

GLORIA SÁNCHEZ-MATAMOROS, MAR MORENO MORENO,  
PATRICIA PÉREZ TYTECA, M. LUZ CALLEJO DE LA VEGA

## TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DE LA LONGITUD Y SU MEDIDA COMO INSTRUMENTO CONCEPTUAL USADO POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL

A LEARNING TRAJECTORY OF LENGTH AND MEASURE AS A CONCEPTUAL INSTRUMENT  
USED BY PROSPECTIVE KINDERGARTEN TEACHERS

### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es caracterizar el uso de una trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual para favorecer la adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños. Participaron 64 estudiantes de la carrera de maestro de educación infantil que siguieron un módulo de enseñanza. Este módulo estaba articulado en torno a una trayectoria de aprendizaje sobre la longitud y su medida, con objeto de que los futuros maestros la usaran como instrumento conceptual para describir e interpretar las respuestas de niños de educación infantil a situaciones de enseñanza-aprendizaje (primer esquema de acción instrumental) y proponer tareas en función de la comprensión inferida (segundo esquema de acción instrumental). Los resultados muestran que hay estudiantes que se preparan para ser maestros que no desarrollan ningún esquema de acción instrumental, y otros desarrollan el primer esquema y algunos, ambos; esto proporciona evidencias de la adquisición de la competencia arriba señalada.

### PALABRAS CLAVE:

- *Mirar profesionalmente*
- *Trayectoria de aprendizaje*
- *Instrumento conceptual*
- *Magnitud longitud y medida*
- *Educación infantil*

### ABSTRACT

This study characterizes the use of a learning trajectory for length, as a magnitude and its measurement, as a conceptual instrument for gaining the professional competence of noticing mathematical thinking of children by the prospective kindergarten teachers. A total amount of 64 prospective kindergarten teachers enrolled on a teaching module about teaching and learning the concept of length in their training programmer. This module is based on a learning trajectory of length to be used as a conceptual instrument which let prospective kindergarten teachers describe and interpret children's answers to an specific learning situation

### KEY WORDS:

- *Professional noticing*
- *Preservice teacher learning*
- *Learning trajectories*
- *Early childhood education*
- *Length and measure*
- *Learning experiment*



(first instrumental action scheme) and take appropriate learning decisions related to the interpretation inferred (second instrumental action scheme). The results exhibit there are some prospective kindergarten teachers who do not develop any schemes, some of them develop only the first scheme, and few of them develop the second instrumental action scheme. These results give evidences of the acquisition of noticing.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é caracterizar o uso de um “caminho de aprendizagem” da magnitude comprimento e medida como um instrumento conceitual para favorecer a aquisição da competência docente “para olhar profissionalmente” no pensamento matemático das crianças. Um total de 64 alunos participaram de um professor de educação pré-escolar que seguiu um módulo de ensino. Este módulo foi estruturado em torno de um caminho de aprendizado sobre o comprimento e sua medição, com o objetivo de que os futuros professores o utilizarão como um instrumento conceitual para descrever e interpretar as respostas das crianças na primeira infância às situações de ensino-aprendizagem (primeiro esquema de ação instrumental) e propor tarefas baseadas no entendimento inferido (segundo esquema de ação instrumental). Os resultados mostram que há estudantes para professores que não desenvolvem nenhum esquema de ação instrumental, outros desenvolvem o primeiro e alguns de ambos; esses resultados evidenciam a aquisição dessa competência.

## PALAVRAS CHAVE:

- *Olhar profissionalmente*
- *Caminho de aprendizagem*
- *Instrumento conceitual*
- *Magnitude comprimento e medida*
- *Educação infantil*

## RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de caractériser l'usage d'une trajectoire d'apprentissage de la longueur et sa mesure comme instrument conceptuel pour favoriser l'acquisition de la compétence des enseignants «regarder professionnellement» la pensée mathématique chez les enfants. Dans cette étude participèrent soixante-quatre étudiants à maîtres qui ont suivi un cycle de formation d'enseignement. Ce cycle portait sur une trajectoire d'apprentissage sur la longueur et sa mesure, afin d'être utilisée par les futurs enseignants comme instrument conceptuel pour décrire et interpréter les réponses chez les élèves de maternel à des situations d'enseignement - apprentissage (premier schéma d'action instrumentale) et proposer des tâches en fonction de la compréhension inférée (deuxième schéma d'action instrumentale). Les résultats montrent qu'il y a des étudiants à maîtres qui ne développent aucun schéma d'action instrumentale, d'autres développent le premier et certains tous les deux; cela fournit des évidences de l'acquisition de cette compétence.

## MOTS CLÉS:

- *Regard professionnel*
- *Trajectoire d'apprentissage*
- *Instrument conceptuel*
- *Grandeur longueur et mesure*
- *Enseignement maternel*

## 1. INTRODUCCIÓN

Investigaciones recientes sobre el desarrollo profesional subrayan la importancia de que los estudiantes para profesor aprendan a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y tomen decisiones basadas en dicha interpretación, es decir, que desarrollen la mirada profesional (cf. la revisión de Stahnke, Schueher y Roeskem-Winter, 2016), con objeto de mejorar el aprendizaje de los estudiantes. En este trabajo entendemos la mirada profesional en la acepción de Jacobs, Lamb y Philipp (2010), que se centra en el pensamiento matemático de los estudiantes cuando resuelven tareas. Los autores conceptualizan esta competencia en tres destrezas interrelacionadas: describir las estrategias utilizadas por los estudiantes, interpretar la comprensión de estos y decidir cómo responder con base a la comprensión inferida.

Estas investigaciones sobre el desarrollo profesional se han centrado sobre todo en el nivel de educación primaria (Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson, 2017), siendo escasas las que centran su atención en la educación infantil (Parks y Wager, 2015). Nuestro trabajo es una aportación en la línea de cómo enseñar a los futuros maestros de educación infantil a desarrollar la mirada profesional.

Algunos trabajos sobre desarrollo profesional en educación infantil han profundizado en el conteo –que incluye cardinalidad, correspondencia uno a uno y subitización– y en hechos geométricos –identificar, analizar, comparar y crear formas– (Parks y Wager, 2015); son pocos los que han prestado atención a otros conceptos importantes en educación infantil como el de las magnitudes y su medida, sobre el que trata este trabajo. Esta noción está presente cuando los niños aprenden a apreciar algunas cualidades de los objetos al relacionarse con su entorno (largo - corto, alto - bajo, lleno - vacío, etc.), a realizar comparaciones (tan largo como..., más alto que..., menos grueso que..., etc.), o a resolver situaciones relacionados con alguna magnitud y su medida. En el currículum de educación infantil actual (BOE 5/2008, p. 10249 en España; NCTM, 2000) se contempla la iniciación al aprendizaje de la magnitud longitud, entendida como reconocimiento de propiedades de un objeto, como un aprendizaje progresivo, intuitivo y experimental.

Diversos estudios indican que es posible diseñar módulos de enseñanza en los programas de formación de maestros que apoyen el inicio del desarrollo de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes, centrándose en tópicos específicos. En este sentido, la revisión realizada por Krupa y sus

---

<sup>1</sup> Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación Infantil. (BOE de 4 de enero de 2007).

colegas (2017) sobre el desarrollo de la mirada profesional sugiere el uso de trayectorias de aprendizaje que sirvan de apoyo a los profesores. Los trabajos de Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) indican que una trayectoria de aprendizaje, tal como la entienden Clements y Sarama (2004), compuesta por un objetivo de aprendizaje matemático, un modelo de progresión en el aprendizaje a través del cual los niños avanzan en un dominio específico, y las tareas que pueden apoyar dicha progresión, puede ayudar a los profesores a tomar decisiones instruccionales y, en consecuencia, ser una herramienta para que los futuros profesores se inicien en el desarrollo de la mirada profesional.

En esta línea de investigación el trabajo de Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015), en el que se diseñó un módulo de enseñanza sobre la derivada para el desarrollo de la mirada profesional en estudiantes para profesor de secundaria, se apoyaba en una trayectoria de aprendizaje sobre la derivada basada en una revisión de la literatura sobre dicho concepto. Por su parte Wilson, Mojica y Confrey (2013) estudiaron cómo maestros de primaria que habían seguido un programa de formación donde se les había presentado una trayectoria de aprendizaje sobre la equipartición (EPLT - EquiPartitioning Learning Trajectory; Confrey, Maloney, Wilson y Nguyen, 2010) utilizaban los estadios de esta trayectoria para identificar la comprensión de los estudiantes. En cuanto a futuros maestros de infantil y primaria, el trabajo de Schack y sus colegas (2013) se ha basado en una trayectoria de aprendizaje sobre el conteo y la secuencia numérica (SEAL-Stages of Early Arithmetic Learning; adaptado de Thomas y Tabor, 2012) para el desarrollo de las tres destrezas de la mirada profesional. Los resultados de todas estas investigaciones muestran una mejora significativa en la adquisición de las tres destrezas.

Nuestro trabajo es similar a los mencionados anteriormente en cuanto al objetivo de desarrollar las destrezas de la mirada profesional y a la utilización de una trayectoria de aprendizaje. En nuestro estudio se considera la trayectoria de aprendizaje como un “artefacto” en el marco de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010). Este artefacto se convierte en instrumento conceptual cuando el estudiante para maestro lo hace suyo y lo usa para resolver la tarea propuesta, en este caso, analizar respuestas de alumnos de educación infantil desde la perspectiva de las tres destrezas de la mirada profesional (describir, interpretar y tomar decisiones). Sin embargo, difiere de estos trabajos en el tópico tratado: el pensamiento matemático de los niños de 3 a 6 años sobre la magnitud longitud y su medida. Asimismo, se diferencia de los dos primeros estudios en los destinatarios, ya que en nuestro caso se dirige a los futuros maestros de la etapa de educación infantil (3-6 años).

Nuestro objetivo es caracterizar el uso de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual con el propósito

de favorecer la adquisición por parte de los estudiantes para maestro de educación infantil de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los alumnos.

En la siguiente sección presentamos nuestro marco teórico y las dos preguntas de investigación que se derivan del objetivo planteado. A continuación, describimos la metodología empleada para responder a estas preguntas y los resultados de la investigación. En la última sección se exponen las conclusiones y se discuten los resultados.

## 2. MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta el objetivo de la investigación, hemos desarrollado esta sección para concentrarnos en el uso de trayectorias de aprendizaje como instrumento conceptual para la adquisición de la mirada profesional y la comprensión progresiva del concepto magnitud longitud y su medida en la etapa infantil.

### 2.1. *Uso de trayectorias de aprendizaje como instrumento conceptual en la mirada profesional de los estudiantes para profesor*

La relación entre las tres destrezas de la mirada profesional (Jacobs, Lam y Philipp, 2010) –describir, interpretar y decidir cómo responder con base en el pensamiento matemático de los alumnos– resulta compleja (Barnhart y van Es, 2015; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011). En la enseñanza de las matemáticas, Jacobs y sus colegas (2010) señalaron que las tres destrezas están interrelacionadas y son una manifestación de la competencia docente del maestro. Así, el reconocimiento de las estrategias de aprendizaje usadas por los estudiantes facilita a los profesores la toma de decisiones sobre cómo plantear la enseñanza. Sin embargo, no es concluyente, ya que algunos estudios (Gupta, Soto, Dick, Broderick y Appelgate, 2018) han mostrado que, a veces, los profesores toman decisiones adecuadas sin un análisis del trabajo de los estudiantes, pero apoyándose en una trayectoria de aprendizaje.

Para favorecer la consolidación de estas tres destrezas interrelacionadas que configuran la mirada profesional, una trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2004) puede ayudar a los profesores a comprender el pensamiento de los alumnos y apoyar sus decisiones instruccionales. En este sentido, una trayectoria de aprendizaje de un tópico matemático, como contenido a ser aprendido por los estudiantes para maestro y usado para justificar cómo interpretan las situaciones de enseñanza-aprendizaje, puede ser entendida como un instrumento

conceptual (Llinares, 2004), por lo que hemos adaptado el marco teórico de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010). En esta teoría se diferencia entre *artefacto*, el cual se identifica con la herramienta propiamente dicha, e *instrumento*, cuando el artefacto establece una relación significativa entre el usuario y la tarea a realizar. El instrumento no existe en sí mismo, sino que el artefacto se convierte en instrumento cuando el sujeto ha podido hacerlo suyo e integrarlo con la actividad que está realizando. Es decir, el artefacto es dado, mientras que el instrumento es construido a través de la actividad realizada por el sujeto (Verillon y Rabardel, 1995).

El proceso por el que un artefacto se convierte en instrumento y sirve como intermediario entre el objeto y el sujeto, se llama génesis instrumental (Trouche, 2004), y consiste en la formación en el estudiante de esquemas instrumentales (de uso o de acción instrumental) entendidos como formas estables de tratar determinadas tareas. En este proceso de génesis instrumental se pueden observar dos procesos interrelacionados, uno orientado hacia el artefacto y otro hacia el sujeto. En nuestro caso nos centramos en el proceso llamado *instrumentación* orientado hacia el sujeto. Es importante señalar que la utilización de un artefacto por parte del sujeto introduce en este una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización, de ahí que los estudiantes pueden acercarse a un artefacto de manera diferente y desarrollar diferentes esquemas de uso y de acción instrumental (Rabardel, 1995). Un esquema de uso (Drijvers y Trouche, 2008), es un esquema elemental básico, directamente relacionado con el artefacto, que puede servir como bloque de construcción para llegar a desarrollar el correspondiente esquema de acción instrumental. Los esquemas de acción instrumental, propios del proceso de instrumentación, son aquellos relacionados directamente con el uso del artefacto con vista a realizar una acción o una tarea, es decir, estos esquemas permiten al estudiante entender las potencialidades y restricciones del propio artefacto y se constituyen progresivamente en técnicas que permiten una respuesta efectiva a actividades matemáticas.

En nuestra investigación consideramos una trayectoria de aprendizaje como un artefacto que se convierte en instrumento conceptual cuando el estudiante para maestro lo hace suyo y lo usa para resolver la tarea propuesta. En el proceso de instrumentación, en el que la trayectoria de aprendizaje se convierte en instrumento conceptual, se generan dos esquemas de acción instrumental. Un primer esquema de acción instrumental cuando el estudiante para maestro usa el modelo de progresión en el desarrollo de la comprensión, facilitado en una trayectoria de aprendizaje, para interpretar las características de la comprensión del niño a partir de los elementos matemáticos identificados. Y un segundo esquema de acción instrumental cuando el estudiante para maestro usa conjuntamente el modelo de progresión en el desarrollo de la comprensión y

los tipos de tareas, facilitados en una trayectoria de aprendizaje, para proponer nuevas tareas en función de la interpretación de la comprensión del pensamiento de los niños realizada a partir del esquema anterior. Por tanto, la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje, por parte del estudiante para maestro, implica usar toda la información que ésta le proporciona (objetivos, progresión en el desarrollo de la comprensión y tareas) para interrelacionar las tres destrezas de la competencia docente “mirar profesionalmente” (identificar elementos matemáticos, interpretar la comprensión y tomar decisiones instruccionales).

## *2.2. Progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida en educación infantil*

Según Piaget (1972), para que un niño construya el concepto de magnitud longitud y su medida debe superar diferentes estadios: conocimiento y manejo de la magnitud (percepción de la magnitud, conservación, ordenación y relación entre la magnitud y el número); desarrollo evolutivo de la medida (comparación directa, desplazamiento de objetos y comparación indirecta), y constitución de la unidad (unicidad, iteración, acumulación, universalidad). El aprendizaje comienza realizando comparaciones cualitativas y ordenando objetos por su longitud; la siguiente etapa implica cuantificar la longitud mediante la asignación de un valor numérico y aprender a utilizar instrumentos de medición, por ejemplo, una regla (Van den Heuvel - Panhuizen y Elia, 2011).

Esta progresión no tiene por qué darse secuencialmente. Algunas investigaciones indican que los niños no siempre desarrollan la conservación de la magnitud antes de aprender algunas ideas de medición (Clements, 2010), lo que implica dificultades para desarrollar la noción de acumulación (Stephan, Bowers, Cobb y Gravemeijer, 2003), entender la unicidad de la unidad de longitud (Ellis, Siegler y Van Voorhis, 2003), realizar inferencias sobre la longitud de los objetos independientemente del tamaño de la unidad (Nunes y Bryant, 1996), o bien relacionar un número con una longitud e indicar su significado (Skoumpourdi, 2015).

En relación con la progresión en el aprendizaje, Sarama y Clements (2009) elaboraron una trayectoria de aprendizaje para la magnitud longitud y su medida a partir de los siguientes elementos: el reconocimiento de la longitud, la conservación, la transitividad, la equipartición, la unidad de medida y su unicidad, la iteración, la acumulación, el origen y la relación entre número y la unidad de medida; y de un conjunto específico de tareas instruccionales. Estas tareas pretenden promover que los niños de un nivel concreto de comprensión construyan habilidades y conceptos mediante un conjunto de actividades instruccionales secuenciadas. Posteriormente, esta trayectoria ha sido revisada introduciendo una secuencia de niveles de pensamiento a través de los cuales los alumnos pueden progresar

(Szilagyi, Clements y Sarama, 2013). En esta investigación hemos adaptado una trayectoria de aprendizaje desde estas propuestas iniciales (Sarama y Clements, 2009; Szilagyi *et al.*, 2013) para introducirla en la formación inicial de maestros de educación infantil.

Teniendo en cuenta el objetivo planteado y en el contexto de este marco teórico, en este estudio formulamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo usan los estudiantes para maestros de educación infantil la progresión del aprendizaje de la longitud y su medida, dada en una trayectoria de aprendizaje, para interpretar la comprensión de los niños (primer esquema de acción instrumental)?
- ¿Qué tareas proponen los estudiantes para maestro para favorecer el aprendizaje de los niños de la longitud y su medida, teniendo en cuenta la progresión del aprendizaje de la longitud y su medida y las tareas que conforman una trayectoria de aprendizaje (segundo esquema de acción instrumental)?

### 3. MÉTODO

Para responder a las preguntas de investigación se han analizado las respuestas de 64 estudiantes para maestro de educación infantil (EPM) a una tarea profesional que forma parte de un módulo de enseñanza en el que se les proporciona una trayectoria de aprendizaje sobre la magnitud longitud y su medida. En esta tarea se plantean tres cuestiones profesionales vinculadas con las tres destrezas de la mirada profesional. El análisis de las respuestas a las dos primeras cuestiones (describir e interpretar) permitirán responder a la primera pregunta de investigación, y el análisis conjunto de la segunda y la tercera cuestión (interpretar y proponer tareas) permitirán responder a la segunda pregunta de investigación.

#### 3.1. *Participantes y contexto*

En nuestro estudio han participado 64 EPM que cursaban la asignatura Aprendizaje de la geometría del sexto cuatrimestre del grado en maestro en educación infantil de la Universidad de Alicante (España). En el programa formativo de esta asignatura se incluyó un módulo sobre la magnitud longitud y su medida que constaba de cinco sesiones presenciales de 105 minutos cada uno, con el objetivo de adquirir las tres destrezas que conforman la mirada profesional. Los EPM disponían, como documento teórico de apoyo, de una trayectoria de aprendizaje sobre la magnitud longitud y su medida en niños de 3 a 6 años. Dicha

trayectoria constaba de un objetivo de aprendizaje, un modelo de progresión de la comprensión de la longitud y su medida (tabla I), y ejemplos de tareas instruccionales para ayudar a progresar a los niños en su comprensión.

TABLA I  
Modelo de progresión de la comprensión de la longitud y su medida  
(adaptado de Sarama y Clements, 2009)

<i>Nivel</i>	<i>Progresión del desarrollo</i>	
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Reconocen la magnitud longitud:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identifican las cualidades de la magnitud longitud.</li> </ul> </li> <li>– Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.</li> </ul>	Del reconocimiento de la magnitud longitud como un atributo de los objetos hasta la propiedad transitiva
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Reconocen la conservación de la longitud:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.</li> </ul> </li> </ul>	
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Utilizan la propiedad transitiva para realizar:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Comparaciones indirectas</li> <li>- Ordenaciones de objetos.</li> <li>- Medidas de longitudes.</li> </ul> </li> </ul>	
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Realizan equiparticiones de objetos.</li> <li>– Identifican una única unidad de medida y realizan iteraciones de la misma:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconocen la propiedad de acumulación.</li> </ul> </li> </ul>	Constitución de la idea de unidad de medida de longitud
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Reconocen la universalidad de la unidad de medida.</li> <li>– Reconocen la relación entre número y unidad de medida.</li> <li>– Comienzan a hacer estimaciones</li> </ul>	

### 3.2. Instrumento de recogida de datos

En esta investigación el instrumento de recogida de datos son las respuestas a tres cuestiones profesionales sobre una situación de enseñanza; esta situación fue propuesta en la última sesión del módulo. En la situación de enseñanza (Figura 1) una maestra plantea a cuatro niños hacer collares usando cuerdas de distinta longitud y distintas formas (enrollada, estirada y doblada) y abalorios/ cuentas de diferentes clases y tamaños (macarrones, estrellitas, etcétera).

Alicia es una maestra de infantil de una escuela pública. La edad de sus alumnos se encuentra entre los cinco y seis años. Hace una semana que empezó a trabajar la magnitud, longitud y su medida. Hoy aprovechando la clase de plástica propone a los niños hacer collares usando diferentes materiales (cuentas de colores y distintos tipos de macarrones), y cordones de varios tamaños (A, B y C):

*Accesorios para collares*



Una vez que ha propuesto la tarea, los niños eligen sus cuerdas y accesorios y empiezan a confeccionar los collares. Terminados todos los collares, Alicia les pregunta a los niños:

Maestra: *¿Quién ha hecho el collar más largo?*

Mario: *He hecho el collar con la cuerda con forma de bastón [cuerda C] y he usado 13 macarrones [ha utilizado macarrones de varios tipos].*

Almudena: *Seño, yo he hecho un collar con la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 15 estrellitas [las estrellitas están muy separadas].*

Luis: *El mío tiene 12 macarrones [ha utilizado todos del mismo tipo] y he cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada [cuerda B], pero es más largo que el de Mario porque la cuerda es más larga.*

Elena: *Yo también he utilizado la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 20 estrellitas [las estrellitas están todas juntas].*

Almudena: *luego el más largo de todos los collares es el de Elena.*

A partir de las respuestas dadas Alicia, les pregunta a los niños:

Maestra: *¿Estáis de acuerdo?*

Mario: *No seño, yo no estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones.*

*Figura 1. Situación de enseñanza planteada*

Los niños eligieron diferentes cuerdas y abalorios. Por ejemplo, Mario eligió la cuerda C y usó macarrones de distintos tamaños; Almudena eligió la cuerda A y estrellitas del mismo tamaño y las insertó dejando huecos entre ellas; Elena también eligió la cuerda A y estrellitas del mismo tamaño y las insertó sin dejar huecos, y Luis eligió la cuerda B y usó macarrones del mismo tamaño y los insertó sin dejar huecos. Una vez confeccionados los collares, se produce un diálogo entre la maestra y los niños. El diálogo proporciona evidencias de diferentes características de la comprensión de la magnitud longitud y su medida de los cuatro niños (tabla II).

TABLA II  
Características de la comprensión de los niños sobre la longitud y su medida evidenciadas en el diálogo

<i>Elementos de la magnitud longitud y medida</i>	<i>Mario</i>	<i>Almudena</i>	<i>Luis</i>	<i>Elena</i>	
<i>Magnitud</i>	Reconocimiento longitud	Sí	Sí	Sí	Sí
	Conservación	No	No	Sí	X
	Transitividad	X	X	X	X
<i>Medida de la longitud</i>	Equipartición	No	No	Sí	Sí
	Unidad de medida	No	No	Sí	Sí
	Unicidad	No	Sí	Sí	Sí
	Iteración	Sí	No	Sí	Sí
	Acumulación	Sí	Sí	Sí	Sí
	Universalidad	X	X	X	X
	Relación entre el número y la unidad de medida	X	No	X	X

Leyenda: No= existen evidencias de que no se comprende el elemento; Sí= existen evidencias de que se comprende el elemento; X= no hay datos

Las tres cuestiones profesionales a las que debían responder los EPM y que constituían nuestro instrumento de recogida de datos fueron las siguientes:

*Centrando tu atención en el diálogo, contesta las siguientes cuestiones:*

*Cuestión 1. Indica los elementos relevantes que, desde el punto de vista de la maestra, son necesarios para realizar la tarea.*

*Cuestión 2. ¿En qué nivel de comprensión situarías a cada uno de los niños del diálogo? Razona tu respuesta a partir de las características puestas de manifiesto y justifícalo usando las intervenciones de los niños.*

*Cuestión 3. Suponiendo que eres Alicia, propón una actividad para el niño/a que consideras que está en el nivel más bajo, y para el niño/a que está en el nivel más alto para que sigan progresando en la comprensión de la longitud y su medida.*

El objetivo de estas cuestiones era pautar el análisis de la situación de aprendizaje. Estas cuestiones están basadas en las tres destrezas que conforman la mirada profesional.

En relación con la primera cuestión, los EPM debían identificar, respecto de la magnitud: si los niños habían reconocido la longitud, identificando el largo del collar como la longitud de la cuerda que habían elegido; su conservación, considerando si los niños tenían en cuenta que la longitud de la cuerda no cambia, aunque esté doblada o estirada (Mario, cuerda C; Luis, cuerda B; Almudena y Elena, cuerda A). En cuanto a la medida de la longitud los EPM debían reconocer si los niños consideraban una única unidad de medida, a través de cuentas/abalorios del mismo tamaño, si realizaban iteraciones de la unidad sin dejar huecos y sin superposiciones, y si utilizaban el número de abalorios empleadas para indicar el largo del collar.

En relación con la segunda cuestión, los EPM debían interpretar que Mario y Almudena se encuentran en el nivel uno porque no reconocen la conservación de la longitud al usar el número de abalorios de sus collares, en lugar de la forma de las cuerdas, para comparar la longitud de estos. En cuanto a Luis y Elena, los EPM debían interpretar que se encuentran en el nivel cuatro porque dadas las características de la situación de enseñanza-aprendizaje hay evidencias, en relación con la magnitud, de que Luis tiene adquirido el reconocimiento y la conservación de la longitud y de que Elena tiene adquirido el reconocimiento de la longitud. En relación con la medida de longitud, Luis y Elena tienen adquirida la unicidad de medida, la iteración y la acumulación, dado que usan una única unidad de medida, macarrones y estrellitas, respectivamente, la iteran sin dejar huecos ni superposiciones y han utilizado el número de abalorios usados para indicar el largo del collar (acumulación).

En relación con la tercera cuestión, los EPM debían plantear, en función de los niveles de comprensión inferidos para los cuatro niños, decisiones instruccionales que favoreciesen su progresión en el aprendizaje. Así, para Mario y Almudena que se encuentran en el nivel uno, deberían plantear como objetivo de aprendizaje adquirir la conservación de la longitud y proponer como tarea, por ejemplo, comparar objetos con diferentes longitudes y formas. Para Luis y Elena, que se encuentran en el nivel cuatro, al no tener evidencia de si comprendían la relación entre número y medida, podrían proponer como objetivo de aprendizaje adquirir esta relación y plantear, por ejemplo, la tarea de medir la longitud de un objeto primero con una unidad y después con otra de distinto tamaño.

### 3.3. *Análisis*

Los datos de este estudio son las respuestas de los EPM a las tres cuestiones profesionales planteadas. Para analizarlos se ha realizado un análisis cualitativo de carácter inductivo llevado a cabo por un grupo de cinco investigadoras que analizaron primero una pequeña muestra a partir de la cual se discutieron las codificaciones y las relaciones de estas con las evidencias, para crear varias categorías. Una vez llegado a un acuerdo, se añadieron nuevos datos con el objetivo de revisar el sistema de categorías creado inicialmente y constatar su validez (Strauss y Corbin, 1994). Este proceso de análisis se realizó en dos fases. En ambas fases se analizaba la relación de las tres destrezas que conforman la mirada profesional, a través del uso de la trayectoria de aprendizaje del módulo de enseñanza. Estas dos fases se realizaron como se describe a continuación.

En la primera fase se analizaron conjuntamente las cuestiones profesionales 1 y 2 (identificar elementos matemáticos y nivel de comprensión de los niños implicados en la situación de enseñanza - aprendizaje) a fin de conocer si los EPM habían hecho uso de la progresión del aprendizaje de la longitud y su medida dada en la trayectoria de aprendizaje del módulo para interpretar, a partir de los elementos matemáticos identificados, las características de la comprensión de los niños. Como resultado de este primer análisis identificamos distintos grupos basados en la manera en la que los EPM usaban el modelo de progresión en el aprendizaje (primer esquema de acción instrumental).

En la segunda fase analizamos si los EPM proponían tareas adecuadas para favorecer el aprendizaje de los niños, teniendo en cuenta la progresión del aprendizaje y las tareas instruccionales que conformaban la trayectoria de aprendizaje del módulo, así como las características de la comprensión que habían interpretado en la fase anterior (segundo esquema de acción instrumental). Como resultado de este análisis obtuvimos distintos grupos de EPM basados en la manera en la que estos usaban el modelo de progresión en el aprendizaje y las tareas instruccionales (segundo esquema de acción instrumental) que describimos en la sección de resultados.

## 4. RESULTADOS

Esta sección se ha organizado en tres apartados. En el primer apartado describimos las características de los EPM que no usaron la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje. En los apartados dos y tres, las características de los EPM que usaron la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje, atendiendo a las dos preguntas de investigación propuestas. La figura 2 muestra los diferentes grupos de EPM que esta caracterización ha generado.

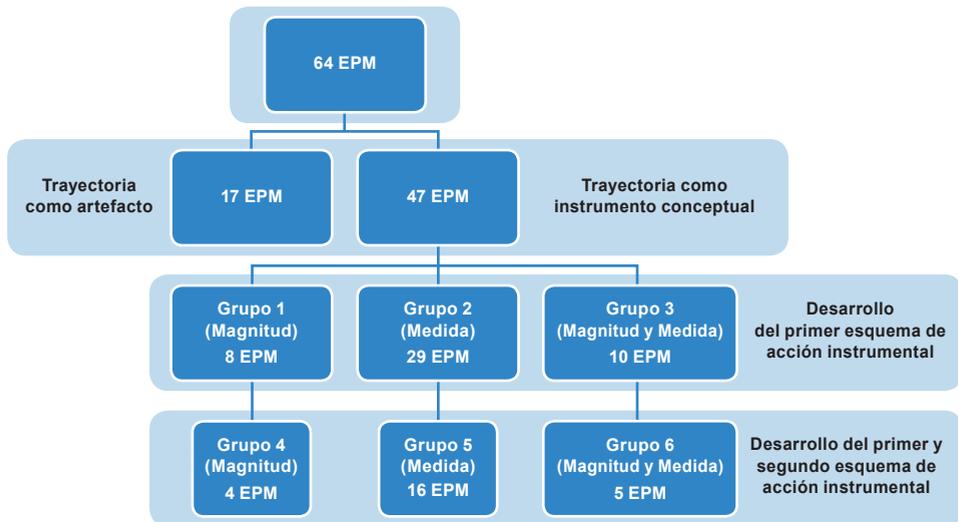


Figura 2. Grupos de EPM caracterizados según el uso de la trayectoria de aprendizaje

#### 4.1. Desaprovechamiento de la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje para adquirir las tres destrezas de la competencia

De los 64 EPM participantes en la investigación 17 de ellos no usaron la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje para adquirir las tres destrezas de la competencia “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños de infantil, pues justificaron sus respuestas mediante descripciones generales sin relacionar su conocimiento de matemáticas con su conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños. Para estos EPM la trayectoria de aprendizaje es un artefacto (grupo 0). Por ejemplo, la EPM Carmen indicó:

- Carmen: Mario está en nivel 3 porque hace comparaciones indirectas teniendo de objeto intermediario los macarrones, no es capaz de ver que, aunque tenga más macarrones no son de igual tamaño...
- Carmen: Almudena está en nivel 4 puesto que reconoce la propiedad de acumulación ya que sabe que la suma de la unidad de medida es equivalente al número de iteraciones (relación palabra-número) tiene clara que es necesaria la unidad de medida y su iteración y que se divide en partes iguales (equipartición).
- Carmen: Luis está en el nivel 5 puesto que es capaz de reconocer que el número de objetos no siempre determina la longitud por tanto tiene adquirida la propiedad de la relación medida y número.
- Carmen: Elena está en nivel 2 pues no hace comparaciones indirectas.

Para interpretar las características de la comprensión de los niños, esta EPM usa los elementos de magnitud y su medida sin relacionarlos con evidencias de la situación de enseñanza planteada. Por ejemplo, indica que Luis hace uso de la relación entre número y medida, pero en la descripción de la situación no hay evidencia de esta relación; atribuye a Almudena el uso de la equipartición, cuando realmente ésta deja huecos al iterar la unidad de medida, lo que muestra un uso retórico del elemento matemático. Además, introduce expresiones (comparaciones indirectas) sin indicar evidencias que pudieran dotarla de sentido. Todo esto le ha llevado a interpretar la comprensión de los niños incorrectamente dado que Luis y Almudena se encuentran en el nivel 4 y 1 de comprensión, respectivamente. Este protocolo muestra el uso retórico del lenguaje en las respuestas de los EPM y genera un discurso sin sentido o que no aporta evidencias.

#### 4.2. *Uso de la progresión del aprendizaje de la longitud y su medida, dada en una trayectoria de aprendizaje, para interpretar la comprensión de los niños (Desarrollan el primer esquema de acción instrumental)*

De los 64 participantes en la investigación, agrupamos a 47 EPM que usaron la progresión del aprendizaje para identificar los elementos matemáticos e interpretar la comprensión de los niños en tres grupos en función de cómo usaron dicha progresión. El grupo 1 corresponde a aquellos que han desarrollado las destrezas de identificar e interpretar usando sólo la parte de la progresión del aprendizaje relativa a la magnitud; en el grupo 2 se encuentran los que usaron sólo la parte relativa a la medida de longitud, y el grupo 3, los que usaron la progresión del aprendizaje de la magnitud longitud y su medida.

- *Grupo 1: Identifican los elementos matemáticos e interpretan la comprensión de los niños usando solo la parte de la progresión del aprendizaje relativa a la magnitud*

Únicamente ocho de los 47 EPM interpretaron la comprensión de los niños sólo en relación con la magnitud longitud usando la información proporcionada en la progresión del aprendizaje de la trayectoria referida a esta parte. Un ejemplo de estos estudiantes es Sara, que interpretó la comprensión de Mario y Almudena describiendo que estos niños no comprendían la conservación de la magnitud longitud al no ser capaces de realizar comparaciones entre longitudes de cuerdas de distintas formas. Sin embargo, no hizo referencia a los elementos relativos a la medida de la longitud:

Sara: Mario... no tiene adquirida la conservación... asocia la magnitud al número de macarrones y no al largo de la cuerda, lo podemos saber porque dice: "yo no estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones".

Sara: Almudena también se deja llevar por la percepción ya que a pesar de haber usado la misma cuerda que Elena, piensa que es más largo por tener más estrellitas. Lo sabemos cuándo dice: “el más largo de todos es el de Elena”.

El hecho de que Sara no usara los elementos relativos a la medida de longitud (unicidad de la unidad de medida, iteración o acumulación) le impidió identificar correctamente las características de la comprensión de Luis y Elena. Tan sólo fue capaz de reconocer evidencias de la adquisición por parte de Luis de la idea de conservación de la longitud:

Sara: Luis tiene adquirida la conservación de la magnitud porque a pesar de que la cuerda está más doblada se da cuenta de que es más larga, lo sabemos cuando dice: “pero es más largo que el de Mario porque la cuerda es más larga”.

- *Grupo 2: Identifican los elementos matemáticos e interpretan la comprensión de los niños usando solo la parte de la progresión del aprendizaje relativa a la medida de la longitud*

En este grupo se encuentran 29 de los 47 EPM que interpretaron la comprensión de los niños de la situación de enseñanza-aprendizaje, sólo en relación con la medida de la longitud usando la información proporcionada en la progresión del aprendizaje referida a esta parte. Por ejemplo, José describió de forma correcta el nivel de comprensión de Luis y Elena mencionando el uso adecuado de la iteración:

José: Luis y Elena se encuentran en el nivel 4 ya que todas las bolas/macarrones están colocadas juntas, sin dejar ninguna separación.

Y para Almudena infirió las características de su comprensión usando la idea de unicidad de la unidad de medida e iteración al indicar que empleaba únicamente estrellitas para hacer el collar, si bien dejaba huecos entre ellas:

José: Almudena también se encuentra en transición del nivel 3 al 4 ya que ha usado solo estrellas, pero no ha realizado una iteración sin huecos, ha dejado separación entre las estrellas.

Además, comparó la comprensión de Mario con sus compañeros haciendo uso de la no unicidad de la medida al escoger macarrones de distinto tamaño:

José: Mario se encuentra en transición del nivel 3 al 4 aunque sólo ha utilizado macarrones y los ha escogido de diferente tamaño, con lo cual aún no tiene adquirida la unicidad de la medida.

El hecho de que estos EPM no hicieran referencia a los elementos de magnitud (reconocimiento, conservación y transitividad) para caracterizar la comprensión de todos los niños de la situación planteada, hizo que no reconocieran adecuadamente las características de la comprensión de Mario y Almudena.

- *Grupo 3: Identifican los elementos matemáticos e interpretan la comprensión de los niños usando la progresión del aprendizaje de la magnitud longitud y su medida.*

A este grupo pertenecen diez de los 47 EPM que describieron las características de la comprensión de todos los niños que formaban parte de la situación de enseñanza-aprendizaje planteada. Estos estudiantes usaron tanto elementos matemáticos de magnitud (conservación) como de medida (iteración, unicidad de medida, acumulación y equipartición) para interpretar las características de la comprensión de todos los niños, haciendo uso de la progresión en el aprendizaje facilitado en la trayectoria de aprendizaje. Por ejemplo, Pedro describió el nivel de comprensión de Mario usando la idea de conservación al indicar:

Pedro: Mario se encuentra en el nivel 1, ya que no reconoce la conservación, debido a que no observa la medida de las cuerdas [distintas formas y tamaños], solo se fija en el número de macarrones: “el mío tiene más macarrones”.

Así mismo, usó los elementos de la medida de longitud: equipartición, iteración y unidad de medida, para describir el nivel de comprensión de Luis:

Pedro: Luis se encontraría en el nivel 4 porque ha adquirido la equipartición de manera correcta [al utilizar macarrones del mismo tamaño para rellenar la cuerda], sin saltos ni superposiciones [iteración] y sabe que las cuerdas tienen medidas distintas y la suya es más larga que la de Mario [conservación]. No se guía por los accesorios.

De los 47 EPM que usaron la progresión del aprendizaje de la longitud y/o su medida, dada en una trayectoria de aprendizaje, para interpretar la comprensión de los niños, seis no propusieron tareas, y 16 propusieron tareas sin tener en cuenta el nivel de comprensión inferido al no vincular las tareas instruccionales con la progresión en el aprendizaje de la trayectoria de aprendizaje (segundo esquema de uso). Por ejemplo, Nerea, EPM del grupo 1, interpretó adecuadamente la comprensión de Mario y Almudena, pero la tarea que propuso a estos dos niños se centraba en la medida, si bien debería haberse centrado en la adquisición de la conservación, para que Mario y Almudena progresaran del nivel 1, en el que se encontraban, al nivel 2 según la progresión del aprendizaje:

Nerea: Objetivo: Medir una mesa con cuerdas de distinto tamaño

Nerea: Tarea: Mide la mesa del aula con cuerdas de igual y de distinto tamaño

En consecuencia, 22 EPM sólo desarrollaron el primer esquema de acción instrumental. Los 25 EPM restantes, además de desarrollar el primer esquema de acción instrumental también propusieron tareas para favorecer su aprendizaje usando la progresión en el aprendizaje y las tareas instruccionales que conforman la trayectoria de aprendizaje (desarrollan el segundo esquema de acción instrumental).

4.3. *Propuesta de tareas para favorecer el aprendizaje de la longitud y su medida, teniendo en cuenta la progresión del aprendizaje y las tareas que conforman la trayectoria de aprendizaje (desarrollan en segundo esquema de acción instrumental)*

De los 47 EPM, 25 desarrollaron el primer esquema de acción instrumental y propusieron tareas para favorecer su aprendizaje usando la progresión en el aprendizaje y las tareas instruccionales que conforman la trayectoria de aprendizaje, por tanto, a éstos los agrupamos en tres grupos en función de cómo han realizado este uso para proponer tareas. El grupo 4 corresponde a aquellos EPM del grupo 1 que han desarrollado las tres destrezas usando sólo la parte de la progresión del aprendizaje y las tareas instruccionales relativas a la magnitud; el grupo 5 corresponde a aquellos EPM del grupo 2 que sólo usaron la parte relativa a la medida de longitud, y el grupo 6 corresponde a los EPM del grupo 3 que usaron la progresión del aprendizaje y las tareas instruccionales de la magnitud longitud y su medida.

- *Grupo 4: Proponen tareas para favorecer el aprendizaje de la magnitud longitud, teniendo en cuenta sólo la parte de la progresión del aprendizaje y las tareas que conforman la trayectoria de aprendizaje relativas a la magnitud*

Este grupo corresponde a los 4 EPM del grupo 1 que han propuesto nuevas tareas para progresar en el aprendizaje en relación con la magnitud longitud, a partir de la comprensión inferida. Por ejemplo, Sara, la EPM que, como ya hemos indicado en la descripción del grupo 1, identificó que Mario y Almudena no tenían adquirida la conservación de la magnitud y, en función de este elemento interpretó su comprensión, propuso una tarea para que estos niños progresasen en el aprendizaje de la magnitud longitud, acorde con la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje del módulo:

Sara: Objetivo: Observar que la longitud de un objeto, en este caso la cuerda, no cambia a pesar de la posición o la forma

Sara: Tarea: Se les presentan dos cuerdas del mismo tamaño, una estirada y la otra doblada. Y les pediría que estiraran la cuerda doblada y la compararan con la otra y luego que la volvieran a doblar.

- *Grupo 5: Proponen tareas para favorecer el aprendizaje de la medida de la longitud, teniendo en cuenta solo la parte de la progresión del aprendizaje y las tareas que conforman la trayectoria de aprendizaje relativas a la medida*

En este grupo están 16 EPM del grupo 2 que han propuesto nuevas tareas para progresar en el aprendizaje de la medida longitud. Por ejemplo, José, el EPM que, como ya hemos indicado en la descripción del grupo 2, identificó que Luis y Elena iteraban bien la unidad de medida e interpretó la comprensión de estos

niños en función de este elemento, también propuso una tarea para que estos niños progresasen en el aprendizaje de la medida de longitud, acorde a la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje:

José: Objetivo: Identificar la relación entre el número y la unidad de medida.

José: Tarea: Rellenar dos cuerdas del mismo tamaño, una con macarrones largos y la otra con macarrones cortos.

- *Grupo 6: Proponen tareas para favorecer el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida, teniendo en cuenta la progresión del aprendizaje y las tareas que conforman la trayectoria de aprendizaje*

En este grupo están cinco EPM de los diez que conforman el grupo 3 que han propuesto nuevas tareas para progresar en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida. Por ejemplo, Pedro, el EPM que, como ya hemos indicado en la descripción del grupo 3, interpretó la comprensión de todos los niños en la situación de enseñanza a partir de los elementos matemáticos de magnitud y medida identificados, también fue capaz de proponer tareas que favorecieran que estos niños progresasen en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida, acorde con la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje. Para los niños de nivel bajo propuso:

Pedro: El objetivo para Mario sería que reconozca la conservación y la transitividad.

Pedro: Tarea que propongo: realizar comparaciones directas e indirectas con cuerdas colocadas de formas diferentes y posiciones distintas.

Asimismo, para los niños de nivel superior propuso:

Pedro: El objetivo planteado es reconocer la relación entre el número y la unidad de medida.

Pedro: La tarea: les presentaría collares realizados con las mismas cuerdas, pero diferentes abalorios para que al contar observaran que la medida se mantiene [pero no el número de iteraciones]; también les presentaría collares de diferentes longitudes. De paso, se profundizaría en el concepto de acumulación, al ser constante siempre la medida de los collares, cuando corresponda.

Estos estudiantes han usado toda la información que le proporcionaba la trayectoria (objetivos, progresión en el aprendizaje y tareas instruccionales) para interrelacionar las tres destrezas de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños (identificar elementos matemáticos, interpretar la comprensión y proponer tareas) por lo que han instrumentado la trayectoria de aprendizaje.

## 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que el objetivo de nuestra investigación es caracterizar el uso que los EPM hacen de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual, para favorecer la adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños, hemos organizado esta sección en dos apartados. El primero da respuesta a las dos cuestiones de investigación sobre la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje, en términos del desarrollo de dos esquemas de acción instrumental. El segundo da cuenta del papel del enfoque instrumental para obtener indicadores de la adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños.

### 5.1. *El uso de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual para la adquisición de la mirada profesional*

Tal como asumimos en el marco teórico, la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje pasa por desarrollar los dos esquemas de acción instrumental para inferir y comparar la comprensión de los niños, y, a partir de ahí, proponer tareas que favorezcan la progresión en la comprensión de la magnitud longitud y su medida. Los resultados han mostrado que de los 64 EPM, sólo cinco han llegado a la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, lo que nos sugiere que podrían haber adquirido la mirada profesional. Por tanto, concluimos que la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje es un proceso complejo para los EPM que va más allá de la realización de un módulo de enseñanza en el contexto de una asignatura.

Cabe señalar que 20 EPM han iniciado la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje al haber desarrollado, para la magnitud o para la medida, los dos esquemas de acción instrumental propios de este proceso. Estos EPM no han podido completar la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje debido a las dificultades para reconocer evidencias de la comprensión de algunos elementos matemáticos de magnitud (grupo 2) o de medida (grupo 1) que aparecían en la situación de enseñanza-aprendizaje planteada como, por ejemplo, la conservación de la magnitud, que no se daba en las estrategias de Mario y Almudena, o algunas ideas de medición, como la iteración (Mario) y la unicidad (Almudena) (Clements, 2010), lo que les llevó a centrar su atención sólo en la comprensión de la magnitud longitud o en su medida, respectivamente.

Entre los 22 EPM que sólo desarrollaron el primer esquema de acción instrumental, lo que les permitió interrelacionar dos de las tres destrezas de la competencia docente “mirar profesionalmente” (identificar elementos matemáticos e interpretar la comprensión), hubo 16 EPM que propusieron tareas que no estaban basadas en la comprensión interpretada (Choy, 2016; Gupta *et al.*, 2018; Santagata y Yeh, 2016; Wilson *et al.*, 2015) por lo que consideramos que dichas tareas podrían afectar la progresión en el aprendizaje de los niños al suponer un salto cognitivo

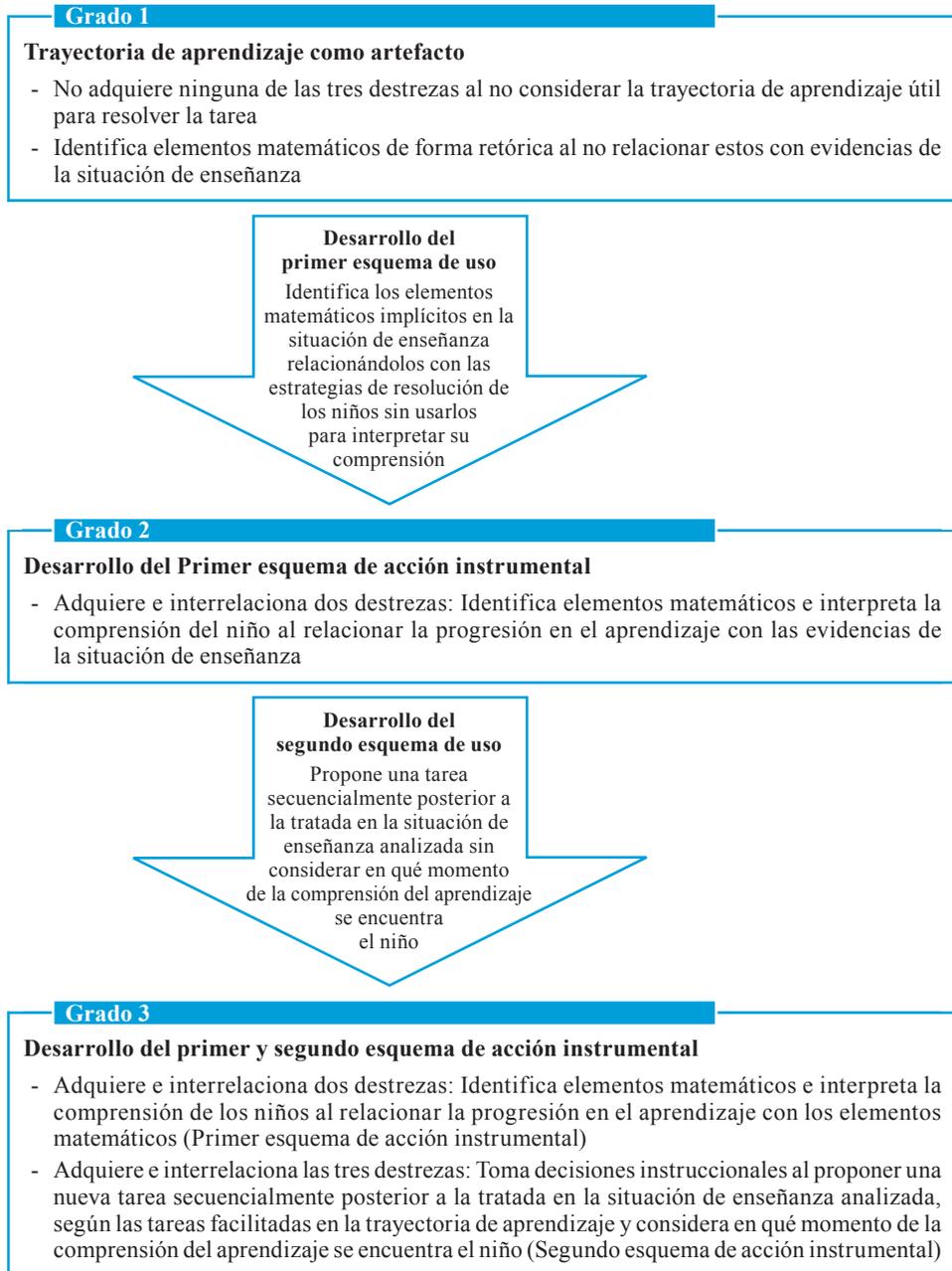
que imposibilitaría un aprendizaje global de la magnitud longitud y su medida. En consecuencia, según como entendemos el desarrollo del segundo esquema de acción instrumental y la adquisición de la competencia “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños (Jacobs *et al.*, 2010), estos EPM han desarrollado únicamente el primer esquema de acción instrumental. Por tanto, consideramos que una condición necesaria pero no suficiente para desarrollar el segundo esquema de acción instrumental es haber desarrollado el primero.

Aquellos EPM para los que la trayectoria de aprendizaje facilitada en el módulo de enseñanza fue un artefacto no adquirieron ninguna de las tres destrezas de la competencia. La dificultad para la adquisición de las destrezas podría deberse a no haber sido capaces de establecer relaciones entre su conocimiento de matemáticas y su conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños. Esta dificultad ya ha sido indicada en investigaciones sobre la mirada profesional de los EPM (Fernández *et al.*, 2013; Son, 2013; Wilson, Sztajn, Edgington y Confrey, 2014), en las que se concluía que para establecer esta relación era necesario que los EPM identificaran las respuestas de los niños y determinaran cómo éstas eran o no significativas desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas.

## 5.2. *Papel del enfoque instrumental como indicador de la adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente”*

El uso del enfoque instrumental como marco teórico nos ha permitido describir el proceso de adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños e identificar los procesos cognitivos que han desarrollado los EPM y los conocimientos adquiridos sobre cómo y cuándo es útil usar la trayectoria de aprendizaje para resolver la tarea.

Los resultados permiten identificar tres grados de adquisición de la competencia “mirar profesionalmente”, caracterizados por el desarrollo progresivo de los distintos tipos de esquemas (figura 3). El primer grado de adquisición se caracteriza por considerar la trayectoria de aprendizaje como un artefacto (Rabardel, 2002; Verillon y Rabardel, 1995), lo que supone que los EPM no realizan ningún proceso cognitivo con la trayectoria de aprendizaje. Por tanto, no consideran la trayectoria de aprendizaje útil para resolver la tarea, o bien usan los elementos matemáticos de forma retórica y no pueden establecer relaciones entre su conocimiento de matemáticas y su conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños. En este grado no se adquieren ninguna de las tres destrezas de la competencia. En relación con el enfoque instrumental, podría darse un primer esquema de uso (Drijvers y Trouche, 2008) cuando el EPM identificara los elementos matemáticos implícitos en la situación de enseñanza relacionándolos con las estrategias de la resolución de los niños, sin tener en cuenta la comprensión. Este proceso cognitivo le podría servir como bloque de construcción para desarrollar el primer esquema de acción instrumental. No obstante, en nuestro estudio no se ha evidenciado este hecho.



*Figura 3.* Grados de adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente” y procesos cognitivos realizados

Un segundo grado de adquisición se caracteriza por iniciar el uso de la trayectoria de aprendizaje como un instrumento conceptual, lo que supone que los EPM desarrollan el primer esquema de acción instrumental al relacionar la progresión en el aprendizaje con las evidencias de la situación y, en consecuencia, interpretar la comprensión de los niños a partir de los elementos matemáticos identificados. Este hecho proporciona evidencias de la relación entre dos de las tres destrezas que caracterizan la competencia: describir las estrategias de resolución de los niños a partir de los elementos matemáticos identificados e interpretar su comprensión. En relación con el enfoque instrumental, se desarrolla un segundo esquema de uso cuando el EPM usa las tareas facilitadas en la trayectoria de aprendizaje para proponer una nueva tarea secuencialmente posterior a la tratada en la situación de enseñanza analizada, sin considerar en qué momento de la comprensión del aprendizaje se encuentra el niño, lo que les serviría para llegar a construir el segundo esquema de acción instrumental.

Por último, el tercer grado de adquisición se caracteriza por la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, lo que supone el desarrollo y la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental al relacionar la progresión en el aprendizaje con las evidencias de la situación de enseñanza y, en consecuencia, interpretar la comprensión de los niños a partir de los elementos matemáticos identificados (primer esquema de acción instrumental) y proponer tareas coherentes con la comprensión interpretada, relacionando la progresión en el aprendizaje y las tareas facilitadas en la trayectoria de aprendizaje (segundo esquema de acción instrumental). Este hecho proporciona evidencias de la interrelación entre las tres destrezas y, en consecuencia, la adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños.

Consideramos que estos resultados deberían considerarse en el diseño de módulos de enseñanza en los programas de formación de maestros para crear oportunidades de aprendizaje que potencien la interrelación entre las destrezas identificar, interpretar y tomar decisiones instruccionales (Mason, 2002; Sherin *et al.*, 2011), considerando el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de las matemáticas y de los estudiantes organizado mediante trayectorias de aprendizaje con el objetivo de favorecer el inicio del desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

#### AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos EDU2014-54526-R, EDU2017-87411-R, MINECO/FEDER, España, y Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barnhart, T., & van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, 45, 83–93. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005>
- Choy, B.H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal*, 28, 421-440. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s13394-016-0173-3>
- Clements, D. H. (2010). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics*, 99 (1), 5–11. DOI: <https://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17440.x>
- Clements, D., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 81-89. DOI: [https://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602\\_1](https://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1)
- Confrey, J., Maloney, A. P., Wilson, P. H., & Nguyen, K. H. (2010). Understanding over time: The cognitive underpinnings of learning trajectories. In *annual meeting of the American Education Research Association*, Denver, CO, USA.
- Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York, USA: Springer.
- Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 363-392). Charlotte, NC, USA: Information Age.
- Ellis, S., Siegler, R. S., & Van Voorhis, F. E. (2003). *Developmental changes in children's understanding of measurement procedures and principles*. Paper presented at the Society for Research in Child Development, Tampa, FL, USA.
- Gupta, D., Soto, M., Dick, L., Broderick, S. D., & Appelgate, M. (2018). Noticing and deciding the next steps for teaching: A cross-university study with elementary pre-service teachers. In G. J. Stylianides & K. Hino (eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers, ICME-13 Monographs* (pp. 261-275), Cham, Germany: Springer.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41 (2), 169-202.
- Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S., & Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. In E. O. Schack et al. (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-71). Cham, Germany: Springer.
- Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en educación primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 36, 93-115.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London, U.K.: Routledge Falmer.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA, USA: NCTM.
- Nunes, T., & Bryant, P. E. (1996). *Children doing mathematics*. Cambridge, MA, USA: Blackwell.
- Parks, A. M., & Wager, A. A. (2015). What knowledge is shaping teacher preparation in early childhood mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education* 36(2), 124-141. DOI: <https://dx.doi.org/10.1080/10901027.2015.1030520>
- Piaget, J. (1972). *Judgment and reasoning in the child*. MD, USA: Littlefield, Adams.

- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, France: Armand Colin.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(6), 305-1329. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y>
- Santagata, R., & Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM*, 48(1-2), 153-165. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0737-9>
- Sarama, J., & Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York, UK and USA: Routledge.
- Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J., & Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education* 16(5), 379-397. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10857-013-9240-9>
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds.) (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York, USA: Routledge.
- Skoumpourdi, C. (2015). Kindergartners measuring length. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, (pp. 89-1995). Prague, Czech Republic: Charles University.
- Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 49-70. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5>
- Stahnke, R., Schueler, S., & Roeskem-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education* 48, 1-17. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y>
- Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., & Gravemeijer, K. P. E. (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context* (Vol. 12). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. *Handbook of Qualitative Research*, 17, 273-85.
- Szilagyi, J., Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). Young children's understanding of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(3), 581-620. DOI: <https://dx.doi.org/10.5951/jresmetheduc.44.3.0581>
- Sztajn, P., Confrey, J. Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, 41(5), 147-156. DOI: <https://dx.doi.org/10.3102/0013189X12442801>
- Thomas, J., & Tabor, P. D. (2012). Developing quantitative mental imagery. *Teaching Children Mathematics*, 19(3), 174-183.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>
- van den Heuvel-Panhuizen, M., & Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM Mathematics Education*, 43, 621-635. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s11858-011-0331-8>

- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of psychology of education, 10* (1), 77-101. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/BF03172796>
- Wilson, P. H., Mojica, G., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32* (2), 103-121. doi: 10.1016/j.jmathb.2012.12.003
- Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17* (2), 149-175. doi: 10.1007/s10857-013-9256-1
- Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' use of a learning trajectory in student - centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66* (3), 227-244. DOI: <https://dx.doi.org/10.1177/0022487115574104>

## Autores

---

**Gloria Sánchez - Matamoros García.** Universidad de Sevilla, España, [gsanchezmatamoros@us.es](mailto:gsanchezmatamoros@us.es)

**Mar Moreno Moreno.** Universidad de Alicante, España, [mmoreno@ua.es](mailto:mmoreno@ua.es)

**Patricia Pérez Tyteca.** Universidad de Alicante, España, [patricia.perez@ua.es](mailto:patricia.perez@ua.es)

**M. Luz Callejo de la Vega,** Universidad de Alicante, España, [luz.callejo@ua.es](mailto:luz.callejo@ua.es)