El rol de la experimentación en la modelación matemática

The Role of Experimentation in Mathematical Modeling

Ruth Rodríguez Gallegos[1]
Samantha Quiroz Rivera[2]

Resumen: La presente investigación tiene como objetivo describir el rol de la experimentación en el diseño de una clase de matemáticas para ingenieros basada en modelación matemática. La clase en particular es un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) que se imparte en segundo año en una institución privada del noreste de México. El estudio, de tipo cualitativo, detalla la manera en que la experimentación aporta elementos significativos para la mejor comprensión de la modelación de fenómenos eléctricos a través de las Ecuaciones Diferenciales, muy específicamente, alrededor del estudio de los circuitos eléctricos Resistencia-Capacitor (RC) y su respectivo estudio desde el punto de vista matemático y físico por medio del uso de tecnología específica. Los resultados encontrados revelan que la implementación de experimentaciones en una clase de matemáticas permite favorecer la construcción, interpretación y validación de los modelos matemáticos por los propios alumnos, los cuales son propuestos en clase de manera grupal en contraste con la enseñanza denominada tradicional, la cual se limita a la presentación de métodos para resolver ED sin ninguna conexión con la realidad.

Fecha de recepción: 2 de octubre de 2015. **Fecha de aceptación:** 2 de agosto de 2016.
[1] Tecnológico de Monterrey. Escuela de Humanidades y Ciencias Sociales. ruthrdz@itesm.mx
[2] Secretaría de Educación Pública. samanthaq.rivera@gmail.com.

Palabras clave: *Modelación matemática, experimentación, Ecuaciones Diferenciales, Ingeniería.*

Abstract: This research aims at describing the role of experimentation in the design of a mathematics course for engineers, which was based on mathematical modeling. The course is Differential Equations (ED), taught in second year in a private institution in Northeast Mexico. The study, in a qualitative approach, shows how experimentation provides significant elements for better understanding the modeling of electrical phenomena by Differential Equations, specifically, the study of electrical circuit Resistor-Capacitor (RC) and their respective study from mathematical and physical point of view through the use of specific technology. The results reveal that the implementation of experimentation in a math class allows the construction, interpretation, and validation of mathematical models by the students themselves, which are proposed in the course in a collaborative way as opposed to traditional teaching of this subject, which it is limited to the presentation of methods to solve ED without any connection to reality.

Keywords: *Mathematical models, experimentation, Engineering Education, Differential Equations.*

INTRODUCCIÓN

La razón principal para la enseñanza de las matemáticas es la de formar alumnos capaces de aplicar las matemáticas y transferir estos conocimientos en una variedad de contextos y situaciones fuera de la escuela (Alsina, 2007). Cuando se trata de educación superior, los fines de la enseñanza de las matemáticas están ligados a los retos del mundo laboral futuro de los estudiantes (Camarena, 2008).

Una de las asignaturas de mayor importancia en la formación de ingenieros, por su amplia relación con fenómenos físicos y sociales, son las Ecuaciones Diferenciales. A pesar de ello, la enseñanza de esta materia ha estado subordinada a la memorización de procedimientos analíticos lo que ha llevado a la incomprensión de sus aplicaciones en los diversos contextos profesionales (Artigue, 1995; Blanchard, 1994).

Con el propósito de superar este tipo de prácticas, se inicia aproximadamente hace 40 años en la comunidad científica el estudio de la modelación matemática, la cual representa el proceso de construcción y uso de modelos matemáticos para la resolución de problemas aplicados en contextos cotidianos como profesionales.

Si bien han sido reportados ampliamente las competencias que este tipo de enseñanza de las Matemáticas basadas en la modelación desarrolla en los alumnos que aprenden Ecuaciones Diferenciales (Rodríguez y Quiroz, 2015), el interés por comprender más en detalle la adquisición de dichas competencias sigue latente.

Los recursos de los cuales se puede valer la modelación matemática han aumentado debido a la incorporación de numerosa tecnología en el aula de matemáticas, entre ellos, software que simula diversos tipos de fenómenos (https://phet.colorado.edu/es/) o la propia experimentación de ellos de manera real (Rodríguez, 2015). El cuestionarse la importancia de la experiencia en una clase abstracta como las Matemáticas no es un tema del todo nuevo (Briand, 2011) y sin embargo, poco estudiado al día de hoy. Lo anterior conlleva a una serie de cuestionamientos sobre el impacto de dichos recursos en el aprendizaje de las matemáticas. En base a lo anterior, la presente investigación busca conocer el rol de la experimentación en dos etapas del ciclo de modelación: la construcción y uso de los modelos matemáticos. A través del diseño e implementación de una clase de Ecuaciones Diferenciales, se detallan los elementos que se ven influenciados por el armado de circuitos eléctricos (Resistencia-Capacitor, RC) para el aprendizaje del método analítico para resolver una ED Lineal de Primer Orden.

Primeramente son presentados los aspectos teóricos que sustentan el estudio. En segundo lugar se retoma la metodología seleccionada para dar paso a los resultados y las conclusiones a las que se llegaron.

MARCO CONCEPTUAL: LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA EXPERIMENTACIÓN

Basados en los resultados de diversas investigaciones previas (Blum y Niss, 1990; Pollak, 1969; Trigueros, 2006), en el presente trabajo se entiende a la modelación matemática como el proceso cíclico consistente en la creación o uso de modelos matemáticos para la resolución de una problemática basada en fenómenos de naturaleza física o social relacionados con la realidad propia del quehacer profesional de los alumnos, en este caso futuros ingenieros. A pesar de que ha sido vista desde diferentes perspectivas, en este trabajo se retoma a la modelación como una estrategia didáctica de acuerdo con Kaiser y Sriraman (2006). En este sentido reconocemos que su rol apoya el aprender las matemáticas dentro del salón de clases en relación a problemas reales varios (Biembengut y Hein, 2004). El proceso de modelación matemática es detallado por Rodríguez (2007, 2010), quien esquematiza ocho etapas ubicadas en cuatro dominios presentados en la figura 1. Se ilustran en el esquema, además del reconocimiento de un dominio real y uno matemático, la presencia de dos dominios más: el dominio pseudo-concreto y el dominio físico.

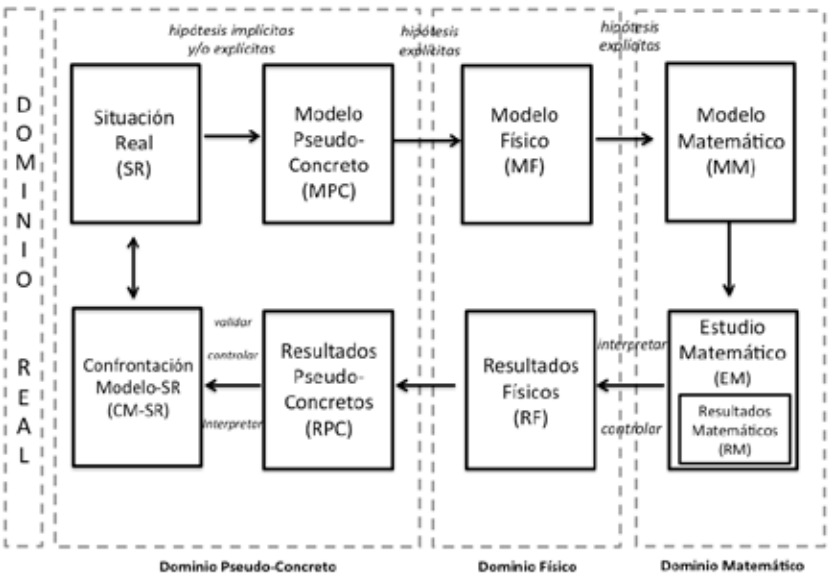

Figura 1. Esquema de modelación matemática (Rodríguez, 2007, 2010)

El dominio físico, conformado a su vez por dos etapas: Modelo Físico y Resultados Físicos, tiene su génesis en el reconocimiento de la importancia de la comprensión de los fenómenos físicos abordados en la problemática inicial. Así, la comprensión del problema planteado lleva a los alumnos a armar un Modelo Físico que eventualmente apoya la construcción del Modelo Matemático.

Se ha reportado (Henry, 2001) que la creación de un Modelo Matemático (como una ED) así como la generación de sus resultados (búsqueda de solución) es una de las etapas más difíciles de lograr por los alumnos. Entre las principales problemáticas reportadas para dicho logro se encuentran la falta de comprensión de la problemática inicial o la carencia de conocimiento sobre los fenómenos físicos que se buscan modelar (Blum y Borromeo, 2009). La comprensión de los fenómenos físicos podría verse beneficiada por la introducción de experimentos en el aula. Su practica es posible gracias al gran auge tecnológico que llevó a las matemáticas a convertirse en una disciplina empírica como lo señala Borwein (2003). En ciencias, han sido ampliamente reportados los beneficios del uso de experimentos en clase, donde los alumnos tienen oportunidad de: a) obtener experiencias para desarrollar el pensamiento científico; b) verificar sus explicaciones y extraer conclusiones de sus preguntas; c) generar sentido crítico; d) despertar la curiosidad y observación; y e) propiciar el cuestionamiento de su entorno natural y social (García y Calixto, 1999).

Por su parte Navarro (2012) agrega a estas razones, el que la experimentación en el aula de ciencias: a) apoya la construcción del conocimiento por medio de visualizaciones; b) apoya la motivación; c) provoca una mejor comprensión y asimilación de conceptos; y d) favorece el trabajo grupal y colaborativo.

A pesar de ello, los experimentos en el aula de matemáticas no han sido el común denominador en el diseño de lecciones de los profesores. Algunas de las investigaciones relacionadas han mostrado las competencias globales de modelación matemática que los alumnos desarrollan, con o sin el apoyo en tecnología (Houston, 2007; Maaß, 2006; Rodríguez, 2015; Rodríguez y Quiroz, 2015; Singer, 2007). Sin embargo, son pocos los resultados que muestren la manera en que este tipo de actividades pudieran apoyar a la modelación matemática, específicamente en la etapa crucial del armado o uso de modelos matemáticos. En aras de comprender esta relación, se presenta en la siguiente sección el marco contextual de la investigación así como su metodología.

El objetivo general de la investigación consiste en determinar el rol de la experimentación en el armado y construcción del Modelo Matemático en un curso de ED basado en la modelación matemática. Además nos interesa definir el rol de la experimentación en la secuencia didáctica diseñada así como los retos que implicó su ejecución en el aula.

MARCO CONTEXTUAL: EL CONTEXTO DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Desde el 2008, la enseñanza de las ED en la universidad en la que se realiza la investigación, ha sufrido una reestructuración desde su currículo. El curso basa su enseñanza en la modelación matemática de diferentes fenómenos tanto físicos como sociales. Entre ellos, fenómenos eléctricos, mecánicos, térmicos, así como fenómenos sociales como el crecimiento de población, esparcimientos de virus o crecimiento de capital. En la mayoría de las lecciones implementadas, se ha incorporado múltiple tecnología de acuerdo con las características de cada contenido matemático. El uso de diverso material tecnológico ha posibilitado que los alumnos experimenten fenómenos eléctricos en el aula así como el uso de simuladores.

El diseño de las lecciones ha sido conformado tanto por expertos en matemáticas así como con el apoyo de expertos en las áreas de ingeniería de cada uno de los contextos a modelar. Esto ha permitido el robustecimiento del curso así como una continua y enriquecedora comunicación entre disciplinas.

En el presente artículo se presenta con detalle la clase que corresponde a introducir el método analítico para resolver una ED Lineal de Primer Orden de la forma $y' + P(x) * y = Q(x)$. Se decide, debido a la enseñanza por medio de la modelación, que la clase inicie justamente en la necesidad de comprender la modelación de un fenómeno eléctrico en el cual se busca conocer el cambio respecto al tiempo de la carga de un capacitor (C) de un Circuito Eléctrico Resistencia-Capacitor.

La sesión ha sido implementada desde hace 4 años aproximadamente y ha tenido mejoras continuas a través de las experiencias con alumnos y maestros. La presente investigación busca el análisis de la última versión de dicha sesión. En la secuencia de clase se diseñaron siete secciones (actividades) que estuvieron en relación con el proceso de modelación matemática descrito anteriormente en la figura 1. Se describen a detalle en la sección de metodología cuando se presenta la secuencia didáctica tal y como fue implementada.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Las investigaciones cualitativas tienen el propósito de comprender la situación problemática abordada desde el punto de vista de quienes la experimentan (Hernández, Baptista, y Fernández, 2010). Con la intención de analizar la complejidad de algunos casos particulares dentro del contexto que se presenta, se utiliza un enfoque de Estudio de Casos (Stake, 2005). En específico, el estudio de casos se denomina embebido, puesto que de acuerdo a Yin (2003), éste tiene la particularidad de elegir más de un caso pero siguiendo subunidades lógicas que serán analizadas en detalle.

Nos interesa determinar la manera en que la experimentación apoya la creación y uso de modelos matemáticos lo cual permitirá, eventualmente, reflexionar sobre los retos que conlleva su implementación en una clase de ED. En concordancia con el marco teórico presentado en la sección anterior, se eligieron las unidades de análisis (los diálogos entre los mismos alumnos y documentos generados por ellos) que dieran pie a la producción y estudio de los datos, aunque siempre con un carácter flexible como lo señala Stake (2005). Las unidades de análisis estuvieron en concordancia con los siguientes propósitos, de caracterizar:

a) El rol de la experimentación en la actividad de los alumnos donde fue implementada la secuencia didáctica diseñada.
b) Los retos que implicó la ejecución de la experimentación en el aula.

La población de la investigación fue conformada por 46 estudiantes de diversas ramas de la ingeniería que cursaban la materia de ED en el semestre agosto-diciembre 2015 (2 grupos). La elección de la muestra estuvo basada en criterios propios de un estudio de casos, donde fue necesaria una reflexión sobre el número de réplicas para recolectar la información a ser analizada (Yin, 2003). Con el propósito de ser exhaustivos en el análisis de las transcripciones, se seleccionaron seis casos (agosto-diciembre 2015), correspondientes a dos equipos de trabajo. Su elección fue de manera aleatoria entre los 14 equipos de trabajo.

La secuencia de la actividad experimental ocurre en una sesión de clase de 1.5 horas de duración. La secuencia de actividades estuvo determinada siguiendo las etapas del ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010). A continuación se presenta a detalle la secuencia de actividades en esa sesión y en la figura 2 se representan las actividades ubicadas en el esquema de modelación matemática.

Actividad 1. La actividad uno presenta la situación problema (Situación Real dentro del ciclo de modelación). La situación gira en torno a cuestionarse en conocer cómo está cambiando la magnitud "carga de un capacitor" en un circuito RC respecto al tiempo. Durante los primeros minutos de la clase, se presenta una breve introducción al tema de circuitos mediante una charla con expertos en la divulgación de la ciencia y/o de ingenieros expertos en el área. Esto supone la mayor parte del tiempo, la presencia de colaboradores externos en la clase

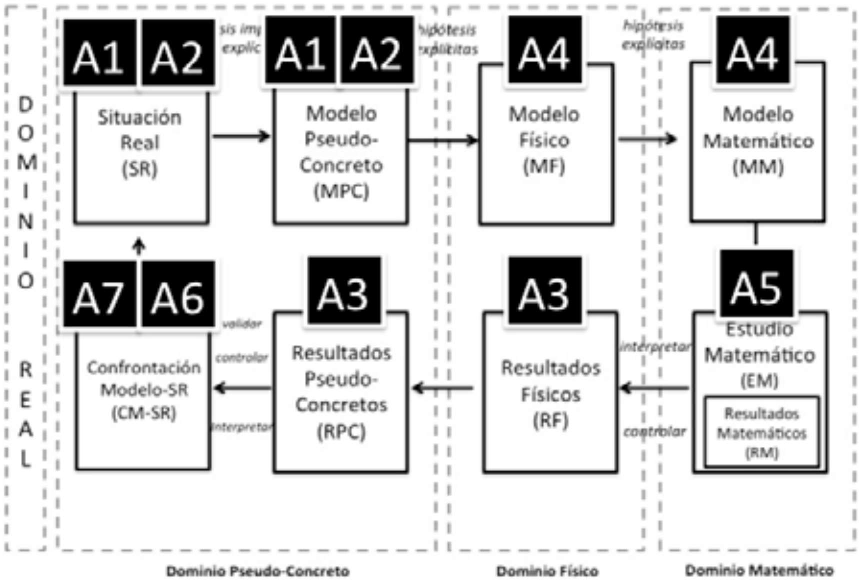

Figura 2. Actividades de la experimentación dentro del Ciclo de Modelación.

para la adecuada presentación del tema. Durante la charla, los alumnos discuten ideas que los llevan a iniciar la propuesta de un Modelo Pseudo-Concreto.

Actividad 2. Es durante esta actividad donde se empieza a incorporar el uso de tecnología en el aula. De nuevo, esta actividad busca que los alumnos vivan la Situación Real e inicien con la creación de un Modelo Pseudo-Concreto. Se invita a los alumnos a construir un circuito RC con material que el profesor lleva a la clase. El experimento que los alumnos realizaron fue diseñado por la profesora responsable del grupo en colaboración con expertos en física e ingeniería eléctrica y robótica. Los materiales que incluía el experimento fueron: a) 1 sensor de voltaje; b) 1 computadora; c) 1 Lab quest mini (dispositivo entre el sensor y la computadora); d) 1 cable adaptador; e) un juego de 4 baterías (1.5 volts = 6 volts; f) 1 resistencia; g) 1 capacitor; h) tres cables conectores. El material mencionado se distribuyó en cada equipo de trabajo, conformado por tres estudiantes. A cada uno se le proporcionó un protocolo de práctica de laboratorio previamente realizada por el docente donde se les indicaba las instrucciones para realizar las diversas conexiones (ver figura 3).

Figura 3. Fragmento de práctica que se les proporcionó a los equipos de trabajo.

Actividad 3. En esta actividad los alumnos pueden obtener mediante la tecnología los Resultados Físicos y Resultados Pseudo-Concretos de la situación que se presentó en un inicio. Se pidió el armado del circuito y la generación de gráficas que se forman por la carga y descarga del capacitor con apoyo del sensor de voltaje. Se propició una discusión grupal con el fin de iniciar una interpretación de las gráficas proporcionadas por el sensor. Algunos ejemplos son mostrados en la parte inferior (ver figura 4):

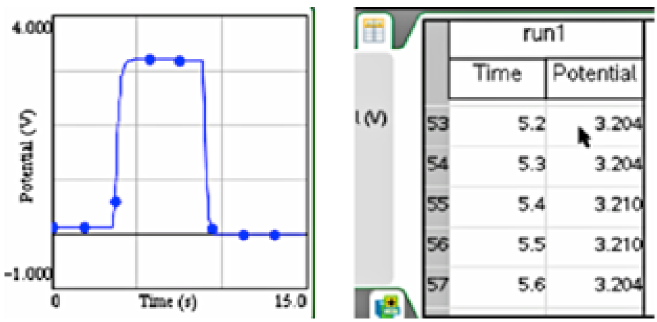

Figura 4. Diversas representaciones mostradas por sensor de voltaje.

Actividad 4. Los resultados arrojados por el sensor apoyan la construcción del Modelo Físico y Modelo Matemático. Se propicia la discusión grupal de sus conocimientos previos que buscará iniciar la construcción de un modelo de ED para representar el cambio de la carga del circuito eléctrico RC. La ED es: $Rq'(t)+\frac{1}{c}q(t)=E(t);q(t=0)=0c$.

Actividad 5. En el ciclo de modelación, la etapa de Estudio Matemático está representada en esta actividad. Se introduce la deducción del método analítico de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) lineal de primer orden. En algunas ocasiones, éste ya ha sido presentado previamente y sólo se procede a la resolución matemática de la ED propuesta con anterioridad.

Actividad 6. Por último se permite al alumno que confronte sus resultados del Modelo Matemático con los resultados que la tecnología propició, es decir, el Modelo Situación Real. Con los resultados obtenidos (solución general y particular) del modelo teórico, se solicita evaluar el Modelo Matemático que había sido propuesto con la información obtenida del armado del circuito. Se compara este análisis con las gráficas obtenidas por el sensor y la respuesta analítica de la carga. La forma de la solución general es: $q(t)=\frac{E}{C}-\frac{E}{C}e^{-t/RC}$.

Actividad 7. Se reflexiona de manera general sobre el proceso de experimentación y modelación; además se discute sobre las diferencias entre lo expresado analíticamente y la experimentación realizada.

La recolección de información de los casos fue suficiente para alcanzar un nivel de comparabilidad y estudio exhaustivo del fenómeno que permitiera la validación de las conclusiones (Stake, 2005). En ella se usaron dos fuentes de información: los diálogos entre los mismos alumnos y los documentos generados, es decir, los registros escritos que fueron realizados por los estudiantes durante la sesión. La recolección de la información utilizó tres técnicas importantes:

- Instrumento A. La observación participativa en 3 sesiones previas, durante y posterior a la implementación en cuestión. La observación fue videograbada y transcrita para su análisis a detalle en los dos grupos donde se llevó a cabo la experimentación.

- Instrumento B. El análisis de documentos producidos en estas 3 clases (protocolo de práctica y ejercicio) y/o tareas posteriores.
- Instrumento C. Una encuesta previa para conocer el conocimiento y la familiaridad de los 46 alumnos sobre el contexto eléctrico.
- Instrumento D. Una encuesta final del curso (46 estudiantes) donde se les preguntó en especial sobre el impacto del uso de experimentación en su aprendizaje de las ED.
- Instrumento E. La transcripción de la entrevista de 6 de los 46 alumnos durante el semestre agosto-diciembre 2015. Las entrevistas fueron video-grabadas y transcritas para su análisis a detalle.

El análisis de la información buscó examinar, categorizar, tabular, evaluar y recombinar evidencia, siempre guiados por las proposiciones iniciales del estudio (Yin, 2003). La triangulación óptima para el estudio de casos es la que confrontó las observaciones directas con la revisión de registros y la metodología planteada (Stake, 2005).

La validez de constructo fue seleccionada como la óptima para las investigaciones de esta naturaleza. Esta validez refiere a que los conceptos definidos en el marco teórico se reflejaron en los instrumentos utilizados (Concha, Barriga y Henríquez, 2011). De esta manera, fue por medio de la concepción de modelación matemática y sus diferentes etapas y transiciones, como se pudieron confeccionar los instrumentos para la recolección y posterior análisis de los datos obtenidos. Para completar dichos instrumentos se utilizaron video grabaciones en las sesiones de recolección de datos. (Yin, 2003).

PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados muestran que la puesta en marcha de la experimentación tuvo dos roles importantes. En primer lugar, la manipulación de los diversos materiales que conformaban un circuito eléctrico vivenció un acercamiento hacia un fenómeno que pocos alumnos de la clase han tenido oportunidad de apreciar. Dentro del ciclo de modelación, el planteamiento de la Situación Real es de gran importancia puesto que representa el detonante de todo un proceso de creación de modelos matemáticos. Precisamente la tecnología permitió que los alumnos no sólo tuvieran un acercamiento al problema mediante su lectura, sino además, a través de la experimentación del mismo, mediante los materiales involucrados. Ello fue un factor de motivación durante la sesión.

De acuerdo con una encuesta previa (Instrumento c) realizada a los estudiantes antes de la sesión, menos del 45% de ellos tenían alguna experiencia con el armado de circuitos eléctricos en otras asignaturas y materias. Los alumnos expresaron asombro y motivación cuando se entregaron los elementos del armado. El apoyo en la motivación y la promoción de la curiosidad y la observación son dos roles atribuidos a la experimentación que están en concordancia con los resultados de García y Calixto (1999) y Navarro (2012).

Cinco de las preguntas de la encuesta final (Instrumento D) estuvieron encaminadas a la indagación de la percepción de los alumnos respecto a la utilización de diferentes recursos tecnológicos en el aula. Resalta la pregunta número 3 de la encuesta, donde los alumnos muestran la valoración que le asignan al uso de sensores en el aprendizaje de las ED. Las respuestas de 46 alumnos encuestados en una escala tipo Likert, muestra que 91.1% consideran que la experimentación en clase favoreció el aprendizaje de las ED en diversas formas.

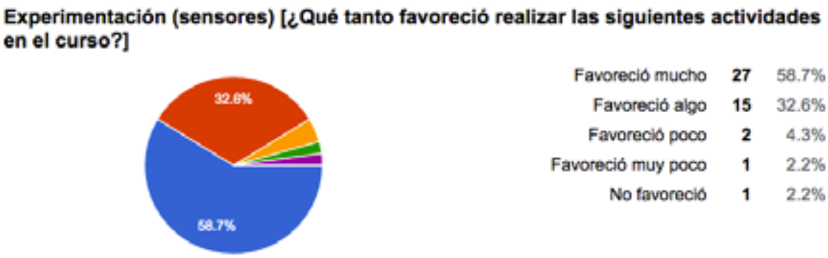

Figura 5. Respuestas de 46 alumnos a la encuesta final del curso.

Algunos de los comentarios registrados al momento de las entrevistas (instrumento e) con los alumnos se registran a continuación.

> A3: Sí, es muy diferente simplemente ver los problemas en papel que realmente observar el fenómeno y comparar el desarrollo teórico con la práctica, porque así se materializa lo que vimos en clase y te das cuenta de su utilidad.
> A6: Definitivamente sí fue de ayuda el uso de experimentos debido a que me los puedo imaginar sin ningún problema y en consecuencia la visualización y el planteo de la ecuación no se vuelven tan complicados.
> A8: Sí. Ver personalmente que tus predicciones son certeras y que en verdad estás entendiendo cómo funciona el mundo es una experiencia que no siempre se tiene.

A10: La actividad de circuitos fue muy padre, ya que tiene un uso más práctico que solo medir temperatura.
A22: Definitivamente sí, me es más fácil aprender basándome en ejemplos que acontecen en la vida cotidiana debido a que me los puedo imaginar sin ningún problema y en consecuencia la visualización y el planteo de la ecuación no se vuelven tan complicados.

Los resultados de los instrumentos analizados muestran, que la experimentación aunada con la charla inicial con los expertos, permitió a los alumnos iniciar su planteamiento del Modelo Pseudo-Concreto y del Modelo Físico. Las palabras mismas que utilizaban para explicarse la situación que estaban vivenciando fueron indispensables al momento de hacer una acercamiento a la modelación matemática. Ello conlleva al segundo de los roles que tuvo la tecnología en el proceso de modelación.

El segundo rol que tuvo la experimentación en el aula fue permitir una mejor comprensión y asimilación de los conceptos matemáticos en juego (ED, su solución, estabilidad de la misma, etc.) por los alumnos. Esto está determinado por la actividad número cuatro, que estuvo encaminada a la formación de un Modelo Matemático a través de un Modelo Físico. En la discusiones generadas por los estudiantes, el Modelo Matemático estuvo fuertemente ligado con la propia experiencia a través del manejo de los circuitos eléctricos y los simuladores. Uno de los principales debates giró en torno a la interpretación de las gráficas del sensor versus el comportamiento de la carga del capacitor en tiempo (Situación Real).

En el inicio de la clase, los alumnos de ambos equipos analizados dibujaron, de acuerdo con sus ideas previas, dos gráficas diferentes como se muestra en la figura 6. El docente buscó siempre el debate de ideas sin validar alguna de ellas.

(1) Docente: ¿Puede alguien decirme qué representan esas dos gráficas?
(2) A1: Representa que se carga rápido y se va alentando.
(3) Docente: ¿Eso representa?
(4) A2: No, que se va cargando lento y después rápido.

Dentro de estas interacciones se aprecia como el Estudio Matemático, parte importante del proceso de modelación, no se limita a la respuesta analítica de las ED, sino que permite el análisis cualitativo de representaciones gráficas. Ello conlleva a una posterior generación de ideas para su discusión y validación de las respuestas analíticas.

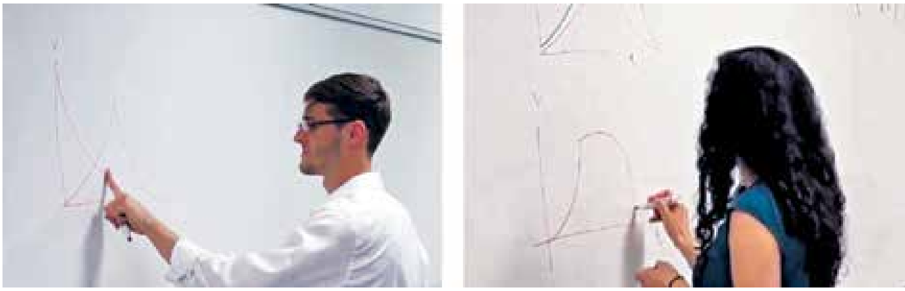

Figura 6. Gráficas iniciales mostradas por los alumnos de ambos equipos.

La construcción del circuito eléctrico RC en cuestión, permite el diálogo continuo y que los alumnos confrontaran sus ideas iniciales de lo que ocurriría con lo que sucede en la realidad. En las conversaciones registradas, se evidencia que al final de la sesión los estudiantes muestran un manejo correcto de los términos propios del contexto eléctrico (carga, descarga, capacitor, resistencia, etc.) y una mejor comprensión de lo que ocurre en el fenómeno estudiado en relación al tema matemático mostrado en la clase (ver figura 7). Es importante señalar que los 2 ejemplos de gráficas mostradas en la figura 6 no es la gráfica que realmente refleje lo ocurrido en el circuito (ver respuesta en figura 4). Sin embargo, el hacer vivir una actividad de experimentación en una clase de matemáticas (que no es lo usual) ayuda a que los alumnos entiendan el significado de una solución particular de la ED y que vislumbren el apoyo importante de los métodos analíticos para encontrar estas expresiones matemáticas. El sensor deja ver la gráfica y una tabla numérica de comportamientos pero nunca la expresión matemática de la solución analítica.

Figura 7. Alumnos de ED en el armado de un circuito eléctrico RC.

De esta manera, las explicaciones que los estudiantes proporcionaron, eran verificadas por ellos mismos después de observar el circuito eléctrico. Esto dentro del ciclo de modelación es posible apreciarlo en la parte de Confrontación del Modelo de la Situación Real. De esta manera, no era el mismo docente quien validaba las respuestas de los equipos, sino que la misma tecnología orientaba una discusión cuando no había congruencia por los resultados del modelo analítico. Por ello, se identificó el desarrollo de un sentido crítico, muy relacionado con lo afirmado con Navarro (2012), puesto que incluso las explicaciones ofrecidas por los expertos en el tema hicieron dudar a los alumnos quienes buscaban continuamente la constatación que estos supuestos fueran ciertos:

Docente: (Después de mostrar las gráficas de varios equipos) Entonces la carga debe comportarse de manera exponencial.
A6: A nosotros no nos queda así, así no carga nuestro capacitor.
Docente: Tal vez los cables tienen un problema
A4: Pero si funcionó hace un momento ¿no puede ser que haya diferencias entre la manera de cargarse cada uno de los circuitos?

La evidencia recolectada y triangulada, correspondiente al segundo objetivo específico, mostró que el armado del Modelo Matemático estuvo vinculado a la realización del experimento. Los alumnos comprendieron lo que ocurría cuando el circuito eléctrico era cerrado por ellos mismos, ello fue evidenciado con las explicaciones de los mismos estudiantes respecto a las gráficas que se generaron:

A2: ¿Qué representa la asíntota en la gráfica?
A1: La asíntota es el voltaje total de las baterías.
A3: Pero como una batería no estaba muy nueva no se alcanzó el voltaje máximo teórico.

Esta comprensión los llevó a proponer un Modelo Matemático para explicar el fenómeno en ambos equipos. Los alumnos eligieron correctamente los elementos que componen la ecuación diferencial gracias a los materiales previamente manipulados en la experiencia. Cuando los estudiantes mostraron los modelos creados por los equipos se permitió que el grupo no solamente debatiera el modelo correcto sino también la forma de su solución de manera analítica:

Docente: ¿Cuál es la función de la solución que acabamos de ver?
A4: Exponencial.
Docente: ¿Más ideas?
A5: Raíces.
A6: Es que nos dijeron que tarda tiempo infinito en cargarse, debe ser exponencial.
Docente: Muy bien. Lo que vimos en el sensor es que la solución es exponencial, ¿cómo se resuelve analíticamente?
A1: Con lineal (refiriéndose al método para resolver una ED lineal).

Una parte importante de la clase fue la promoción de una reflexión entre la solución analítica y la gráfica que había sido generada por los sensores. Las explicaciones de los alumnos mostraron la comprensión del fenómeno tanto física como matemáticamente (ver figura 8).

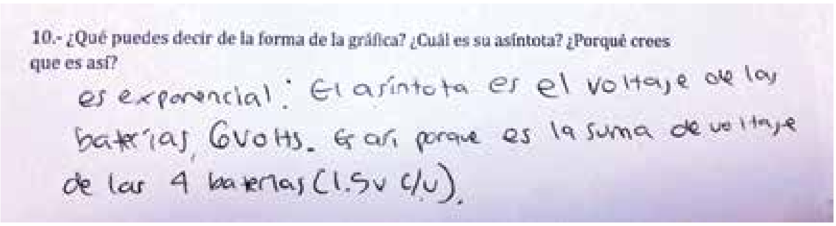

Figura 8. Explicaciones de los alumnos respecto a la solución analítica.

Es necesario reconocer que los resultados muestran que el trabajo en equipos fue determinante en el proceso de construcción y de discusión de ideas entre los alumnos, ello acorde con lo expuesto por Hitt (2003). Por ejemplo, un caso particular donde un estudiante tuvo como primera idea el que la solución era de tipo raíces, pudo comprobar que estaba en un error cuando sus mismos compañeros debatieron con él la idea de que la gráfica se acercaba más a una exponencial. El uso de la tecnología brindada por el sensor brindó elementos importantes que dieron fundamentos a los argumentos de los alumnos. El rescate de sus conocimientos previos, el armado del propio circuito, y las estrategias para su resolución, representaron aspectos ricos en ideas que llevaron a una evolución conjunta de los saberes de los alumnos.

Respecto al segundo objetivo específico, los retos que implicó el poner en marcha la experimentación en el aula fueron múltiples. En primer lugar demandó para el docente el trabajo previo diseñando la actividad más adecuada al contenido matemático elegido. Una vez seleccionada, se inició la búsqueda de un problema preciso y que fuera factible su manipulación en el aula de clases. En un segundo momento, uno de los retos del docente estribó en el constante cuestionamiento de las ideas iniciales de los alumnos para lograr una construcción de su conocimiento. Las interacciones del docente con los alumnos fueron cruciales para el desarrollo del armado físico del circuito eléctrico y en la conformación de los modelos que lo describían, así como lo señalan Quiroz (2015) y Quiroz, Hitt & Rodríguez (2015).

Por último, contrario a lo esperado por los profesores; el uso de la tecnología por los alumnos no representa un reto difícil de superar. La práctica brindada por la docente con las instrucciones del armado permite el reconocimiento y la utilización de los distintos materiales por los alumnos. Sin embargo, una vez generadas las gráficas por el sensor, el principal reto originado por el experimento fue la búsqueda de explicaciones tanto en el ámbito físico como matemático de los resultados encontrados.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

La experimentación en el aula de clases ha mostrado de antemano importantes aportaciones para la comprensión de las ciencias. Sin embargo, en el aula de matemáticas no es común su aplicación. La presente investigación mostró cómo la experimentación no solamente tiene cabida en una clase de matemáticas sobre todo si está basada en modelación matemática, sino que además la experimentación en la clase por los estudiantes es determinante en el proceso de dotar de nuevo significado a los estudiantes sobre las nociones matemáticas en juego.

Sin embargo, los resultados presentados abren más interrogantes sobre la misma aplicación de la experimentación. Por ejemplo, la relación que pudiera existir entre una experimentación física en el aula o aquella que utiliza simuladores, puesto que no siempre es posible proporcionar a los alumnos el material adecuado. Por otro lado, los elementos utilizados para el diseño de la actividad, en concordancia con el ciclo de modelación, podría apoyar el diseño de otras clases donde se emplee la experimentación en diferentes cursos de matemáticas.

Los resultados de la presente investigación pretenden formar la base de más estudios preocupados por el rol y los retos de la experimentación en una clase de matemáticas basada en la modelación matemática. Consideramos que el uso de este tipo de actividades en el aula apoya no solamente la comprensión de los conceptos matemáticos sino también ayuda a promover la motivación de los estudiantes al percibir su relación con su vida cotidiana.

La búsqueda de estrategias que combinen, en el aprendizaje de las matemáticas, los contenidos y sus aplicaciones brindan oportunidades a los alumnos de reconocer la utilidad de esta asignatura en contextos propios de su vida cotidiana. Esta búsqueda es indispensable en la formación de ingenieros, quienes deben ser capaces de dar solución a las problemáticas profesionales a las que se enfrentarán en sus áreas laborales.

Finalmente, es necesario reconocer la labor determinante del docente en la elección, diseño o adaptación y puesta en escena de actividades experimentales en el aula. Por tanto, el trabajo con los docentes ha de ser un aspecto primordial si se busca la diseminación de este tipo de actividades en las aulas de clase. Investigaciones recientes han mostrado metodologías que combinan el trabajo investigador-docente y cuyos resultados pudieran tomarse en cuenta para el seguimiento del estudio de la experimentación en matemáticas.

REFERENCIAS

Alsina, C. (2007). Less Chalk, Less Words, Less Symbols... More Objects, More Context, More Actions. In Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. & Niss, M. (Eds.). In *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education*. Berlin: Springer. pp. 35-55.

Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 7-23.

Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16*(2), 105-125.

Blanchard, P. (1994). Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint. *The College Mathematics Journal*, *1*(25), 385-393.

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it Be Taught and Learnt? *Mathematical Modelling*, *1*(1), 45-58.

Blum, W., & Niss, M. (1990). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Briand, J. (2011). El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en la clase. *Educación Matemática*, 23(1), 5-36.

Borwein, J. (2003). *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21 Century.* Burnaby, Canada: Council of Canada.

Camarena, P. (2008). Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias. En *Actas del III Coloquio sobre Enseñanza de las Matemáticas*. Lima, Perú, pp. 2-17.

Concha, V., Barriga, O., y Henríquez, G. (2011). Los conceptos de validez en la investigación social y pedagógico. *Revista Latinoamericana de Metodología de las Ciencias Sociales, 1* (2) 91-111.

García, M., y Calixto, R. (1999). Actividades experimentales para la enseñanza de las ciencias naturales en educación básica. *Perfiles Educativos*, *84* (1), 11.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Henry, M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités*. Besançon: Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités. 149-159.

Hernández, R., Baptista, P., y Fernández, C. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8* (1), 255-271.

Houston, K. (2007). Assessing the "Phases" of Mathematical Modelling. In Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. & Niss, M. (Eds.). *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education*. Berlin: Springer. pp. 249-256.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38* (3), 302-310.

Maaß, K. (2006). What are Modelling Competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 38* (2), 113-142.

Navarro, E. (2012). La experimentación científica en Secundaria. Argumentos para llevarla a cabo. *Revista digital de educación y formación del profesorado* (I), 1-8.

Pollak, H. (1969). How Can We Teach Applications of Mathematics? *Educational Studies*, *2* (2), 393-404.

Quiroz, S. (2015). Concepciones de modelación matemática de docentes en formación de educación primaria. (Disertación doctoral sin publicar). Tecnológico de Monterrey, México.

Quiroz, S., Hitt, F. et Rodríguez, R. (2015). Évolution des conceptions du processus de modélisation mathématique de futurs enseignants du primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 20.

Rodríguez, R. (2007). Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S. Sciences. (Disertación doctoral sin publicar) Joseph Fourier Grenoble I, Francia.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4-1), 191-210.

Rodríguez, R. (2015). A Differential Equations Course for Engineers Through Modelling and Technology. In Stillman, G. Blum, W. & Biembengut, A. (Eds.) *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences*, Blumenau: Springer. pp. 545-555.

Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2015). Developing Modeling Competencies through the Use of Technology. En Stillman, G. Blum, W. & Biembengut, A. (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences*, Blumenau: Springer. pp. 443-452.

Singer, M. (2007). Modelling Both Complexity and Abstraction: a Paradox? *Applications and Modelling in Mathematics Education*. New York, Estados Unidos de América. pp. 233-240.

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In Denzin,N. & Lincoln, Y. (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research.* 3a. ed., California: Sage Publications. pp. 443-466.

Trigueros, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *11*(031), 1207-1240.

Yin, R. (2003). *The Case Study Antology*. California: Sage Publications.

Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función

Evaluation of the Knowledge of Future Teachers of Mathematics about the Transformation of the Representations of a Function

Tulio R. Amaya De Armas[1]
Luis R. Pino-Fan[2]
Antonio Medina Rivilla[3]

Resumen: En este trabajo se evalúa la dimensión matemática del Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función. Se aplicó un cuestionario a 90 profesores en formación repartidos en tres grupos; fue analizada la homogeneidad de las respuestas por grupos, y se caracterizaron los objetos matemáticos primarios y procesos presentes en las prácticas matemáticas que desarrollan los profesores en formación al resolver el cuestionario. Los resultados evidencian serias dificultades de los mismos para identificar y usar los interceptos de una función sin ayuda gráfica; analizar sus valores extremos y sus intervalos de crecimiento; modelarla matemáticamente e identificar la pendiente de una función lineal. Los objetos matemáticos primarios y procesos presentes en las prácticas que desarrollan los estudiantes al hacer transformaciones de las representaciones de las funciones involucradas en la situación son muy similares, a pesar de la diferencia en horas desarrolladas en el programa en cada uno de los tres niveles.

Fecha de recepción: 15 de diciembre de 2015. **Fecha de aceptación:** 28 de agosto de 2016.

[1] Facultad de Educación de la Corporación Universitaria del Caribe (Cecar), Colombia. tuama1@hotmail.com
[2] Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Chile. luis.pino@ulagos.cl
[3] Universidad Nacional de Educación a Distancia, España. amedina@edu.uned.es

Palabras clave: *profesores en formación, función, representaciones semióticas, prácticas matemáticas.*

Abstract: In this paper the mathematical dimension of the Didactical-Mathematical Knowledge of the future teachers of mathematics is analyzed when they transform the representations of a function. A questionnaire was applied to 90 future teachers who were distributed in three groups. The homogeneity of the answers per group is analyzed, and the primary mathematical objects and the present process in the mathematics practices they develop trough their answers are characterized. The results show serious difficulties of the future teachers with some function topics, such as: indetifying and using their intercepts without a graphical support; analyzing their extreme values and growth ranges; making a mathematical model or a graphical draft; indetifying the slope of a linear function. The primary mathematical objects and present processes in the practices that the prospective teachers develop are very similar, in spite of the difference in the number of hours od instruction in each of three gropus.

Keywords: *future teachers, function, semiotic representations, mathematical practices.*

INTRODUCCIÓN

La enculturación matemática de niños y jóvenes de las comunidades depende en gran medida de las habilidades y competencias para enseñar que posean las personas que los orientan. En relación con el concepto de función, parece haber un distanciamiento bien marcado entre su comprensión a nivel escolar y su necesidad de uso consciente a nivel social. Es decir, en las prácticas sociales –no académicas– es casi inevitable la utilización de este concepto en contextos cotidianos –aunque sea inconscientemente–, mientras que en contextos académicos los estudiantes parecen no reconocerlo y les cuesta utilizarlo de manera consciente, quizá por no poderlo relacionar con algo conocido. Para el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2005), el estudio de las funciones es de suma importancia en el desarrollo de una comunidad, ya que conectan modelos y/o patrones con otros para producir estructuras matemáticas perdurables en el tiempo. Se trata de un concepto que brinda una gran oportunidad para explorar sus representaciones en un mismo ambiente, lo cual facilita su estudio a través del análisis de congruencias e incongruencias entre los elementos de sus representaciones. Así, los escenarios donde este concepto es usado con frecuencia podrían ser los más apropiados como enlace para realizar la conexión entre el concepto a nivel social y su uso y comprensión en contextos académicos.

Son abundantes los trabajos que indagan acerca de las dificultades presentadas por estudiantes y profesores al decodificar información para hacer transformaciones entre elementos de una función (Amaya y Medina, 2013; Hitt, 2003; Marroquín, 2009; Suárez y Cordero, 2010) y sobre los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores en la enseñanza de las funciones (Font, 2011; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Parra y Pino-Fan, 2016). Según Hitt (2003) el problema de los estudiantes y de algunos profesores de enseñanza media para entender el concepto de función es que generalmente se restringen a la manipulación de una representación algebraica del mismo, y esto produce limitaciones en su comprensión. En general, la actividad de conectar diferentes representaciones de un concepto matemático no es considerada fundamental por muchos profesores para su construcción. En particular, las actividades que involucran transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento (Duval, 2004) son minimizadas por los profesores al estudiar las funciones, desconociendo que promueven un mejor entendimiento de las funciones y facilitan el desarrollo de procesos de visualización.

De lo planteado por Hitt (2003) se puede inferir que en la enseñanza de las funciones se ha tendido a sobrevalorar los procedimientos analíticos algebraicos y la algoritmización, sin tener en cuenta que el estudio de funciones se potencia si se realiza en un ambiente natural de camaradería y cooperación mutua entre aprendices. Asimismo, el recurrir a diferentes registros es absolutamente indispensable para la comprensión en matemáticas (Duval, 2004) y además, según Duval (2012), esta comprensión requiere de la coordinación y el funcionamiento en sinergia de por lo menos dos registros, y que se pueda pasar espontáneamente de una representación a otra sin siquiera notarlo.

En este trabajo se tuvo como objetivo evaluar el conocimiento matemático de futuros profesores de matemáticas para hacer transformaciones de las representaciones de una función. Concretamente se evalúa el reconocimiento, la producción y transformación de diferentes representaciones de una función, al igual que su uso, con el propósito de resolver una situación problema. Con esta finalidad utilizamos el modelo del conocimiento del profesor denominado *Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático* (CDM) (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015), el cual nos proporciona herramientas teórico-metodológicas concretas para la caracterización de los conocimientos de los futuros profesores, relacionados con la dimensión matemática.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Sobre los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas

Durante las últimas décadas, las investigaciones en Educación Matemática han sido muy fecundas al tratar de indagar sobre los conocimientos matemáticos que debe dominar un profesor para enseñar las matemáticas eficientemente. Entre los trabajos más destacados están los de Shulman (1986, 1987, 2005), Ball, Thames y Phelps (2008), y Godino y sus colaboradores (Godino, 2009; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013; Pino-Fan *et al.*, 2015). Como resultado de estos trabajos, aún no se ha llegado a un consenso sobre un marco teórico que caracterice dichos conocimientos, pero sí se han formulado diversos modelos que han hecho aportes significativos para su caracterización (Pino-Fan y Godino, 2015), uno de ellos es el denominado modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM).

El CDM, inicialmente planteado como un sistema de categorías de análisis de los conocimientos del profesorado (Godino, 2009), se ha ido refinando en diversos trabajos (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015). El CDM asume del Enfoque Onto-semiótico su sistema de herramientas teóricas, el cual proporciona un sistema de categorías y sub-categorías de conocimientos que el profesor debe conocer, comprender, saber aplicar y valorar, y para las cuales se proponen herramientas teórico-metodológicas que facilitan la operativización de los análisis de los conocimientos incluidos en cada sub-categoría. El modelo del CDM propone tres dimensiones, cada una a su vez compuesta por sub-categorías (Pino-Fan y Godino, 2015): *Dimensión matemática, Dimensión didáctica, Dimensión meta didáctico-matemática.*

Es de interés en este trabajo la Dimensión matemática, conformada por las sub-categorías *conocimiento común del contenido* –relacionado con el conocimiento que un profesor moviliza para resolver los problemas que les coloca a sus estudiantes y para verificar que las soluciones dadas a ellos sean apropiadas; más específicamente, se relaciona con el conocimiento que el profesor comparte con estudiantes del nivel donde orienta–, y el *conocimiento ampliado del contenido* –que permite al profesor realizar las conexiones entre los conceptos que fundamentan lo que se trabaja en un nivel y proyectar lo trabajado hacia lo que se necesita posteriormente, además de permitirle seleccionar y utilizar diferentes representaciones de un objeto, decidir cuál registro utilizar como principal y cuál o cuáles como auxiliares.

La Dimensión matemática es integral, integrada e integradora debido a la naturaleza de sus componentes. Por un lado, el conocimiento común del contenido es absolutamente indispensable en un profesor de matemáticas, quien debe conocer el material que enseña y poderlo modificar para construir situaciones problema, sin que pierda su esencia matemática. El conocimiento ampliado del contenido, en el caso concreto de nuestro estudio, facilita –entre los conceptos– establecer los enlaces, vínculos y conexiones intra e inter registros y representaciones.

Las sub-categorías de la Dimensión didáctica son tanto integradoras como integradas, facilitan el conocimiento del material y de las personas objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje, pero para ser útiles necesitan de la Dimensión matemática, y difícilmente se dan en ambientes aislados de los procesos de enseñanza. El conocimiento de los estudiantes es integrado a los demás conocimientos del profesor y forma parte integral de los demás conocimientos de la Dimensión didáctica. Por lo anterior, la efectividad de los aprendizajes dependerá, principalmente, de la habilidad del profesor para integrar las componentes de cada dimensión.

La Dimensión meta didáctico-matemática hace al profesor consciente de que de su formación y actualización continua y permanente depende, en gran medida, el aprendizaje de sus estudiantes; permite al profesor reflexionar sobre su propia práctica (Pino-Fan, Godino y Font, 2016). Es muy importante si se sopesa el interés en formar personas de bien, versus resolutores de problemas matemáticos, si se quiere que la formación matemática contribuya a la formación de mejores seres humanos y ciudadanos. El establecimiento de este tipo de relaciones entre las dimensiones y su efecto formativo dice mucho sobre la potencialidad del CDM.

2.2 Acerca de las funciones

El objeto matemático *función* es el resultado de grandes esfuerzos de diferentes pensadores, y en su desarrollo histórico de más de 2,000 años ha sido objeto de diversas acepciones y generalizaciones (Parra y Pino-Fan, 2016). Según Sastre, Rey y Boubée (2008) tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número.

En la antigüedad los griegos trabajaron problemas que involucraban funciones, sin reconocerlas como tales, y haciendo sólo representaciones verbales o gráficas. Sin embargo, son aportaciones relevantes de la cultura helénica que, si bien no correspondían explícitamente al concepto de función, sí pueden considerarse los primeros antecedentes en su desarrollo. Para Kleiner (1989) el periodo más fecundo en la realización del concepto de función fue de 1450 a 1650, con grandes hechos como: 1) La extensión del concepto de número al de números reales y números complejos por Bombelli y Stifel; 2) La creación del álgebra simbólica por Vieta y Descartes; 3) Los estudios de problemas de movimiento por Kepler y Galileo; y 4) La unión entre el álgebra y la geometría por Fermat y Descartes. Según Leinhardt, Stein y Zaslavky (1990), el concepto de función tiene un estatus de facilitador en el aprendizaje de las matemáticas, pues permite la interacción de aprendices y objetos matemáticos, a través de actividades que involucran funciones con elementos del medio sociocultural.

El concepto de función es, sin lugar a dudas, un elemento fundamental en el desarrollo histórico de la humanidad, y ha adoptado a lo largo de su evolución histórica al menos seis significados parciales (Parra y Pino-Fan, 2016): 1) La función como correspondencia, 2) La función como relación entre magnitudes variables, 3) La función como representación gráfica, 4) La función como expresión analítica, 5) La función como correspondencia arbitraria, y 6) La función a partir de la teoría de conjuntos. El término "función" fue usado por primera vez en 1673, en una obra de Leibniz; en la literatura frecuentemente alude a:

- Una relación de correspondencia entre variables: relación en la que a cada valor en la variable de entrada le corresponde uno y sólo un valor de la variable de salida.
- La correspondencia entre elementos de dos conjuntos: una regla en la que cada elemento del conjunto de partida debe estar relacionado con un único elemento del conjunto de llegada.
- La dependencia entre dos variables: por cada valor que se le asigne a la variable independiente, existe un único valor de la variable dependiente.
- El conjunto de pares ordenados: es un conjunto de pares ordenados, con la condición de que la primera componente no se repita en ningún par del conjunto.
- La relación entre dominio e imagen: relación que a cada número perteneciente al dominio D, le asocia un único resultado numérico de entre las imágenes f(x).

- El criterio de la recta vertical: si se traza una recta vertical por cualquier parte del plano, si esta sólo corta la gráfica, la corta en una sola parte.

Cada definición se puede mirar como una relación de dependencia entre las variables, y en una representación gráfica, la variable independiente se asocia al eje de las abscisas y la dependiente al eje de las ordenadas. Los registros más comúnmente usados para representar una función son: analítico algebraico, analítico numérico, gráfico, figural, sagital, coloquial, tabular y el fenomenológico.

De acuerdo con el MEN (2005), el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional –como constante, variable, razón de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales– contribuye a la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo. Con el propósito de desarrollar el pensamiento variacional sugieren analizar diferentes representaciones e intentar formular procedimientos, algoritmos o fórmulas que permitan reproducir el mismo patrón de regularidad, calcular el término siguiente, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. Entre los estándares propuestos por el MEN (2005) para el desarrollo del pensamiento variacional, y los sistemas algebraicos y analíticos, están:

> Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas (...) Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan (p. 87).

En lo sugerido por el MEN (2005) se evidencia la importancia del uso de las representaciones semióticas como fundamento para relacionar los elementos de una función y asignarle significado y sentido a los conceptos. De acuerdo con Duval (2004), las representaciones semióticas son el medio que permite a un sujeto exteriorizar o comunicar sus representaciones mentales. A la transformación de una representación de un objeto sin cambiar de registro se le denomina *tratamiento*, y cambiando de registro se le llama *conversión;* es decir, un tratamiento se logra al decodificar la información de un registro y recodificarla en el mismo registro, mientras que en una conversión la información decodificada se recodifica en otro registro. Las similitudes de los elementos de dos o más representaciones permiten establecer las congruencias e incongruencias entre ellos. Duval (1999) asegura que "la comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión" (p. 186).

El significado de los objetos estudiados surge de la identificación de los componentes conectados de las diferentes representaciones y la coordinación de las organizaciones cognitivas (Meel, 2003), al ponerlos en paralelo con representaciones fenomenológicas. De lo anterior cabe destacar la función de las representaciones semióticas como andamio en la adquisición de los conocimientos matemáticos, basados en la coordinación tanto intra-registro e inter-registros como trans-registro, es decir, en transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento, y al poner en paralelo los elementos identificados en cada representación con elementos socioculturales que se pongan en juego y permitan asignar significado y sentido a los conceptos matemáticos estudiados.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este trabajo se evalúa la Dimensión matemática de los conocimientos didácticos-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función. En otras palabras, se analizan aquellos aspectos que comprenden sobre las funciones y la forma como los comunican. Se propuso un trabajo en dos dimensiones: ontológica y epistemológica. Ontológica por ser una actividad compartida donde la realidad se construye colectivamente a partir de la reflexión de los propios actores, buscando cambios en ellos mismos. Y epistemológica porque la realidad investigada es tratada de forma holística, teniendo en cuenta la relación de los participantes con el entorno educativo en que se forman, y el conocimiento se da como resultado de la interacción entre todos los actores implicados en el proceso (Colás y Buendía, 2004).

La muestra fueron 90 futuros profesores de matemáticas de la Universidad de Sucre, Colombia: 28 del tercer semestre, 28 del sexto semestre y 34 del octavo semestre. Se partió del supuesto que los desempeños de los estudiantes de los tres grupos eran diferentes, teniendo en cuenta la cantidad de cursos de didáctica y de matemática tomados por unos y otros.

Al terminar el tercer semestre los estudiantes han tomado unas 464 horas de formación matemática (dos cursos de Cálculo) y unas 432 horas de la componente didáctica-pedagógica (dos cursos de Didáctica de las matemáticas). Al terminar el sexto semestre han tomado unas 512 horas más de formación matemática (Cálculo III, Ecuaciones diferenciales y Análisis matemático), y unas 288 horas más de la componente didáctica-pedagógica (dos cursos más de Didáctica de las matemáticas). Y al terminar el octavo semestre han tomado unas 192 horas más de la componente disciplinar y unas 224 horas más en la componente didáctico-pedagógica, durante las cuales realizan su práctica docente.

A finales del segundo semestre del 2014 se aplicó un cuestionario con preguntas abiertas y cerradas sobre el mismo enunciado. Se escogió esta situación porque permite relacionar las funciones con el contexto sociocultural, lo cual facilita establecer congruencias entre elementos de dos o más representaciones de las funciones involucradas, comparar sus respectivos significados y encontrarles sentido al utilizarlos mientras se resuelve la situación.

El enunciado del cuestionario es:

> En la gráfica se muestran los costos de edición y los ingresos por la venta de una edición facsimilar del poema dramático de Alfonso Reyes, "Ifigenia cruel".

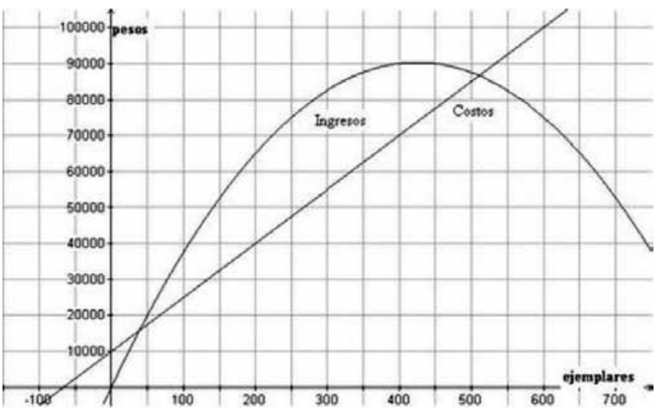

Figura 1. Cuestionario base aplicado a los estudiantes. Original tomado de: http://historiasdeactividades.blogspot.com/2007/09/ifigenia-cruel-de-alfonso-reyes.html

Al enlistar los indicadores que permiten determinar la relación de los elementos de la situación funcional con el contexto sociocultural se obtuvieron las categorías de análisis previas que se muestran en la tabla 1, con las cuestiones planteadas por cada categoría.

Tabla 1. Categorías de análisis y cuestiones planteadas en la situación.

Ítem	Categorías de análisis	Cuestiones planteadas
1	Identificación y uso del intercepto al origen en una función.	¿Cuáles son los Costos, los Ingresos y la Ganancia por producir y vender 0 ejemplares?
2	Identificación y uso de los intervalos de variación de una función.	¿Dentro de qué límites se debe mantener la oferta para obtener ganancias?
3	Determinación de los máximos y mínimos de una función.	¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?
4	Identificación y uso del concepto de pendiente de una recta.	¿Cuánto cuesta producir cada libro si no se consideran los Costos fijos de producción?
5	Modelación matemática de una situación funcional.	Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de las Ganancias. En el mismo plano coordenado realiza la gráfica de las Ganancias.
6	Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita.	Si se sabe que se obtuvo una Ganancia de 20.000 pesos, ¿cuál fue el número de ejemplares que se debió producir y vender?
7	Analiza el crecimiento y decrecimiento de una función.	¿En qué intervalos crecen la funciones de Costos, de Ingresos y de Ganancias?

Podría esperarse que al resolver cada ítem/tarea planteada, el estudiante identificara, en la representación gráfica de las funciones involucradas, el elemento por el que se le indagaba y, a partir de esta identificación, hiciera conversiones y/o tratamientos y diera su respuesta. Es decir, que decodificara del registro gráfico los elementos que necesitara de la función y los recodificara en otro o en el mismo registro.

Por ejemplo, para obtener una representación tabular de las funciones involucradas se podían ubicar puntos con igual abscisa sobre las gráficas de las funciones de ingresos y de costos, y luego restar las coordenadas correspondientes (Ingresos − Costos) para obtener algunos valores de la función Ganancias y proceder a elaborar una tabla como la tabla 2, donde los signos negativos para las Ganancias indican pérdidas. En las representaciones mostradas en este ejemplo se utiliza la siguiente convención de colores: blanco para el Número de ejemplares, verde para los Costos, azul para los Ingresos y morado para las Ganancias.

Tabla 2. Representación tabular de las funciones de Costos, Ingresos y Ganancias.

Número de ejemplares (x)	Costo en pesos (y)	Ingresos en pesos (y)	Ganancias en pesos (y)
0	10000	0	-10000
50	17500	20000	2500
100	25000	37500	12500
200	40000	65000	25000
250	47500	75000	27500
300	55000	82500	27500
400	70000	90000	20000
450	77500	90000	12500
500	85000	87500	2500
600	100000	75000	-25000

Asimismo, es posible obtener las representaciones algebraicas de las funciones de Costos, Ingresos y Ganancias, para ello es necesario realizar algunas transformaciones tipo conversión y/o tipo tratamiento. Similar a como se hizo para construir la tabla, se obtienen algunos puntos sobre las representaciones graficas de las funciones de Ingresos y de Costos, y con esta información se tiene una conversión al registro aritmético numérico, con la que además se puede construir una representación cartesiana para cada una de las dos funciones: e. g., Costos (0, 10.000), (200, 40.000); Ingresos (0,0), (50, 20.000) y (400, 90.0000), y utilizar esta información para hallar la pendiente de la recta (función de Costos): $\frac{y2-y1}{x2-x1}=\frac{40.000-10.000}{200-0}=\frac{30.000}{200}=150$, que corresponde al costo de cada ejemplar sin considerar los costos fijos de producción. Utilizando esta pendiente y el intercepto al origen en el eje Y, se puede obtener la expresión algebraica: **Costos C(x) = 150x + 10.000**. Esto indica que los costos fijos de producción para este libro son de 10.000 pesos, y el costo de edición de cada ejemplar, sin tener en cuenta los costos fijos de producción, es de 150 pesos.

Para la función de Ingresos se pueden tomar los tres puntos de la representación cartesiana mostrada anteriormente y remplazarlos en la forma general de una función cuadrática: $I(x) = ax^2 + bx + c$ y resolviendo el sistema de ecuaciones: (1) $c = 0$; (2) $20.000 = 2.500a + 50b$ y (3) $90.000 = 160.000a + 400b$ se tiene que $a = -0{,}5$ y $b = 425$ y reemplazando estos valores en $I(x) = ax^2 + bx + c$ se obtiene la función de **Ingreso $I(x)= -0.5x^2 + 425x$**. Y como:

Ganancias es igual a Ingresos menos Costos [transformación tipo conversión]
$G(x) = I(x) - C(x)$ [transformación tipo conversión]
$G(x) = -0.5x^2+425x - (150x+10.000)$ [transformación tipo tratamiento]
$G(x) = -0.5x^2+425x-150x-10.000$ [transformación tipo tratamiento]
$G(x) = -0.5x^2+275x-10.000$ [transformación tipo tratamiento]

Se dice que la transformación es tipo conversión porque se hace un cambio de registro, pasando del registro gráfico al del lenguaje coloquial, y de este al algebraico. Se dice que la transformación es tipo tratamiento porque se hacen transformaciones al interior del registro algebraico, sin abandonarlo.

Con la información anterior, y siguiendo la convención de colores, en la figura 2 fueron reconstruidas las representaciones gráficas de las funciones involucradas en la situación, y se incluyó la representación gráfica de las Ganancias.

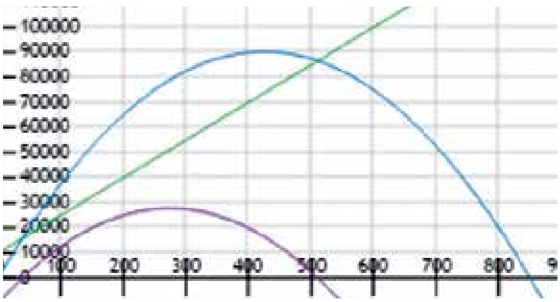

Figura 2. Representación gráfica de las funciones de Costo, de Ingresos y de Ganancias, en diferentes colores.

La convención de colores facilita realizar las congruencias e incongruencias entre los elementos comparables de las representaciones en cada registro, al ponerlos en paralelo y empezar a comparar los elementos ostensibles, tanto en unos como en otros registros y representaciones. Este análisis de congruencias es un fuerte potencializador para la comprensión de las funciones, al hacer el tránsito entre todas las representaciones posibles y relacionarlas con los elementos de las representaciones del registro fenomenológico. De ahí la importancia de poder efectuar transformaciones en matemáticas como herramienta/instrumento para el aprendizaje de un concepto (Del Castillo, 2013).

Con los resultados se hizo un análisis comparativo de las calificaciones medias de los tres grupos al resolver el cuestionario, y utilizando tablas de contingencias, con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson (α = 0,05), son analizadas las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem, con el grupo de donde estas provinieran.

Para elaborar el análisis y la caracterización de los objetos matemáticos primarios y procesos presentes en las prácticas matemáticas que desarrollan los estudiantes al resolver el cuestionario, se utilizó la noción de *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan, Godino y Font, 2015), a través de la cual se pueden identificar y describir en detalle elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos de los objetos matemáticos implicados, así como sus significados y los procesos incluidos en las prácticas matemáticas institucionales o personales. Aquí solamente se reportan los resultados de la dimensión matemática del CDM de los futuros profesores al resolver el cuestionario.

4. RESULTADOS, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En la presentación de los resultados se muestra una tripleta (*i*, j, k) donde "*i*" (entre 0 y 28) representa la cantidad de estudiantes del tercer semestre, "j" (entre 0 y 28) la de los del sexto semestre y "k" (entre 0 y 34) la de los del octavo semestre que hicieron referencia al tópico analizado en ese ítem. Y se presenta $P_{(r)i,\ j,\ ó\ k}$ donde r = 3, 6 u 8 semestre, para referir a un profesor en formación de alguno de los tres niveles.

4.1 Dimensión Matemática

4.1.1 Conocimiento Común del contenido

Los resultados del análisis de varianza mostrado en la tabla 3 y las comparaciones múltiples de la tabla 4 evidencian que se encontraron diferencias estadísticamente significativas en las calificaciones medias de los estudiantes de sexto semestre con los demás grupos (P < 0.05). Pero llama la atención que no se presentaran diferencias entre los de tercer semestre con los de octavo (ver tabla 3) y que obtuvieran mejores promedios los de sexto semestre que los de octavo, cuando los de octavo han visto por lo menos 192 horas más de matemáticas, y aproximadamente 704 horas más de matemáticas que los de tercero. Cuestión preocupante, pues los estudiantes de octavo semestre ya cursaron el programa en su totalidad, por lo cual es poco lo que se puede hacer para mejorar su nivel disciplinar, así que ingresarán al mercado laboral con serias dificultades en la dimensión matemática. Que haya diferencias entre los de sexto semestre con los de tercero podría esperarse, puesto que los de sexto en ese momento habían visto aproximadamente 512 horas más de matemáticas que los de tercero, pero a los de tercer semestre les faltan unas 704 o más horas en la componente disciplinar para terminar la carrera, lo que puede ser tiempo suficiente para alcanzar o superar el nivel mostrado por los estudiantes de sexto semestre.

Tabla 3. Anova de la Calificación al resolver el cuestionario.

1.1	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	101.285	2	50.642	10.673	0.000
Intra-grupos	412.815	87	4.745		
Total	514.100	89			

Tabla 4. Prueba DMS de Comparaciones múltiples de las Calificaciones medias al resolver el cuestionario.

(I) Semestre	(J) Semestre	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.	Intervalo de confianza a 95%	
					Límite inferior	Límite superior
3° semestre	**6° semestre**	-2.286*	0.582	0.000	-3.44	-1.13
	8° semestre	0.011	0.556	0.985	-1.09	1.12
6° semestre	**8° semestre**	2.296*	0.556	0.000	1.19	3.40

A continuación se estudian, por categorías de análisis, los resultados de las respuestas al cuestionario dadas por los estudiantes de los tres grupos.

Identificación y uso del intercepto al origen en una función

En esta pregunta (ítem 1) del cuestionario, se pidió a los estudiantes encontrar los Costos, los Ingresos y la Ganancia por producir y vender 0 ejemplares. Se esperaba que con una inspección visual pudieran encontrar los Costos e Ingresos al producir y vender cero ejemplares, así como inferir, por sustracción, la Ganancias. Sólo 27,7% (8, 13, 4) respondió acertadamente este ítem. La respuesta que predominó entre los estudiantes (44,4%) tenía las dos primeras opciones correctas, Costos e Ingresos, y la Ganancias cero (0), como se muestra en la respuesta del estudiante $P_{(3)2}$ (figura 3).

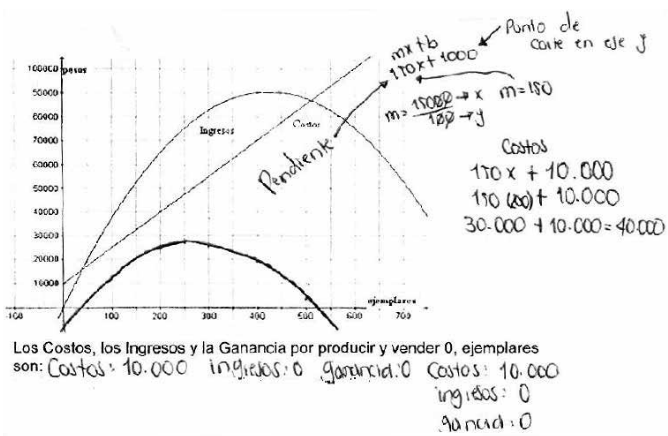

Figura 3. Respuesta dada por $P_{(3)2}$ a varios ítems del cuestionario.

En este objeto los estudiantes (21, 24, 25) utilizan *elementos lingüísticos* verbales, números naturales y el signo igual, como se observa en la respuesta dada por $P_{(3)2}$ cuando indica "*Costos* = 10.000, *Ingresos* = 0 y *Ganancias* = −10.000". Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, destaca el de intercepto al origen; asimismo, entre las *proposiciones/propiedades* parecen reconocer el punto (0, 10.000) como el intercepto de la recta $Y = 150x + 10.000$ con el eje Y, evidenciadas ambas representaciones en la respuesta de $P_{(3)2}$ cuando dice: "*punto de corte con eje Y* → 10.000". En cuanto a los *procedimientos* utilizados por los estudiantes (18, 21, 14), parece ser evidente un análisis visual, ya que no muestran ningún procedimiento, como se ve en la respuesta de $P_{(3)2}$ (figura 3). En este caso, el análisis visual funcionó a medias porque estos estudiantes, a pesar de que pusieron en juego diferentes representaciones de la situación, no fueron capaces de concebir una Ganancia negativa, lo que pudo impedirles dar soluciones adecuadas al problema (Hitt, 2003). En relación con los *argumentos*, no hay evidencias explícita de ellos en las respuestas de ningún estudiante de alguno de los tres grupos.

Identificación y uso de los intervalos de variación de una función
En esta pregunta (ítem 2) se pidió encontrar los valores en que se debe mantener la oferta para obtener Ganancias y se esperaba que, a partir de un análisis visual, pudieran identificar el intervalo para dichos valores. 58,8% (13, 20, 20) de los estudiantes dio respuestas acertadas en este ítem, pero mostraron ciertas limitaciones para identificar el dominio de la función Ganancias en el registro gráfico, como evidencia $P_{(8)1}$ (figura 4) cuando dice "*entre 400 y 450 ejemplares*", quien confundió el dominio de la función Ganancias con el intervalo donde se dan los mayores ingresos. Confusiones de este tipo pudieron ocasionar el alto porcentaje de desaciertos (41.2%), quizá por no poder establecer conexiones entre las representaciones semióticas involucradas en la situación (Meel, 2003) y a partir de ahí dar sus respuestas.

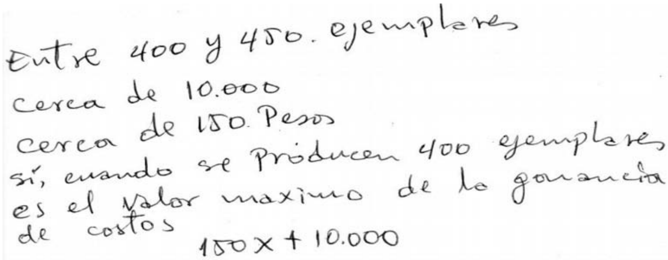

Figura 4. Respuesta dada por $P_{(8)1}$ a varios ítems del cuestionario.

Los *elementos lingüísticos* empleados por los estudiantes (10, 14, 16) en la identificación y uso de los intervalos de variación de una función fueron mayoritariamente verbales combinados con números enteros, como lo hace $P_{(8)1}$ (figura 4) cuando escribe: "*entre 400 y 450 ejemplares*". Respecto a los *conceptos/*

definiciones, la totalidad de los estudiantes utiliza intervalos como lo hace $P_{(6)4}$ (figura 5), quien los expresa de dos formas: "de 40 a 510" o "x∈ (40, 510)". Las *proposiciones/propiedades* utilizadas, aunque no lo expliciten sí dejan ver que el número de ejemplares para los cuales se tiene Ganancias está entre 40 y 510, esto se hace evidente en el manuscrito de $P_{(6)4}$ cuando marca sobre el eje x, 40 en un extremo del segmento y 510 en el otro, subrayando además la región del plano correspondiente a las Ganancias en ese intervalo. Los *procedimientos* usados por los estudiantes parecen ser visuales, como lo manifiesta $P_{(6)4}$ en su respuesta mostrada en la figura 5. Y los *argumentos* son muy escasos en los estudiantes de los tres grupos, sin embargo hay quienes como $P_{(6)4}$ dan cuenta de estos cuando dice: "*para obtener ganancia la oferta debe estar entre 40 y 510 ejemplares, ya que en la gráfica se ve que la ganancia es la región entre los ingresos y los costos que va de 40 a 510*".

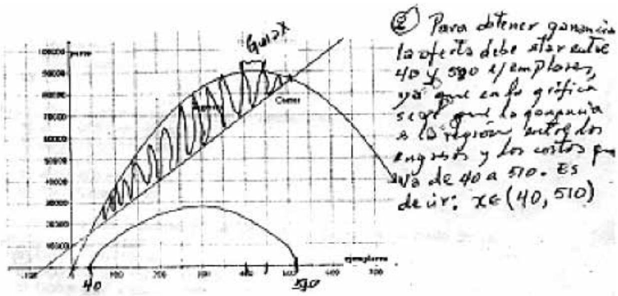

Figura 5. Respuesta dada por el profesor en formación $P_{(6)4}$ a varios ítems del cuestionario.

Determinación de los máximos y mínimos de una función

En esta pregunta (ítem 3) se pidió obtener el número de ejemplares que se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia. Se esperaba que confundieran las Ganancias máximas con los Ingresos máximos. Sólo 38,9% (12, 13, 10) pudo determinar el intervalo donde la Ganancia es máxima. En su mayoría (53,3%) consideraron el intervalo [0, 700] como respuesta, quizá en virtud de que esos eran los extremos visibles en la gráfica y −según lo reportado por Hitt (2003)− los estudiantes tienden a dejarse llevar por lo visual. Sin embargo, no consideraron las representaciones geométricas como complementarias en su proceso de resolución del problema, y como se esperaba (14, 11, 23) terminaron confundiendo la Ganancia máxima con los Ingresos máximos, lo que se evidencia en el manuscrito de $P_{(6)4}$ (figura 5), quien marca la Ganancia máxima en la región correspondiente a los Ingresos máximos, tal vez debido a que la gráfica de la función Ganancia no estaba explícita en la situación, por lo cual no pudieron asociarla con algo conocido (Suárez y Cordero, 2010), y en el manuscrito de $P_{(6)1}$ que dice: "*la mayor Ganancia se da cuando se llega a 400 ejemplares*".

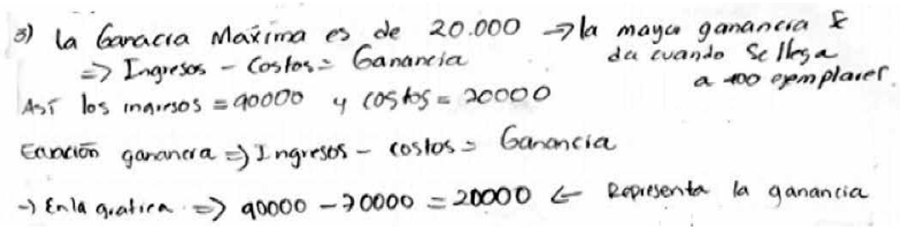

Figura 6. Respuesta dada por $P_{(6)1}$ a varios ítems del cuestionario.

Los *elementos lingüísticos* utilizados por los estudiantes en la determinación de los máximos y mínimos de una función fueron verbales combinados con números naturales, elementos gráficos y signos de operación, como lo hace $P_{(6)1}$ (figura 6), que afirma: "la Ganancia máxima es de 20.000 → Ingresos − Costos = Ganancia". Entre los *conceptos/definiciones* empleados están máximos y mínimos, intervalo y función, en particular $P_{(6)1}$ plantea la estructura aditiva "Ecuación ganancia → Ingresos − Costos = Ganancia", donde se evidencia el uso del concepto de función. En relación con las *proposiciones/propiedades*, determinan la mayor distancia entre las gráficas de las funciones Ingresos y Costos como la mayor Ganancia, al igual que el intervalo más alto de la función Ingresos como los puntos donde esta función toma sus valores máximos, así lo hace $P_{(3)7}$ (figura 7). Respecto a los *procedimientos* usados, se evidencian procesos de visualización complementados con algunos trazos figurales: $P_{(6)4}$ (figura 5), por ejemplo, muestra el punto más alto de la gráfica de Ingresos como la Ganancia máxima y subraya la región correspondiente a las Ganancias, estableciendo con esto congruencias entre elementos de las representaciones gráficas, figural y del lenguaje coloquial. Y en cuanto a los *argumentos*, no se muestran evidencias claras de ellos, sin embargo $P_{(6)1}$ en su manuscrito parece querer argumentar su actuar a partir de la serie de pasos que realiza cuando dice: "Así los ingresos = 90.000 y costos = 70.000 ecuación ganancia → Ingresos − Costos = Ganancia → en la gráfica → 90.000 − 70.000 = 20.000 ← representa la ganancia".

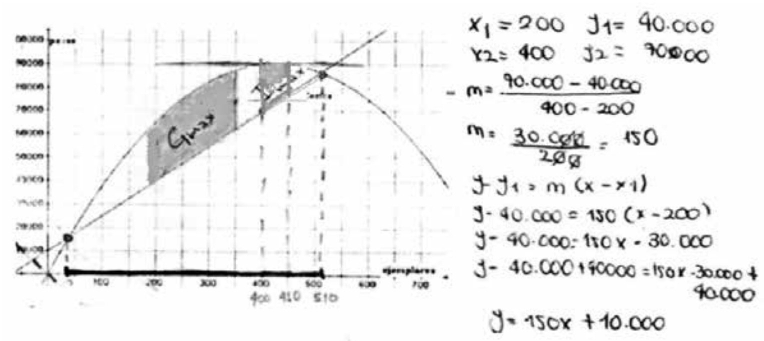

Figura 7. Respuesta dada por $P_{(3)7}$ al ítem 4 del cuestionario.

Identificación y uso del concepto de pendiente de una recta

En esta pregunta (ítem 4) se pidió a los estudiantes el costo de producir cada libro si no se consideran los Costos fijos de producción. Se esperaba que identificaran, en el contexto de la situación, la pendiente de la función de Costos, localizaran dos puntos por donde pasa su gráfica y utilizaran la fórmula de la pendiente para encontrarla, como lo hizo $P_{(3)7}$ (figura 7). Sólo 37,8% (9, 18, 7) dio respuestas acertadas a este ítem. Otro grupo (12, 4, 14) hizo un análisis visual que no favoreció su avance en la solución de esta tarea (Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011), considerando como respuesta 10.000 –los Costos fijos de producción–, en tanto que otros (7, 6, 13) como $P_{(8)3}$ (figura 8) consideraron como respuesta 1500, valor que pudo obtenerse por error al simplificar.

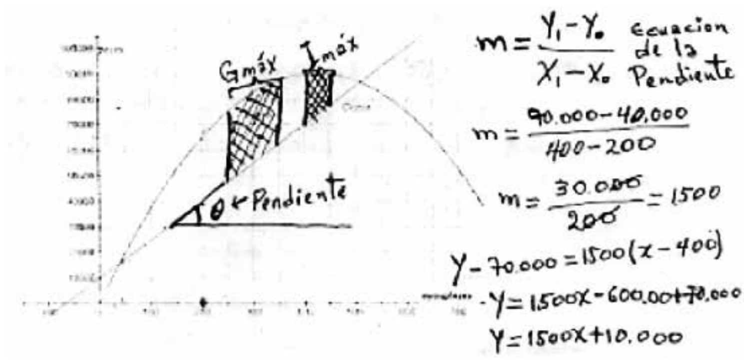

Figura 8. Respuesta dada por $P_{(8)3}$ al ítem 4 del cuestionario.

Para este ítem los estudiantes (18, 21, 23) utilizaron *elementos lingüísticos* verbales y números naturales, expresiones aritméticas, algebraicas y figurales, como lo hace $P_{(8)3}$ (figura 8) cuando escribe: $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ecuación de la pendiente, $m = \frac{70.000 - 40.000}{400 - 200}$, $m = \frac{30.000}{200} = 1.500$. Entre los *conceptos/definiciones* que emplean destaca par ordenado, intercepto al origen, ecuación y pendiente de una recta, como lo muestra $P_{(8)3}$. En relación con las *proposiciones/propiedades*, parecen reconocer la pendiente de la recta como determinante de la variación de la función lineal, para el caso $P_{(8)3}$ señala "$\theta \leftarrow$ pendiente", quien además establece congruencias entre los elementos de diferentes representaciones semióticas de los registros analítico numérico, gráfico, del lenguaje coloquial y algebraico, como se muestra en los ejemplos anteriores. Respecto a los *procedimientos* utilizados (19, 10, 27), elaboran una conversión del registro gráfico al analítico numérico, donde hacen algunos tratamientos hasta dar con su respuesta, y usan estos elementos para realizar una conversión al registro algebraico, en el cual efectúan una secuencia de tratamientos hasta obtener la expresión algebraica de los Costos, como puede verse en la solución dada por $P_{(8)3}$. En cuanto a los *argumentos*, ninguno los establece claramente.

Modelación matemática de una situación funcional

Para la modelación matemáticamente de una situación funcional, se pidió a los estudiantes resolver dos cuestiones: 1) Calcular una expresión algebraica que permitiera un cálculo aproximado de las Ganancias, y 2) Realizar en el mismo plano coordenado donde estaban las gráficas de las funciones de Ingreso y de Costos, la gráfica de las Ganancias.

1) Ante la primera cuestión (ítem 5) se esperaba que hallaran primero las expresiones algebraicas para los Ingresos y los Costos, y a partir de varias conversiones y tratamientos, encontraran la expresión buscada. Solamente 47,8% (10, 22, 11) de los estudiantes dio respuestas acertadas, con algo de desorden al comunicarlas, como lo hace $P_{(6)11}$, que denota de varias maneras la función de ingresos y no guarda una secuencia lógica en la presentación de sus resultados. La siguiente opción más respondida correspondió a una función lineal, reforzando lo reportado por Marroquín (2009), quien señala que los estudiantes –al pedírseles modelar algebraicamente una función– tienden a dar como respuesta una función lineal.

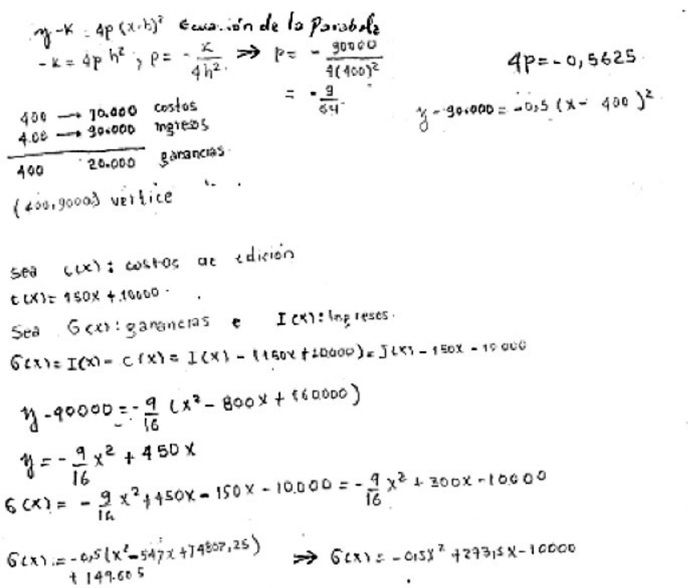

Figura 9. Respuesta dada por $P_{(6)11}$ al ítem 5 del cuestionario.

Los *elementos lingüísticos* utilizados por los estudiantes (24, 27, 29) al calcular una expresión algebraica que permitiera un cálculo aproximado de las Ganancias fueron mayoritariamente algebraicos y aritméticos, combinados con números naturales y elementos verbales, como lo hace $P_{(6)11}$ (figura 9) cuando anota: "$y - 90.000 = 4p\,(x - 400)^2$ ecuación de la parábola". Entre los *conceptos/definiciones* que emplean están: parábolas, rectas, punto, vértice y funciones, como muestra $P_{(6)11}$ al expresar "$G(x) = -0.5x^2 + 275x - 10.000$", reportando la expresión algebraica que representa las Ganancias. En relación con las *proposiciones/propiedades* (10, 22, 11), identifican gráficamente el vértice y un punto de la gráfica de la parábola, y los usan para encontrar una expresión algebraica que dan como respuesta; $P_{(6)11}$, en particular, dice: "(400, 90.000) vértice". En cuanto a los *procedimientos* usados, en su mayoría (15, 24, 23) identifican el vértice y otro punto por donde pasa la gráfica de la parábola y, utilizando su forma canónica, dan su respuesta, por ejemplo $P_{(6)11}$, quien encuentra primero las funciones de Costos y de Ingresos, y, a partir de ellas, la de Ganancias. Otros (9, 4, 11) dan como respuesta la expresión algebraica que representa los Costos. Respecto a los *argumentos*, en ninguno de los tres grupos se evidencian con claridad.

2) Al construir en el mismo plano coordenado donde se presentó la situación, la gráfica de las Ganancias (ítem 6), se esperaba que los estudiantes –a partir de un análisis visual y mediante una serie de conversiones y tratamientos– obtuvieran la gráfica de las Ganancias, al identificar los interceptos de las gráficas de las funciones de Ingresos y de Costos y asociarlos con los cortes de la gráfica de la función Ganancias con el eje de las abscisas, y que su altura la asociaran con la diferencia de las funciones Ingresos y Costos. 57,8% (14, 20, 18) de los estudiantes obtuvo respuestas acertadas. En el análisis de desaciertos se evidencia que apuntaron a que la Ganancia mínima debía ser cero (38,9%), hecho que concuerda con sus respuestas cuando se les preguntó por el intercepto al origen de las tres funciones en el ítem 1, como se muestra en la gráfica elaborada por $P_{(6)2}$ (figura 10). Este hecho constituye un obstáculo en el sentido de Brousseau (1999), lo cual pudiera considerarse normal, teniendo en cuenta la sorprendente lentitud de la humanidad en el proceso histórico de construcción del concepto de número negativo (Cid y Bolea, 2007).

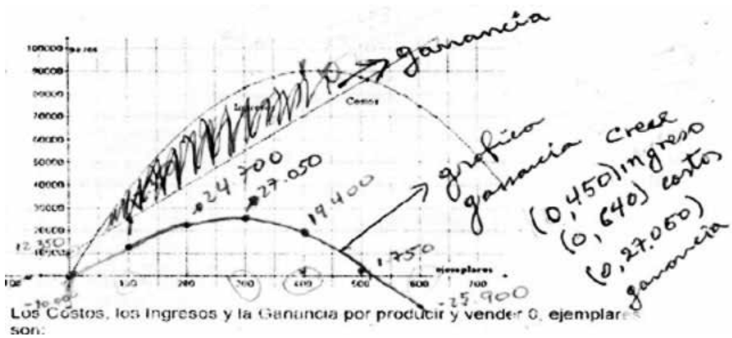

Figura 10. Respuesta dada por $P_{(6)2}$ a varios ítems del cuestionario.

Los *elementos lingüísticos* utilizados por los estudiantes al construir, en el mismo plano coordenado donde estaban las gráficas de las funciones de Ingreso y de Costos, la gráfica de las Ganancias, fueron verbales, gráficos, figurales y números enteros, como lo hace $P_{(6)2}$ (figura 10). Entre los *conceptos/definiciones* que usan destacan funciones, puntos, graficas e interceptos al origen. En relación con las *proposiciones/propiedades*, parecen reconocer los puntos de corte de las funciones de Ingresos y de Costos y asociarlos con los ceros de la función Ganancias en el eje de las abscisas, como se evidencia en la respuesta de $P_{(6)2}$ quien además establece congruencias entre elementos gráficos y del lenguaje coloquial cuando señala con una flecha y dice "*gráfica ganancia*". Según los *procedimientos* empleados, se puede inferir que lo hicieron por simple inspección visual, en tanto que otro grupo sólo sombreó la región correspondiente a las Ganancias, similar a como lo hizo $P_{(6)2}$. No hay evidencias claras de los *argumentos*.

Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita

En esta pregunta (ítem 7) se pidió encontrar el número de ejemplares que se debió producir y vender si se sabe que se obtuvo una Ganancia de 20.000 pesos. Se pretendía que identificaran gráficamente dos puntos de igual abscisa, uno para la función Ingresos y otro para la de Costos, de tal forma que su diferencia fuera aproximadamente 20.000 pesos, o que si ya habían obtenido la expresión algebraica de las Ganancias, armaran una ecuación igualándola a 20.000 y que, al encontrar la incógnita, respondieran. 61,1% (14, 21, 20) de los estudiantes dio respuestas acertadas, los restantes cometieron errores al modelar la expresión algebraica de las Ganancias, como lo hizo $P_{(3)18}$ (figura 11), quien además comete errores al adecuar la ecuación, antes de aplicar la fórmula general, lo que pudo impedirle responder satisfactoriamente (Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011).

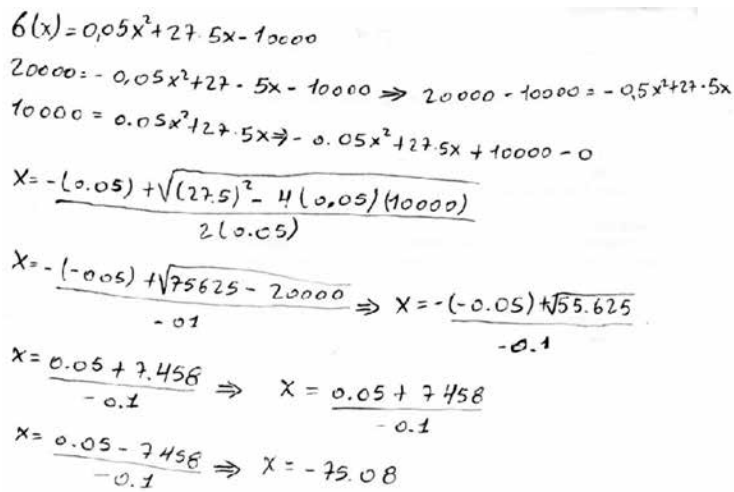

Figura 11. Respuesta dada por $P_{(3)18}$ al ítem 7 del cuestionario.

Los *elementos lingüísticos* que emplearon los estudiantes al usar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita fueron mayoritariamente algebraicos, aritméticos y verbales, como lo muestra $P_{(6)6}$ (figura 12) cuando expresa: "$-0.05(400)^2 + 273.5(400) - 10.000$ es G(400)". Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan destacan función, polinomio aritmético y ecuación cuadrática, por ejemplo $P_{(3)18}$ y $P_{(6)6}$ (figuras 11 y 12). En cuanto a las *proposiciones/propiedades*, un grupo amplio (14, 21, 20) identificó puntos en la gráfica de la función de Ingresos y en la de Costos, y los relacionó con elementos del contexto sociocultural donde se plantea la situación. Los *procedimientos* utilizados son esencialmente los que se previeron: 1) (13, 16, 15) dieron sus respuestas luego de un análisis visual; 2) (12, 13, 14) hacen una conversión al registro algebraico y formulan una ecuación cuadrática e intentan resolverla, como se muestra en el manuscrito de $P_{(6)6}$ cuando consigna: "Así que al revisar la gráfica nos damos cuenta que si se tienen 400 ejemplares la diferencia entre los ingresos y los costos es de 20.000...", que además dice haber encontrado la expresión algebraica por tanteo. Un grupo muy reducido de estudiantes (0, 3, 1) *argumentan* sus respuestas, como es el caso del $P_{(6)6}$, quien expresa: "... por tanto si se tiene una ganancia de 20.000, es porque se tienen 400 ejemplares".

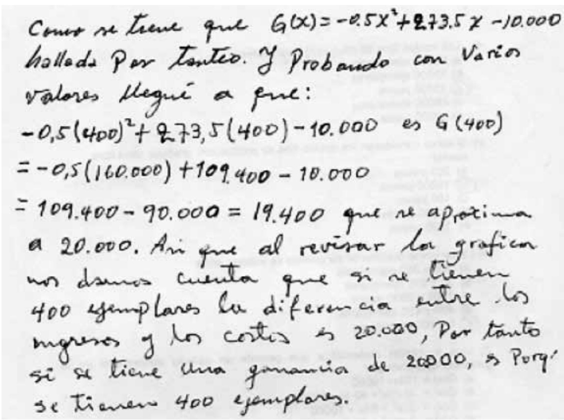
Como se tiene que $G(x)=-0.5x^2+273.5x-10.000$
hallada Por tanteo. Y Probando con Varios
valores llegué a que:
$-0,5(400)^2+273,5(400)-10.000$ es $G(400)$
$=-0,5(160.000)+109.400-10.000$
$=109.400-90.000=19.400$ que se aproxima
a 20.000. Así que al revisar la grafica
nos damos cuenta que si se tienen
400 ejemplares la diferencia entre los
ingresos y los costos es 20.000, Por tanto
si se tiene una ganancia de 20000, es Porq'
se tienen 400 ejemplares.

Figura 12. Respuesta dada por $P_{(6)6}$ al ítem 7 del cuestionario.

Análisis del crecimiento y decrecimiento de una función

En esta pregunta (ítem 8) se les pidió determinar en qué intervalos crecen las funciones de Costos, de Ingresos y de Ganancias. Se esperaba que los estudiantes identificaran visualmente el crecimiento en cada una de las tres funciones y, a partir de esto aportaran sus respuestas. Únicamente 32,2% (10, 12, 7) de ellos dio respuestas acertadas. Se evidencian serias dificultades con la comprensión del concepto de crecimiento, porque fue mucho mayor el número de quienes hicieron la gráfica de la función Ganancias que los que dieron una respuesta acertada a este ítem y al hacer la gráfica debieron darse cuenta hasta donde crece esta función. La dificultad parece estar centrada en el uso indistinto de la letra como magnitud y como variable generalizada (Font, 2011) y en el obstáculo que genera el análisis gráfico de una situación funcional, y aunque los estudiantes tienen la tendencia de no ir más allá de lo visual (Franco y Ochoviet, 2006), combinaron el uso de la letra como variable generalizada con un análisis visual irreflexivo, como lo muestra la respuesta de $P_{(3)8}$, que da valores fuera del dominio de la situación funcional "costos $(-100, -\infty^{+})$", combinados con valores al alcance de su visual cuando dice: "los ingresos crecen (0,400]".

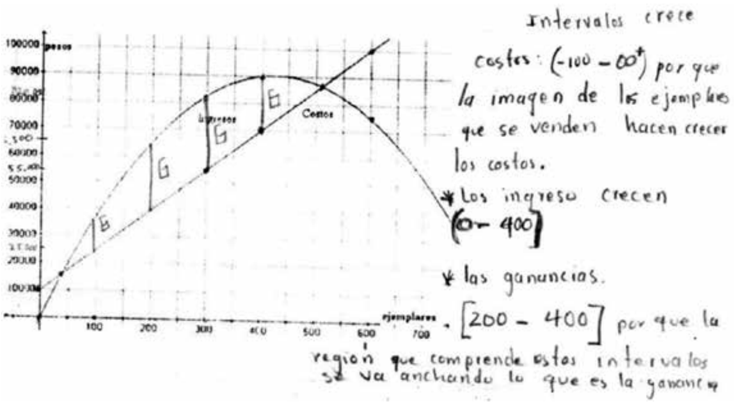

Figura 13. Respuesta dada por $P_{(3)11}$ a varios ítems del cuestionario.

En este ítem los *elementos lingüísticos* que utilizan los estudiantes (19, 19, 22) son mayoritariamente verbales combinados con números naturales e intervalos, como hacen $P_{(3)11}$ y $P_{(3)8}$ (figuras 13 y 14). Entre los *conceptos/definiciones* que usan destacan el de intervalo y ejes coordenados, como muestra $P_{(3)8}$ (figura 14) al expresar: "de cero a 425 ejemplares". En relación con las *proposiciones/propiedades*, la mayoría (18, 16, 27) asoció los intervalos solicitados a lo que estaba a su alcance visual, por ejemplo $P_{(3)11}$, quien hace un análisis visual muy limitado, tanto para la función Costos como para la de Ganancias, mientras que el análisis realizado por $P_{(3)8}$ (figura 14) es mucho más completo y adecuado a la situación, asociando el eje Y a cada función analizada cuando escribe: "*el eje Y (costos)*". Los *procedimientos* efectuados por los estudiantes de los tres grupos parecen ser solamente visuales. En cuanto a los *argumentos,* se dan algunos casos aislados como $P_{(3)8}$ (figura 14) al decir: "*Ingresos: de cero a 425 ejemplares, ya que la función es cuadrática, por lo tanto una parte crece y la otra decrece y en este intervalo donde se aprecia que a medida que se aumenta en unidades sobre el eje X, el eje Y (Ingresos) también lo hace*".

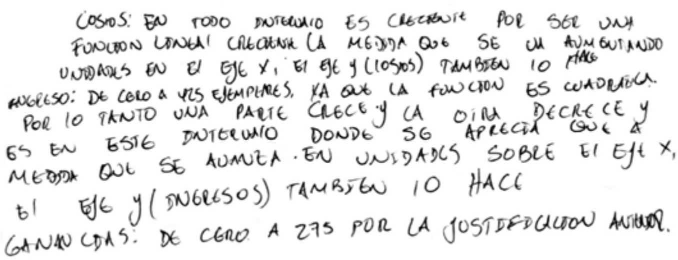

Figura 14. Respuesta dada por $P_{(3)8}$ al ítem 8 del cuestionario.

A manera de conclusión en cuanto al conocimiento común, las diferencias entre los grupos ocurren en las calificaciones al resolver el cuestionario, mientras que las características de los objetos matemáticos mostrados por estudiantes de los tres niveles, en sus procesos de solución, son muy parejos, tanto intra como inter grupos.

4.1.2 Conocimiento Ampliado del contenido

Como hemos visto, el conocimiento matemático es necesario para entender las matemáticas, tanto en el nivel que se orienta como en el nivel posterior (Pino-Fan y Godino, 2015). Permite poner en correspondencia diferentes objetos matemáticos, o hacer conexiones entre representaciones de un mismo objeto matemático. Determina el repositorio de recursos matemáticos usados por una persona ante una situación problema que tenga que resolver.

Las respuestas dadas por los estudiantes de los tres grupos a los ocho ítems del cuestionario son muy diversas. Únicamente (8, 21, 9) de ellos dieron respuestas adecuadas a por lo menos seis ítems, mientras que otro grupo mucho más amplio (20, 7, 25) presentó serias dificultades, tanto en la comprensión de los enunciados de algunos ítems como en la elaboración de los procedimientos; también al tratar de hacer conexiones entre diferentes representaciones de las funciones y en la comunicación de los resultados. Así, se puede decir que los estudiantes del primer grupo poseen un dominio adecuado de la Dimensión matemática para resolver problemas con las características del que se les planteó. Del segundo grupo podemos decir que las dificultades al identificar y relacionar los elementos de una función en uno o varios registros podrían ser un impedimento para el desarrollo del pensamiento variacional, indispensable para el acceso al cálculo (Hitt, 2003).

Que los profesores orientadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tengan este tipo de dificultades es problemático para la enculturación matemática de las comunidades donde se van a desempeñar, ya que si no poseen sólidos conocimientos de la Dimensión matemática, difícilmente van a poder gestionar de manera adecuada los aprendizajes de sus futuros estudiantes. Sin embargo, se presentaron casos aislados donde se evidencian algunos fundamentos del conocimiento ampliado del contenido: $P_{(6)5}$ (figura 14) intentó, por integración, encontrar el área entre las gráficas de los Ingresos y la de los Costos; además, al relacionar los elementos identificados en las representaciones con elementos del contexto sociocultural donde se plantea la situación, hace un análisis trans-registro, proporcionando significado a los objetos estudiados (Pino-Fan y Godino, 2015).

Otro que evidencia algunos fundamentos del conocimiento ampliado del contenido es $P_{(8)9}$ (figura 15), pues usa elementos no visuales en la gráfica cuando prolonga tanto el eje de los ejemplares como la gráfica de los Ingresos, conservando la secuencia de los elementos originales, y a partir de ahí da su respuesta; por otra parte, $P_{(3)18}$ y $P_{(6)13}$ (figuras 17 y 18) intentan utilizar la fórmula para resolver una ecuación cuadrática.

Asimismo, fue significativo el número de estudiantes (9, 18, 7) que reconoció la pendiente de la recta en el contexto de la situación. Un grupo amplio de estudiantes (7, 12, 4) realizan varios procedimientos para llegar a una misma respuesta, en más de un ítem, y para designar las Ganancias subrayaron la región del plano correspondiente, hicieron la gráfica, la asociaron con su representación coloquial y encontraron la representación algebraica.

Como puede apreciarse en la tabla 5, se presentaron altos niveles de homogeneidad al interior de los grupos en 62,5% de las respuestas dadas a las

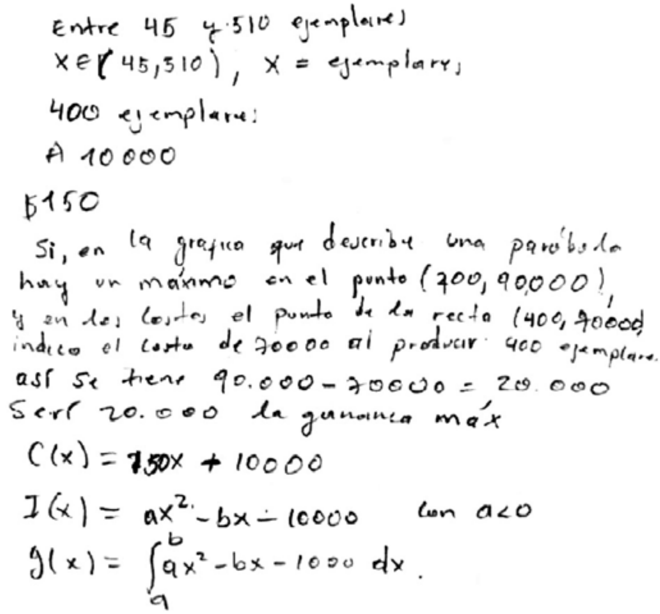
Entre 45 y 510 ejemplares
$x \in [45, 510)$, x = ejemplares
400 ejemplares
A 10000
B 150
Si, en la grafica que describe una parábola hay un máximo en el punto (700, 90000), y en los costos el punto de la recta (400, 70000) indico el costo de 70000 al producir 400 ejemplares.
así se tiene 90.000 − 70000 = 20.000
Será 20.000 la ganancia máx
$C(x) = 150x + 10000$
$I(x) = ax^2 - bx - 10000$ con $a<0$
$g(x) = \int_a^b ax^2 - bx - 1000\,dx$.

Figura 15. Respuesta dada por $P_{(6)5}$ a varios ítems del cuestionario.

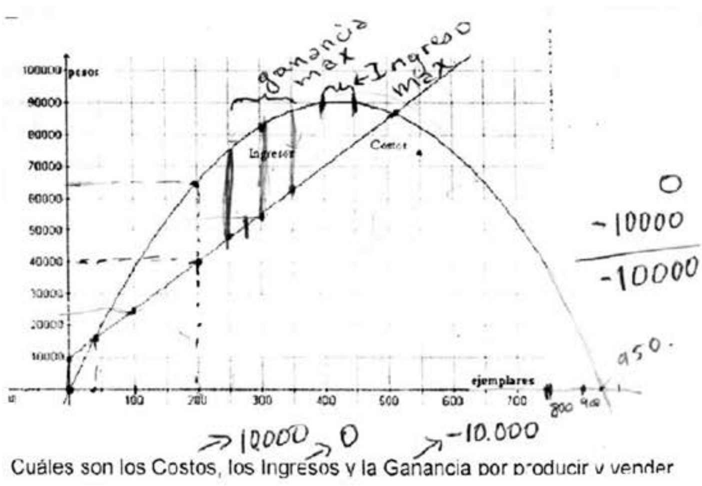

Figura 16. Respuesta dada por el profesor en formación $P_{(8)9}$ a varios ítems del cuestionario.

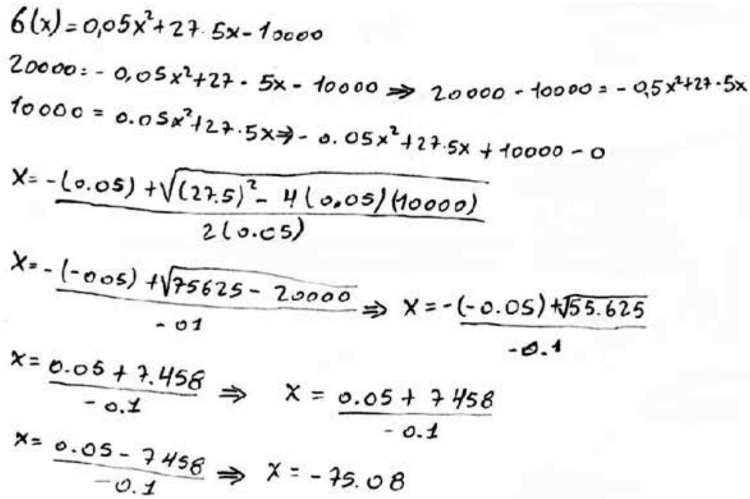

Figura 17. Respuesta dada por $P_{(3)18}$ al ítem 6 del cuestionario.

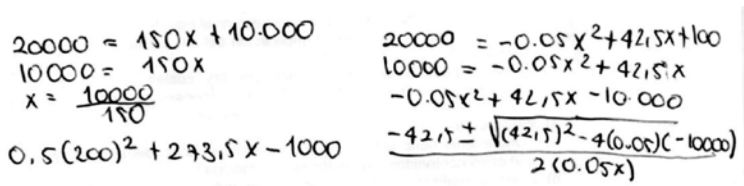

Figura 18. Respuesta dada por $P_{(6)13}$ al ítem 6 del cuestionario.

cuestiones planteadas, es decir, la tendencia por grupos fue a dar las mismas respuestas, tanto en los aciertos como en los desaciertos. Que la homogeneidad al interior de los grupos sea alta y que los porcentajes de aciertos en ellos no lo sean, significa que hubo un alto grado de acuerdos, sobre todo en los desaciertos. Y que la homogeneidad al interior de los grupos sea alta y los porcentajes de aciertos también lo sean, indica que hubo un alto grado de acuerdos, sobre todo en los aciertos. Por ello, es muy posible que estos resultados no sean productos del azar, sino que se deban a las creencias y formas de orientar los procesos de enseñanza de algunos profesores, que orientan a algunos grupos y no a otros.

Tabla 5. Coeficientes Chi-Cuadrado de Pearson para cada cuestión planteada.

Cuestiones planteadas	Aciertos (%)	χ^2	P-valor
¿Cuáles son los Costos, los Ingresos y las Ganancias por producir y vender 0 ejemplares?	27,77	16.439	< 0,05
¿Dentro de qué límites se debe mantener la oferta para obtener ganancias?	58,88	7.585	> 0,05
¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?	38,88	14.355	< 0,05
¿Cuánto cuesta producir cada libro si no se consideran los Costos fijos de producción?	37,77	18.750	< 0,05
Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de las Ganancias.	47,77	17.287	< 0,05
Si se sabe que se obtuvo una Ganancia de 20.000 pesos, ¿cuál fue el número de ejemplares que se debió producir y vender?	61,11	71.408	< 0,05
En el mismo plano coordenado realiza la gráfica de las Ganancias.	57,77	10.052	> 0,05
¿En qué intervalos crecen la funciones de Costos, de Ingresos y de Ganancias?	32,22	6.467	> 0,05

CONCLUSIONES

Al evaluar la Dimensión matemática del CDM de los futuros profesores de matemáticas, se encontraron serias dificultades con la comprensión de la noción función, específicamente con la identificación y uso de los elementos de las funciones involucradas, la identificación de los interceptos al origen sin ayuda gráfica y el análisis de los valores extremos, así como con los intervalos de crecimiento la modelación de las funciones y la identificación de la pendiente de la función lineal. Los objetos primarios y procesos presentes en las prácticas que desarrollan los estudiantes al hacer transformaciones de las representaciones de las funciones involucradas en la situación son muy similares en los tres grupos, a pesar de la diferencia en horas desarrolladas en el programa, en cada uno de los tres niveles.

A pesar de los esfuerzos de los estudiantes por establecer conexiones entre diferentes representaciones de las funciones estudiadas, la generalidad es que privilegian transformaciones tipo conversión hacia un sólo registro, donde recodifican la información, realizan algunos tratamientos y proceden a responder, siendo deseable que establezcan conexiones entre diferentes registros (Duval 2004), ya que según Font (2011), estos ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con otros. Pero además de pensar en los procesos cognitivos que podrían activarse haciendo conexiones entre representaciones, cabe pensar en la representación como una herramienta que posibilita prácticas que sin ella no serían posibles.

Uno de los conflictos epistémicos más marcados en relación con el concepto de función (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005) es el distanciamiento entre el reconocimiento del concepto a nivel escolar y su uso consciente a nivel social. Esto se manifestó en la no aceptación –por parte de algunos estudiantes– de representaciones como la gráfica, la tabular, la del lenguaje coloquial y la fenomenológica en calidad de representaciones de una función, y por ello no las usaron como apoyo para dar sus respuestas, a pesar de que las actividades propuestas fueron pensadas teniendo en cuenta este tipo de conflictos, reportados en algunos de los antecedentes revisados.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado parcialmente en el marco del Proyecto de Investigación sobre formación de profesores Fondecyt Nº 11150014, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile.

REFERENCIAS

Amaya, T. y Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Revista Educación Matemática*, 25(2), 119-140.

Ball, D. Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407.

Brousseau, G. (1999). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), pp. 165-198.

Cid, E. y Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. Consultado el 27 de agosto de 2015 en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/11%20−%20Cid&Bolea%20TAD%202.pdf

Colás, M. P. y Buendía, E. L. (2004). *Investigación educativa*. Sevilla. Alfar.

Colombia. Ministerio de Educación Nacional. (2005). Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia. Consultado el 1 de octubre de 2015 en: http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf.

Del Castillo, A. (2003). La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural. Consultado el 4 de mayo de 2016 en: http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf

Domenicantonio, R. Costa, V. y Vacchino, M. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo integral. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (27), 75-87.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En: U. Malaspina (coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales*. Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú. pp. 14-17.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento. Cali, Colombia. Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia. Universidad del Valle.

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 56, 86-94.

Franco, G. y Ochoviet, C. (2006). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En: G. Martínez (ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* vol. 19. México, D.F., Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C. pp. 509-513.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (20), 13-31.

Godino, J., Batanero, C. Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat*, 8, (1), 46-74.

Godino, J. & Pino-Fan, L. (2013). The Mathematical Knowledge for Teaching. A View from Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. In: B. Ubuz, Ç.

Haser & M. Mariotti (eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Antalya, Turkey. CERME. pp. 3325-3326.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, C. (2005). Conflictos epistémicos en un proceso de estudio de la noción de función. Implicaciones para la formación de profesores. En: J. Lesama (ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, núm. 18, 348-355. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, 20(44), 282-300.

Leinhardt, G., Stein, M. K., & Zaslavky, O. (1990). Function, Graphs, and Graphing. Task, Learning and Teaching. *Review of Educational Research*, 0(1), pp. 1-64.

Marroquín, C. (2009). Construcción del concepto ecuaciones lineales con dos variables mediante visualización y registros de representación en alumnos de primer semestre de ingeniería agroindustrial: secuencia de una situación didáctica. Tegucigalpa. Universidad Tecnológica Nacional Francisco Morán.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(3), 221-271.

Parra, Y., y Pino-Fan, L. (2016). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. *Artículo en revisión.*

Pino-Fan, L., Assis, A. & Castro, W. F. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2016). Assessing Key Epistemic Features of Didactic-Mathematical Knowledge of Prospective Teachers: The Case of the Derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Advance online publication. DOI: 10.1007/s10857-016-9349-8.

Sastre, P., Rey, G. y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 141-155. DOI: 1815-0640.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de Currículo y Formación del Profesorado*, 9(2), 1-30.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación. Una categoría en Cálculo para resignificar la variación en una situación de modelación del movimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 319-333.