

## EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS EN LAS PRUEBAS ANDALUZAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

M<sup>a</sup> del Mar López-Martín, Carmen Bataneo, José Miguel Contreras  
Universidad de Granada (España)  
mariadelmarlopez@ugr.es, batanero@ugr.es, jmcontreras@ugr.es

### Resumen

Se analizan las pruebas propuestas en Andalucía en el periodo 2003/2016, caracterizando los problemas sobre contraste de hipótesis y comparando el contenido evaluado y el pretendido en el currículo. Aunque todas las pruebas incluyen problemas de inferencia estadística, destacamos que éstos han sido propuestos en los últimos siete años. El análisis semiótico ha puesto de manifiesto su complejidad; igualmente se observa que las poblaciones suelen ser binomiales o normales y el parámetro a contrastar suele ser la media o proporción poblacional. Los resultados propician una mejor preparación de los estudiantes para asegurar el éxito de la prueba.

**Palabras clave:** pruebas PAU, bachillerato, contraste hipótesis

### Abstract

We analyze university entrance exams proposed in Andalusia in the academic courses from 2003 to 2016, characterizing the problems regarding hypothesis test and comparing the content evaluated and the intended content in the curriculum. Although all the tests include statistical inference problems, we emphasize that these have been proposed in the last seven years. Semiotic analysis has revealed its complexity; it is also observed that binomial or normal populations are usually used and the parameter of contrast is usually the mean or proportion of population. The results lead to a better preparation of the students to ensure the success of the test.

**Key words:** EU tests, bachelor, hypothesis test

### ■ Introducción

En la actualidad, el estudio tanto de la estadística como de la inferencia estadística está teniendo una gran repercusión en un porcentaje elevado de estudios de grado e incluso en másteres. Este interés viene directamente relacionado por el impacto que estas tienen a la hora de entender ciertos fenómenos que son estudiados en diversas ramas de ciencias.

Dentro del ámbito educativo, la enseñanza de las matemáticas se ha visto fuertemente condicionada por los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación externas como por ejemplo las pruebas PISA (Program for International Student Assessment; OCDE, 2015), la evaluación TIMSS (Third International

Mathematics and Science Study; Mullis, Martín, Foy y Arora, 2012), las pruebas de diagnóstico y las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU). En el caso de los futuros estudiantes universitarios, las pruebas de acceso a la universidad (en adelante PAU) son un elemento a tener muy presente con el fin de garantizar el éxito para poder cursar los estudios de grado deseados. Aunque la finalidad principal de dichas pruebas es la evaluación de los conocimientos y capacidades adquiridas por los futuros universitarios, es evidente que también se utilizan como filtro para seleccionar a los estudiantes que quieren ingresar en determinadas titulaciones y centros.

Centrando nuestra atención en el último curso de Bachillerato, se ha observado que el estudio de la inferencia estadística se trata únicamente en la asignatura de Matemáticas Aplicadas en las Ciencias Sociales II incluida en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (MEC, 2007; MECD, 2015). Este hecho es bastante significativo ya que gran parte de los estudiantes de último curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias, cuando continúan sus estudios universitarios, se encuentran con una o varias asignaturas donde se tratan contenidos de inferencia estadística.

El sistema educativo español desde 2003 ha sufrido varios cambios con respecto a las características y contenidos de Bachillerato. Concretamente el 27 de junio de 2003 se entra en vigor el Real Decreto 832/2003 donde establece la ordenación general y las enseñanzas comunes del Bachillerato. Posteriormente en 2007, entra en vigor la ley orgánica 2/2006, conocida como LOE. Esta última ley fue mejorada por la actual ley orgánica de la mejora de la calidad educativa (LOMCE) aprobada en 2013 y que comenzó a implantarse, de forma paulatina, en el curso académico 2014/2015. La Tabla 1 muestra los contenidos de inferencia recogidos en la antigua ley LOE y en la actual LOMCE. Con la entrada en vigor de la LOMCE se observa que los intervalos de confianza ganan terreno a los contraste de hipótesis, los cuales han sido eliminados.

**Tabla 1.** Contenidos de inferencia estadística recogidos en las normativas curriculares de 2007 y 2015

MEC (2007, p. 45476)	MECD (2015, p. 389)
C.1 Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. C.2 Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. C.3 Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. C.4 Intervalo de confianza para el parámetro $p$ de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. C.5 Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.	C.2 Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. C.2 Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. C.3 Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. C.4 Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. C.4 Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. C.4 Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

A lo largo de los últimos años, el grupo de investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada ha analizado con profundidad los ítems de intervalo de confianza que han sido propuestos en las pruebas PAU (López-Martín, Arteaga, Gea y Contreras, 2016; López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea, 2016; López-Martín, Díaz-Levicoy, Gea y Arteaga, 2016). El objetivo del estudio que aquí se presenta es completar el análisis de los ítems de inferencia estadística de las mencionadas pruebas, centrandó la atención en los ítems relacionados con contraste de hipótesis. Concretamente se realiza el análisis de este tipo de problemas que han sido propuestos desde 2003 hasta 2016. Puesto que en el estudio llevado a cabo la muestra se ha seleccionado de una manera intencionada, lo que se pretende con la presentación del mismo es aportar algunas características sobre el contenido de inferencia estadística que es tratado en las PAU.

El trabajo queda estructurado como se muestra a continuación: en la Sección 2 se presenta el marco teórico sobre el que se ha basado el desarrollo de la investigación, la Sección 3 recoge las características sobre el método de investigación que se ha llevado a cabo y posteriormente, en la Sección 4 se muestran los resultados obtenidos del análisis realizado. Por último se concluye el trabajo mostrando una síntesis sobre los resultados más destacados del mismo.

## ■ Fundamentos

Nos apoyamos en herramientas teóricas propuestas por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, sistema teórico elaborado Godino, Batanero y Font (2007). Como formación epistemológica, dicho enfoque asume que las matemáticas provienen de la actividad humana orientada a la resolución de determinados tipos de problemas, los cuales constituyen la razón de ser y significado de los objetos emergentes de la misma. Dentro del marco teórico EOS, se diferencian entre el *significado institucional* (compartido dentro de una institución) y el *significado personal* (que adquiere una persona, por ejemplo, un estudiante y puede ser diferente al aceptado dentro de la institución) (véase Figura 1).

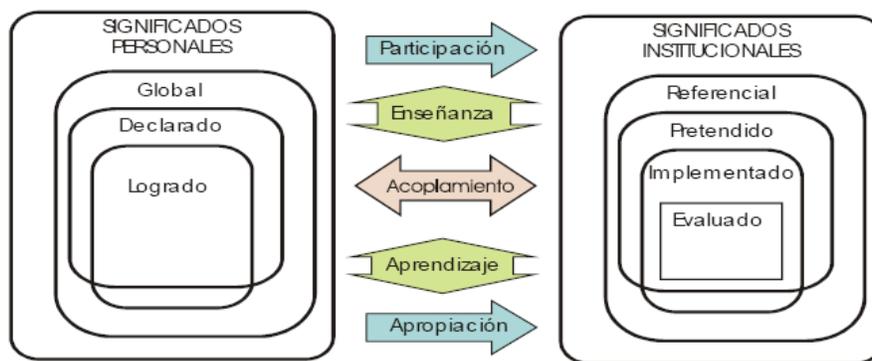


Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales (Godino, 2002, p.141)

En el caso que nos ocupa, nos centramos en comparar los significados pretendido y evaluado del contraste de hipótesis en las PAU, diferenciando para ello el significado global, el significado pretendido (marcado por las orientaciones curriculares) y el evaluado (contenido en las pruebas de evaluación). Como

complemento al marco teórico EOS, se ha recurrido a investigaciones que analizan las pruebas PAU (Díaz, Mier, Alonso y Rodríguez-Muñiz, 2014; Espinel, Ramos y Ramos, 2006; Espinel, Ramos y Ramos, 2007; García y García, 2005 y Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua, 2013) e investigaciones sobre la comprensión del contraste de hipótesis (Batanero y Borovcnik, 2016; Batanero, Díaz y López-Martín, 2017 y Vallecillos, 1999).

## ■ Método

El trabajo desarrollado se enmarca dentro de la metodología cualitativa basada en el análisis de contenido de los ejercicios propuestos en las pruebas citadas. Con objeto de realizar la investigación se han seleccionado las pruebas PAU de la modalidad del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales en la Comunidad Autónoma andaluza, desde el curso académico 2002-2003 hasta el curso 2015-2016, en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Dicha prueba consta de dos opciones (opción A y opción B), cada una de ellas formada por cuatro ejercicios y donde un ejercicio corresponde al bloque de inferencia estadística. En cada curso académico se proponen un total de 6 pruebas (prueba de junio, prueba de septiembre y cuatro pruebas de reserva), por lo que anualmente se cuenta con 12 ejercicios. Puesto que para el estudio se ha partido de las pruebas propuestas desde 2003, en total se han analizado 168 ítems. En un primer análisis se han filtrado únicamente aquellos ítems relacionados con contraste de hipótesis. Concretamente los resultados que se muestran en la siguiente sección están restringidos en el periodo desde 2010 hasta 2016 ya que es a partir de entonces cuando es posible observar la inclusión de este tipo de ítems.

Una vez identificados los ítems de contraste de hipótesis, se ha llevado a cabo un análisis semiótico con el fin de identificar el contenido evaluado y poder así compararlo con el incluido en las normativas curriculares. Además se ha definido una serie de variables que han sido consideradas relevantes para la formación del estudiante en relación a los problemas de inferencia y que se han deducido del estudio de la investigación previa. Concretamente, las variables analizadas han sido:

- Modelo de distribución de la población de partida en el ejercicio (distribución binomial o distribución normal);
- Parámetro al que se refiere el contraste (media poblacional o proporción poblacional);
- Contexto en el que se presenta la tarea, dentro de los considerados en las pruebas PISA (personal, social, profesional, científico), (OCDE, 2009).

Para cada una de estas variables se realiza un estudio de la distribución de las diferentes categorías, globalmente y a lo largo del tiempo.

## ■ Resultados

A partir del análisis cualitativo, donde se identificaron las categorías para cada una de las variables y para cada problema, se han codificado los datos para su posterior tratamiento estadístico con el software Excel. La Tabla 2 recoge la información correspondiente a los resultados obtenidos del análisis. Desde el 2010 en adelante se analizaron 84 problemas de los cuales 32 correspondían a la temática en estudio.

**Tabla 2.** Resultados obtenidos en el análisis de los problemas propuestos

		2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL
<b>N° Problemas</b>		5	5	5	3	4	6	4	32
<b>Parámetro</b>	Media	4	3	4	2	1	6	2	22
	Proporción	1	2	1	1	3	--	2	10
<b>Distribución</b>	Normal	4	3	4	2	1	6	2	22
	Binomial	1	2	1	1	3	--	2	10
<b>Contexto</b>	Personal	--	1	2	--	--	1	1	5
	Social	1	3	2	1	4	1	1	13
	Profesional	3	1	1	1	--	1	1	8
	Científico	1	--	--	1	--	2	1	5
	Sin contexto	--	--	--	--	--	1	--	1

El análisis realizado se ha llevado a cabo desde 2010 ya que es a partir de entonces donde las pruebas incluyen ejercicios relacionados con test o contrastes de hipótesis. A partir de su inclusión en las PAU, casi el 40% de los ejercicios propuestos en el bloque de inferencias estadística lo incluyen. La aparición de los contrastes de hipótesis supuso una disminución considerable de los ejercicios relacionados con el intervalo de confianza, indicando un cambio de tendencia en los contenidos de inferencia evaluados en las pruebas de acceso.

Con respecto al parámetro a estimar se observa que un alto porcentaje de ellos están centrados en dar respuesta a contrastes cuya hipótesis a analizar se centra en la media de una población normal. Estos resultados muestran un privilegio por la media de una población normal frente a la proporción de una población binomial.

Con respecto a los contextos se observa una gran presencia de problemas formulados sobre un contexto social y una disminución significativa, en los últimos años, de los problemas sin contexto (solamente se ha propuesto uno en el año 2015).

### ■ Síntesis de los resultados

El marco teórico usado nos ha permitido analizar los conceptos y procedimientos que son empleados a la hora de afrontar la resolución de los ítems de contrastes de hipótesis. Tras el análisis realizado se ha observado el dominio de una gran variedad de conceptos y de procedimientos, como muestra la Tabla 3.

**Tabla 3.** Contenidos matemáticos evaluados en los ítems de contraste de hipótesis en las PAU

Conceptos y propiedades	Población y muestra
	Distribución muestral
	Relación entre los estadísticos de la población y de la distribución muestral
	Modelo teórico de distribución
	Distribución normal tipificada
	Estimador de un parámetro
	Hipótesis nula e hipótesis alternativa; diferencias
	Estadístico de contraste
	Nivel de significación
	Regiones de aceptación y rechazo
	Lógica del contraste
	Probabilidad condicional
	Procedimientos
Cálculo de los estadísticos de la distribución muestral	
Tipificación	
Lectura de tablas de la distribución normal	
Cálculo de probabilidades	
Cálculo de percentiles en la distribución normal	
Cálculo de regiones de aceptación y rechazo	
Toma de decisión sobre una hipótesis	

De entre todos los conceptos y propiedades descritos en la Tabla 3 destacamos el de probabilidad condicional. Dicho concepto interviene tanto en la definición de las distribuciones muestrales (condicionadas al valor del parámetro), intervalos de confianza (condicionados con el valor del estadístico) y en el caso del contraste de hipótesis, aparece a la hora de describir las regiones de aceptación y rechazo, las cuales se calculan bajo la condición de ser cierta la hipótesis nula (Castro-Sotos, Vanhoof, Noortgate y Onghena, 2007). Puesto que el concepto de probabilidad condicional es difícil y se han descrito números sesgos sobre el mismo (Díaz, Contreras, Batanero y Roa, 2012; Díaz y de la Fuente, 2005; Falk, 1986), sería recomendable que los profesores tengan una especial atención a su uso en inferencia, para asegurar un aprendizaje adecuado por parte de los estudiantes y garantizar una correcta solución de los problemas.

En cuanto a los procedimientos, destacamos la importancia que tiene una correcta lectura la tabla de la distribución normal tipifica y la necesidad de realizar correctamente los cálculos estadísticos con el fin de obtener las medidas de centralización, medidas de dispersión y proporción muestral para posteriormente describir la distribución tanto de la media muestral como de la proporción muestral. Por último señalar que otro punto importante a tener en cuenta es el manejo de desigualdades en el proceso de tipificación.

Destacar que el estudio llevado a cabo sobre los problemas de las PAU junto al análisis de las normativas curriculares pone de manifiesto, en general, una adecuada relación entre los contenidos tratados en las PAU e incluidos en el currículo. Sin embargo, hemos observado un mayor énfasis en la estimación de la media, en comparación con la estimación de la proporción y por otro lado los problemas propuestos se refieren a estimación en una sola población. Por tanto no se considera la comparación de dos poblaciones que es un tema incluido en el currículo.

Por último nos gustaría señalar que, tanto el trabajo que aquí se presenta como los resultados obtenidos en investigaciones relacionadas con las pruebas PAU (Carretero, 2014; Carretero, López-Martín y Arteaga, 2015; Contreras, López-Martín, Arteaga y Carretero, 2015; López-Martín, Contreras, Batanero y Carretero, 2015; López-Martín, Contreras, Carretero y Serrano, 2016) sean considerados con el fin de contribuir en la mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros universitarios en Estadística y Probabilidad.

Agradecimientos: Proyecto de investigación EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y grupo de investigación FQM126 de la Junta de Andalucía.

#### ■ Referencias Bibliográficas

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense publishers.

Batanero, C., Díaz, C. y López-Martín, M. M. (2017). Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponibles en, [enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm/](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm/).

Carretero, M. (2014). *Análisis de problemas de probabilidad en las pruebas de acceso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Andalucía*. Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada.

Carretero, M., López-Martín, M. M. y Arteaga, P. (2015). Contenido matemático de los problemas de probabilidad en las pruebas de acceso de Andalucía. *Probabilidad Condicionada. Actas de las II Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria*. Granada: SEIEM. Online: <http://www.jvdiesproyco.es/>.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, 2(2), 98-113.

Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación Secundaria. *Bolema* 26 (22), 1207-1226.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.

Díaz, P., Mier, V., Alonso P. y Rodríguez-Muñiz; L. J. (2014). Probability and statistics in access exams to Spanish universities. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of*

- the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014)*, Flagstaff, AR: International Statistical Institute.
- Espinel, M. C., Ramos, C. E. y Ramos, R. M. (2006, Septiembre). La inferencia estadística en la PAU. Presentado en *XXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, SEIO*. Tenerife.
- Espinel, M. C., Ramos, R. M. y Ramos, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en Secundaria. *Números*, 67, 15-23.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- García, I. y García, J. A. (2005). Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P. A. U. *Actas de las XI Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 733-738). La Laguna: Consejería de Educación, Cultura de Deportes Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense publishers.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 27-135.
- López-Martín, M. M., Arteaga, P., Gea, M.M. y Contreras, J. M. (2016, Julio). Los intervalos de confianza en las pruebas de selectividad andaluzas. Trabajo presentado en la *30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME-30*, Monterrey, México, 2016. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- López-Martín, M.M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y Gea, M. (2016). La inferencia estadística en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, *Revista Paranaense de Educação Matemática* 5 (8), 33-59.
- López-Martín, M. M., Contreras, J. M., Batanero, C. y Carretero, M. (2015). Los problemas de probabilidad propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. *Areté*, 1(1), 39-60.
- López-Martín, M. M., Contreras, J. M., Carretero, M., Serrano, L. (2016). Análisis de los problemas de probabilidad propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, 9, 65-84.
- López-Martín, M. M., Díaz-Levicoy, D., Gea, M. M. y Arteaga, P. (2016, Junio). Estudio empírico de los problemas sobre intervalos de confianza en las Pruebas de Acceso a la Universidad. Presentado en el *VI Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (EIEPE)*. Ciudad de Puebla, Puebla, México, 2016.
- MEC, Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.
- MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

- Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P. y Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- OCDE. (2009). *PISA 2009 assessment framework - key competencies in reading, mathematics and science*. Paris: OCDE.
- OCDE, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2015). *PISA 2015 mathematics framework*. Paris: OCDE
- Ruiz, J. G., Dávila, P., Etxeberria, J. y Sarasua, J. (2013). Pruebas de selectividad en Matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones de los profesores. *Revista de educación*, 362, 217-246.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute* (Vol.2, pp. 201–204). Helsinki: International Statistical Institute.