemático sin transitar por el necesario tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica.

## Método

Este estudio, de corte cualitativo y enfoque interpretativo, se enmarca en el diseño, aplicación y análisis de una propuesta de clase en la forma de una investigación-acción de tipo práctica (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), considerando las cuatro etapas que conforman el proceso de investigación-acción como se muestra en la tabla 1.

**Tabla 1:** *Etapas del diseño del estudio*

| Etapas | Acciones |
|---|---|
| 1. Detección del problema de investigación, clarificación y diagnóstico | Identificación y planteamiento de una problemática sobre la unidireccionalidad en la conversión de registros en el caso de las funciones lineales y afines. Revisión curricular y de los textos del nivel, además de antecedentes sobre la problemática planteada. Implementación de dos clases con los sujetos participantes. |
| | |
| 2. Formulación de un plan para resolver el problema | Diseño de un instrumento de clase, en forma de guía de contenido y de ejercicios, con un procedimiento de conversión desde los registros tabular y gráfico hacia el algebraico. |
| | |
| 3. Implementación del plan y evaluación de resultados | Implementación de la clase y del instrumento diseñado en el grupo de sujetos participantes, y análisis de los resultados obtenidos. |
| | |
| 4. Retroalimentación, reflexiones y replanteamiento | Reflexión sobre el instrumento diseñado para la clase implementada y de los resultados obtenidos, para ampliar la propuesta a futuras ejecuciones en el nivel. |

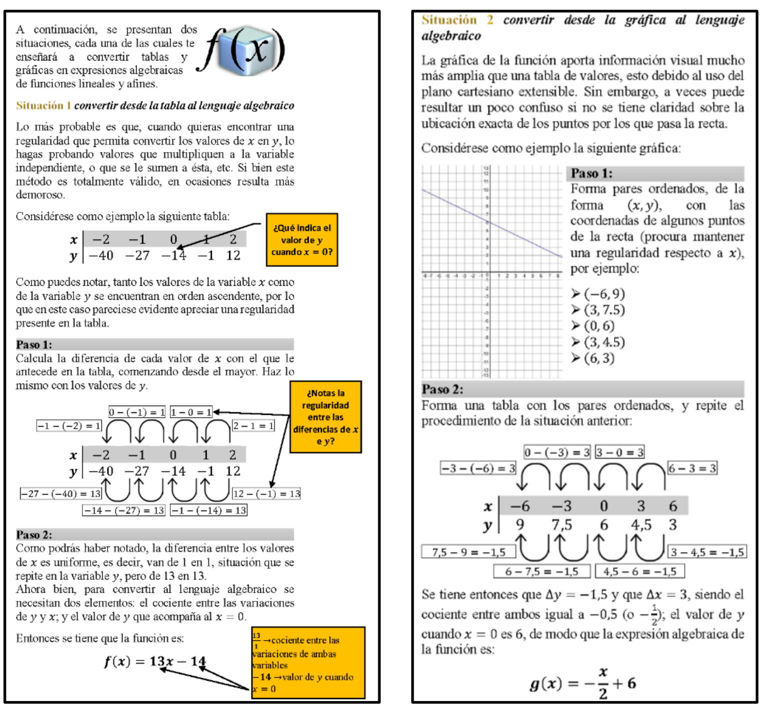
**Fuente:** elaboración propia, con base en el modelo presente en Hernández et al (2014).

Los sujetos participantes fueron cuatro alumnos de 13 y 14 años, pertenecientes al nivel octavo año básico del Colegio San Ignacio de Viña del Mar, grupo con el cual se trabaja la propuesta de enseñanza, que implicó tres clases, cuyos elementos principales se detallan en la tabla 2.

**Tabla 2:** *Descripción de los detalles principales de las tres clases implementadas*

| Clase | Descripción |
|---|---|
| Primera | Incluyó el uso de diagramas sagitales, tablas de valores y gráficas de funciones lineales y afines. Los estudiantes debían convertir desde los registros figural, tabular y gráfico al registro algebraico, y verbalizar en forma escrita su procedimiento. |
| Segunda | De características similares a la anterior, excluyendo los diagramas sagitales para delimitar la propuesta a los registros tabular, gráfico y algebraico. |
| Tercera | Actividad de clase que incluyó un procedimiento (figura 2) y ejercicios de conversión (figura 3) entre los registros ya mencionados. |

Las primeras dos clases se enfocaron en conocer las construcciones previas de los estudiantes sobre sus procedimientos de conversión hacia el registro algebraico, y fueron de utilidad para diagnosticar la problemática planteada. Para este estudio nos centraremos en la clase tres, en donde para lograr la conversión de registros se presenta un método de iteración y descomposición de la fórmula de pendiente conocidos dos puntos, utilizando una tabla, para así poder expresar la regularidad de la función en la forma $f(x) = ax + b$, tal como se muestra en la figura 2.



A continuación, se presentan dos situaciones, cada una de las cuales te enseñará a convertir tablas y gráficas en expresiones algebraicas de funciones lineales y afines.

Situación 1 ***convertir desde la tabla al lenguaje algebraico***

Lo más probable es que, cuando quieras encontrar una regularidad que permita convertir los valores de $x$ en $y$, lo hagas probando valores que multipliquen a la variable independiente, o que se le sumen a ésta, etc. Si bien este método es totalmente válido, en ocasiones resulta más demoroso.

Considérese como ejemplo la siguiente tabla:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-40$ | $-27$ | $-14$ | $-1$ | $12$ |

**¿Qué indica el valor de $y$ cuando $x = 0$?**

Como puedes notar, tanto los valores de la variable $x$ como de la variable $y$ se encuentran en orden ascendente, por lo que en este caso pareciese evidente apreciar una regularidad presente en la tabla.

**Paso 1:**
Calcula la diferencia de cada valor de $x$ con el que le antecede en la tabla, comenzando desde el mayor. Haz lo mismo con los valores de $y$.

$-1-(-2)=1$ $\quad 0-(-1)=1$ $\quad 1-0=1$ $\quad 2-1=1$

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-40$ | $-27$ | $-14$ | $-1$ | $12$ |

$-27-(-40)=13$ $\quad -14-(-27)=13$ $\quad -1-(-14)=13$ $\quad 12-(-1)=13$

**¿Notas la regularidad entre las diferencias de $x$ e $y$?**

**Paso 2:**
Como podrás haber notado, la diferencia entre los valores de $x$ es uniforme, es decir, van de 1 en 1, situación que se repite en la variable $y$, pero de 13 en 13.
Ahora bien, para convertir al lenguaje algebraico se necesitan dos elementos: el cociente entre las variaciones de $y$ y $x$; y el valor de $y$ que acompaña al $x = 0$.

Entonces se tiene que la función es:

$$f(x) = 13x - 14$$

$\frac{13}{1}$ →cociente entre las variaciones de ambas variables
$-14$ →valor de $y$ cuando $x = 0$

Situación 2 ***convertir desde la gráfica al lenguaje algebraico***

La gráfica de la función aporta información visual mucho más amplia que una tabla de valores, esto debido al uso del plano cartesiano extensible. Sin embargo, a veces puede resultar un poco confuso si no se tiene claridad sobre la ubicación exacta de los puntos por los que pasa la recta.

Considérese como ejemplo la siguiente gráfica:

**Paso 1:**
Forma pares ordenados, de la forma $(x, y)$, con las coordenadas de algunos puntos de la recta (procura mantener una regularidad respecto a $x$), por ejemplo:

- $(-6, 9)$
- $(3, 7.5)$
- $(0, 6)$
- $(3, 4.5)$
- $(6, 3)$

**Paso 2:**
Forma una tabla con los pares ordenados, y repite el procedimiento de la situación anterior:

$-3-(-6)=3$ $\quad 0-(-3)=3$ $\quad 3-0=3$ $\quad 6-3=3$

| $x$ | $-6$ | $-3$ | $0$ | $3$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $9$ | $7{,}5$ | $6$ | $4{,}5$ | $3$ |

$7{,}5-9=-1{,}5$ $\quad 6-7{,}5=-1{,}5$ $\quad 4{,}5-6=-1{,}5$ $\quad 3-4{,}5=-1{,}5$

Se tiene entonces que $\Delta y = -1{,}5$ y que $\Delta x = 3$, siendo el cociente entre ambos igual a $-0{,}5$ (o $-\frac{1}{2}$); el valor de $y$ cuando $x = 0$ es 6, de modo que la expresión algebraica de la función es:

$$g(x) = -\frac{x}{2} + 6$$

***Figura 4:*** Extractos del instrumento de la propuesta para explicitar un método de conversión desde los registros tabular y gráfico al algebraico (fuente: elaboración propia)

Posterior a la clase, los estudiantes desarrollaron ejercicios de conversión (figura 3), primero desde el registro tabular al algebraico, y luego desde el gráfico. En una sección final de desafíos, se les presentaron algunas funciones del tipo cuadrática, cúbica y raíz cuadrada, con la finalidad de que trabajen con lo aún desconocido para ellos. Esta clase fue la considerada para analizar los resultados de la propuesta implementada.

**Actividad I:** desde la tabla a la representación algebraica de la función
Convierte las siguientes funciones, desde su representación como tabla hacia la algebraica, registrando los procedimientos efectuados en tu cuaderno.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |
| $y$ | $-16$ | $-10$ | $-4$ | $2$ | $8$ |

$f(x) =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-10$ | $-5$ | $0$ | $5$ | $10$ |
| $y$ | $47$ | $27$ | $7$ | $-13$ | $-33$ |

$g(x) =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| $y$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $1$ |

$h(x) =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-\frac{3}{2}$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $3$ |
| $y$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{6}{5}$ | $-\frac{11}{5}$ | $-\frac{16}{5}$ |

$y =$

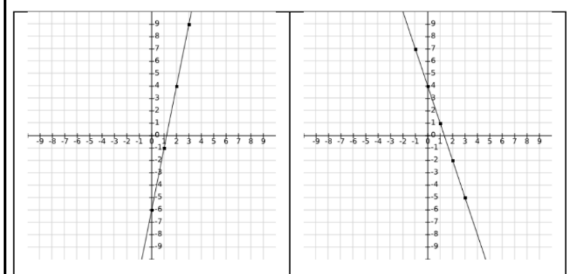
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-11$ | $-3$ | $0$ | $4$ | $6$ |
| $y$ | $-65$ | $-9$ | $12$ | $40$ | $54$ |

$f(x) =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-12$ | $-\frac{5}{2}$ | $1$ | $\frac{5}{4}$ | $12$ |
| $y$ | $\frac{243}{4}$ | $\frac{53}{4}$ | $-\frac{17}{4}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{237}{4}$ |

$g(x) =$

**Actividad II:** desde la gráfica a la representación algebraica de la función
Convierte las siguientes funciones, desde su representación como gráfica hacia la algebraica, registrando los procedimientos efectuados en tu cuaderno.



$f(x) =$ $g(x) =$

*Figura 5:* Extractos del instrumento de la propuesta de conversión desde los registros tabular y gráfico hacia el algebraico (fuente: elaboración propia).

Este proyecto se desarrolló en el marco del programa de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, donde se validaron los instrumentos y la propuesta por expertos de didáctica.

Para el análisis se establecieron categorías de acuerdo a las conversiones realizadas por los estudiantes desde los registros considerados (tabla 3).

**Tabla 3:** *Categorías de análisis*

| Categorías | Códigos |
|---|---|
| Convierte desde el registro tabular al algebraico | CTA |
| Convierte desde el registro gráfico al algebraico | CGA |

Cabe destacar que no hemos considerado las conversiones recíprocas u otras, pues estas sí se observaron tanto en los textos de estudio como en las propuestas curriculares. Las categorías apuntan a la escasez de este tipo de conversiones.

## Resultados de la propuesta

La tabla 4 muestra un resumen de los resultados obtenidos por cada uno de los sujetos participantes.

**Tabla 4:** *Resultados de la aplicación de la propuesta*

| Sujetos | CTA | CGA |
|---|---|---|
| Alumno 1 | X | X |
| Alumno 2 | X | X |
| Alumno 3 | X | X |
| Alumno 4 | X | X |

La tabla muestra que todos los alumnos lograron convertir los registros. Respecto a la conversión desde el registro tabular hacia el algebraico, la figura 4 evidencia que el alumno aplicó el procedimiento enseñado en la clase 3 en el registro tabular para obtener la representación algebraica de las funciones, donde no se observan dificultades en el trabajo con valores enteros o racionales. Sin embargo, los cuatro estudiantes no pudieron resolver el último ejercicio, debido a la ausencia del $f(0)$ en la tabla.

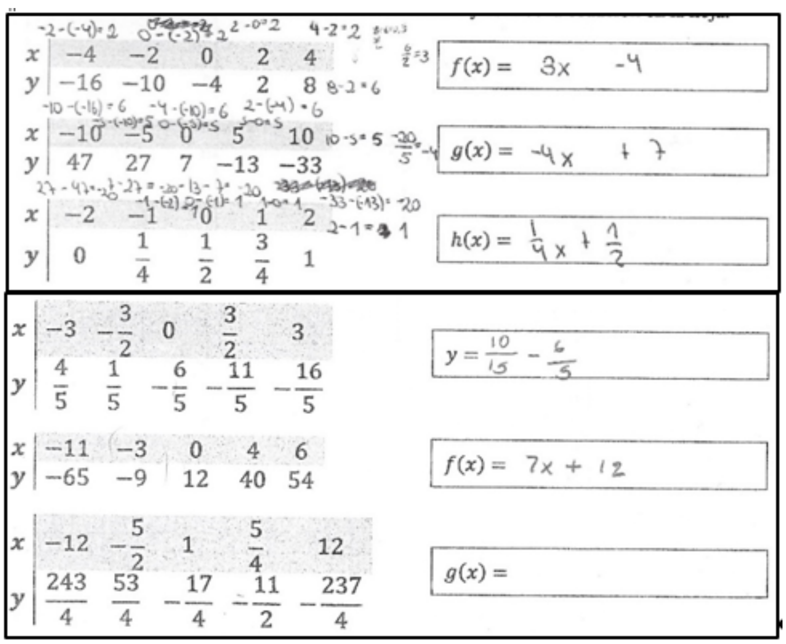



***Figura 6:*** Evidencia de conversión desde el registro tabular hacia el algebraico.

La figura 5 evidencia que los convirtieron desde las gráficas a sus representaciones algebraicas, considerando los puntos marcados en el plano, donde tampoco se observaron dificultades para el trabajo con valores enteros y racionales.

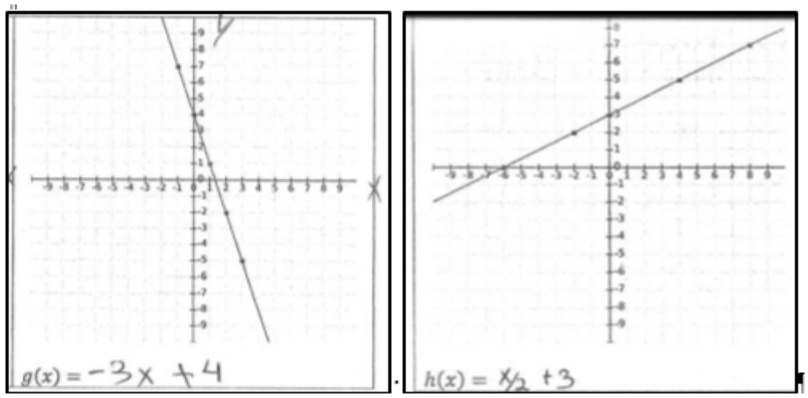



*Figura 7:* Evidencia de conversión desde el registro gráfico hacia el algebraico

De acuerdo con los comentarios de los estudiantes, hubo ocasiones en que aplicaron sólo un procedimiento intuitivo, ejemplo de ello era que, con tan sólo observar una tabla o gráfica, pudieron encontrar la regularidad implícita en ésta, sin recurrir a un procedimiento.

## Conclusiones

Abordar este objeto matemático nos ha aportado una mirada amplia del contenido que se enseña, pues comprender sus distintas representaciones semióticas y las alternativas de presentación en los textos de estudio, enriquecieron su enseñanza. Los resultados obtenidos evidenciaron el cumplimiento de los objetivos de este estudio, pues se logró su diseño, implementación en aula y análisis de datos, lo que permitió reformular algunos aspectos de la misma en favor de la conversión de registros como, por ejemplo, adaptar el método para el caso en que el registro tabular no incluya el valor de $f(0)$, o para valores no consecutivos de la variable independiente.

En consonancia con lo planteado por López y Landy (2008), acerca de la multiplicidad de registros de una función, en reiteradas ocasiones durante la aplicación de esta propuesta se hizo saber a los estudiantes participantes que las tres representaciones semióticas involucradas aludían a un mismo objeto matemático, a fin de que la notación algebraica no fuese entendida como un punto de partida, o la tabla de valores como un paso intermedio entre los registros algebraico y gráfico.

Sin embargo, como los sujetos informantes fueron pocos, la proyección de la aplicación en un número mayor de estudiantes podría considerar otros aspectos, como el número de clases y cantidad de instrumentos necesarios para llevar a cabo el trabajo. Es por ello que, en la actualidad, se encuentra en desarrollo el proceso de diseño de más material complementario, pues esta propuesta se pretende implementar, de manera general, al nivel mencionado, cuando se aborde la unidad temática Álgebra y Funciones. Como una extensión de este estudio, se proyecta diseñar una propuesta similar para el caso de las funciones cuadráticas, a fin de contribuir con estrategias didácticas para que el trabajo de conversión con distintas representaciones semióticas, en la enseñanza de los objetos matemáticos, sea una práctica habitual en el aula.

## Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nac. de Villa María.

Blanco, M., Bozt, J., Calderón, F., Jiménez, M. J., González, M., López, G., . . . Rupin, P. (2009). *Matemática 2 Proyecto Bicentenario.* Santiago, Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Bórquez, E., Darrigrandi, F. y Zañartu, M. (2010). *Texto del Estudiante Matemática 8.* Santiago, Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2015). *Texto del estudiante Matemática 8.º básico.* Santiago, Chile: Ediciones SM Chile S.A.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Enseñanza de las Matemáticas, 11*, 150-164.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano* (Segunda ed.). (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali: Merlín I.D.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta ed.). México D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

López, J. y Landy, S. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 308-318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MINEDUC. (2016). *Matemática. Programa de Estudio - Octavo Básico.* Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

Vega, M., Castro, C. y Curiche, A. (2013). *Matemática 8º Básico. Sé Protagonista.* Santiago, Chile: Ediciones SM S.A. Chile.