ENSEÑANZA DEL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO POR PROFESORES EN FORMACIÓN PARA PRIMARIA

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. (México)
amatinezb@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen

Esta investigación, cualitativa, examinó las prácticas de enseñanza del principio multiplicativo de dos futuros profesores del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, a alumnos de segundo, tercero y cuarto grados. Las estrategias de enseñanza que propusieron fueron aprobadas por sus mentores. Los practicantes no identificaron las permutaciones, con y sin repetición, ni la variedad de soluciones que dieron los alumnos a problemas de conteo; los niños también evidenciaron el sentido del que dotaron a los términos y a sus estrategias de solución. Los profesores en formación requieren dominar el principio multiplicativo, el trazo de diagramas de árbol para solucionar algunos problemas relativos a él y anticipar las posibles respuestas de alumnos de primaria a problemas que lo impliquen.

Palabras clave: enseñanza, principio multiplicativo, profesores en formación

Abstract

This qualitative research examined the teaching practices of the multiplication principle, by two prospective teachers from the fourth semester of the Bachelor's degree in Primary Education, to second, third and fourth primary graders. The teaching strategies they proposed were approved by their mentors. Practitioners did not identify the permutations, with and without repetition, nor the variety of solutions that pupils gave to counting problems; the children also gave evidence of the sense given to the terms and to their solution strategies. The in-training teachers need to master the multiplicative principle, the drawing of tree diagrams to solve some problems related to it and to anticipate the pupils' possible answers to problems involving the multiplication principle.

Key words: teaching, multiplication principle, teachers training

Introducción

Investigamos, cualitativamente (Vasilachis, 2006), las características de la formación docente en estocásticos para la educación primaria, dadas las reformas para la Educación Primaria (SEP, 2011a) y para la Normal (SEP, 2012). Hogarth (2001) señaló que "aprender implica un contenido y unas reglas; entendiendo por contenido lo que se aprende; y, por reglas, cómo se aprende lo que se aprende" (pp. 281-282); advierte que "los aprendices aprenden al trabajar junto con sus maestros y al observar lo que éstos hacen" (p. 284). Por ello, planteamos la pregunta: ¿Qué caracteriza la comprensión del principio multiplicativo de los docentes en formación? El objetivo fue identificar el conocimiento de técnicas de

conteo para la enseñanza que requieren los docentes en formación para la educación primaria. Nos referiremos sólo al principio multiplicativo y a las permutaciones.
English hace explícito que el principio fundamental del conteo establece que si “una tarea se puede realizar de *n* maneras y otra tarea de *m* formas, entonces el número de maneras de realizar las dos tareas es *nm*” (2005, p. 122). La autora recomienda incluir la combinatoria en el currículo de matemáticas para fortalecer el razonamiento combinatorio pues, como también señalan Batanero, Godino & Navarro-Pelayo (1997), los estudiantes enumeran incorrectamente el espacio muestra (no identifican todas las respuestas) de un problema, dando origen a ideas erróneas en probabilidad. En una investigación documental de la propuesta para educación primaria (SEP, 2011a), Martínez y Ojeda (2016) identificaron tres lecciones en los libros de texto de primaria (2°, 3° y 4° grado) relacionadas con el principio multiplicativo. Las tres lecciones fueron asignadas por los tutores de primaria a dos normalistas para que las impartieran en sus jornadas de prácticas.

Elementos teóricos

La combinatoria, una de las diez ideas fundamentales de estocásticos que Heitele (1975) propuso como guía para un currículum en espiral, fue señalada por Fischbein (1975) como una de las cuatro fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico. Para Heitele (1975), las operaciones combinatorias (técnicas de conteo) calculan los campos de probabilidad de eventos aleatorios complejos.

Piaget e Inhelder (1951) caracterizaron para cada estadio de la evolución del pensamiento del niño la de la idea de azar, para la que las operaciones combinatorias son centrales:

- *Estadio de las operaciones preconcretas* (edades de 4 a 7 años). El niño “no comprende la naturaleza aleatoria de la mezcla” (p. 4); carece de un “pensamiento operatorio pues es incapaz de concebir las operaciones reversibles” (p. 9). En esta etapa hay “ausencia de nociones combinatorias, falta de comprensión de las posibles permutaciones y falta de comprensión de la idea de azar” (p.12). Los niños “captan más rápido las combinaciones utilizando agrupamientos empíricos, [pero] muestran dificultad para captar el principio de permutaciones” (p. 176); las permutaciones posibles son obtenidas por tanteos o identificando regularidades, dado que “el niño carece de las ideas de movilidad y de la reversibilidad” (p. 180).
- *Estadio de las operaciones concretas* (de los 7 a los 11 años). Los niños tienen una idea de mezcla aleatoria global, sin advertir las posibilidades de acuerdo al modelo de permutaciones y arreglos. El niño “tiene una impresión de la regularidad, pero aún no es capaz de generalizarla” (p. 181). En esta etapa se dan:

  > … dos procesos correlativos: el primero, es una conciencia progresiva de las simetrías o igualdades de las distribuciones; y el segundo, es el descubrimiento de un sistema (identificando la igualdad del número de permutaciones que comienzan igual y después la repetición del segundo elemento). (p. 187)

- *Estadio de las operaciones formales* (de los 11 a los 12 años). El niño concibe “la mezcla aleatoria” (p. 232) mediante la construcción de sistemas como parte de un total de posibilidades. Las proporciones se descubren mediante el pensamiento formal. “El número de posibles permutaciones es descubierto por el niño por un simple truco de multiplicación sucesiva, es una operación simple que consiste esencialmente en correspondencias” (p. 193). “El descubrimiento de permutaciones es posterior al de las combinaciones. Las combinaciones son una sencilla generalización de la multiplicación; las permutaciones proporcionan el verdadero prototipo de las relaciones, o las operaciones que llevan a otras operaciones” (p. 194).

Para Fischbein (1975), el inventario de casos posibles es más que una enumeración de elementos (excepto en, algunos experimentos simples), dado que presupone un proceso racional y constructivo que establece un espacio muestral de todos los resultados posibles. Este autor recomienda que la enseñanza de la combinatoria se inicie en el nivel de las operaciones concretas o por muy tarde al inicio de las operaciones formales (de 12 a 14 años). Fischbein desarrolló actividades favorables para la enseñanza de ideas de probabilidad y de combinatoria con niños de 9 a 10 años. Concluyó que el diagrama de árbol “proporciona un principio de construcción que sintetiza la inducción y deducción en una sola operación, una fórmula de trabajo que es un esquema cognitivo conceptual” (Fischbein, 1975, p. 115), y prefigura las reglas de suma y producto de probabilidades. Para Steinbring (1991), el diagrama de árbol es un medio de representación en estocásticos elementales para “reconstruir el significado del conocimiento matemático construido en el aula y comprender su relación con las condiciones sociales y las convenciones de enseñanza y de aprendizaje” (p. 508).

En su investigación acerca de enfoques intuitivos en condiciones de incertidumbre de maestros de escuela primaria, Andrà (2011) propuso tres niveles de las representaciones que producen las personas para estimar la probabilidad.

1. *Nivel de la experiencia*: las personas realizan representaciones que pueden ser perceptibles y aproximadas para contar los casos posibles y los casos favorables de eventos. Las personas representan los eventos mediante representaciones poco perceptibles, como las flechas, los diagramas de Venn, las tablas, entre otras. Heitele (1975) señala que el diagrama de árbol contribuye a evitar que los niños se limiten a un determinismo; es una estrategia que prefigura todos los posibles resultados, los pasos del experimento (aleatorio) y con ella se pueden identificar los espacios muestra discretos.
2. *Nivel del pensamiento aritmético*: las personas pasan de una percepción a una aproximación a las cantidades, que pueden ser números enteros y convertirse en porcentajes.
3. *Nivel de la teoría*: se comprenden las expresiones matemáticas (fórmulas), los axiomas y los teoremas de la probabilidad. Las representaciones son formales y abstractas.

Dreher y Kuntze (2015) realizaron una investigación sobre el caso de las múltiples representaciones en la clase de matemáticas con profesores en formación y profesores en activo de secundaria. Concluyeron que en los entornos de aprendizaje a los estudiantes se les debe dar la oportunidad de conocer diferentes representaciones de un objeto matemático para desarrollar la comprensión conceptual de las matemáticas. Se debe considerar el cambio de representaciones para que los estudiantes realicen conexiones y reflexiones sobre esas representaciones. De acuerdo con Parker y Leinhardt (1995) en su propuesta de enseñanza del porciento, un reto tanto para los investigadores como para los maestros es diseñar o seleccionar las representaciones para la enseñanza.

Un alumno, al resolver un problema, puede activar la zona de desarrollo próximo, definida por Vygotsky (2009) como:

> …la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (p. 133)

Método

Observamos en aulas (Wittrock, 1986) tres prácticas (P^1, P^2 y P^3) de enseñanza en primaria de dos futuros profesores (E_5 y E_9) de la Licenciatura en Educación Primaria. Los temas fueron asignados por los docentes titulares (tutores) de los grupos de primaria para los que se realizaron las prácticas. Las estrategias de E_5 y E_9 fueron aprobadas por sus mentores en la Normal. Cada práctica duró una hora, y fue videograbada y transcrita para su análisis. La investigadora (*I*) intervino en las sesiones dado que en algunos momentos los normalistas presentaron dificultades con el contenido o de organización de actividades, o para clarificar las participaciones de los alumnos (A_i o *AS*).

Los referentes propuestos por E_5 y E_9 a los alumnos de primaria se caracterizan en la Tabla 1, de acuerdo a la célula de análisis (Ojeda, 2006), la cual también aplicamos a los datos obtenidos de la observación en el aula: referente; ideas fundamentales (combinatoria); otros conceptos matemáticos; recursos semióticos; y términos empleados.

Tabla 1. Caracterización de los diseños de las prácticas (P^i) propuestos por E_5 y E_9.

Criterio	*E_5* (6 alumnos, 2°primaria)	*E_5* (14 alumnos, 3° primaria)	*E_9* (13 alumnos, 4° primaria)
Referentes	**P**[1]: *Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántas cantidades diferentes de tres cifras puedo formar?* [No aclaró si los dígitos debían o no repetirse; tampoco se aclaró la diferencia entre dígito, cantidad y cifra].	**P**[2]: *Danaé tiene tres tipos de guisados y dos tipos de postres. ¿Cuántos platillos diferentes puede formar?* Lección 16. Figuras y colores (SEP, 2011b).	**P**[3]: *Con cuatro cuadrados de cada uno de los siguientes colores: azul, morado, anaranjado, y con cuatro triángulos de cada uno de los siguientes colores: rojo, amarillo y verde, ¿cuántas casitas diferentes se pueden formar?*
Ideas fundamentales	Combinatoria (principio multiplicativo)	Combinatoria (principio multiplicativo)	Combinatoria (principio multiplicativo)
Otros conceptos matemáticos	Dígitos, operaciones básicas (adición)	Operaciones básicas (adición y multiplicación)	Figuras geométricas, operaciones básicas (adición y multiplicación)

Recursos semióticos	[Planteado oralmente] los numerales (1, 3 y 5) en tarjetas	[Planteado oralmente] escrito en el pizarrón, figuras de guisados y postres	[Planteado oralmente] escrito en el pizarrón, cuadrados y triángulos de diferentes colores, tabla de doble entrada
Términos empleados	Cantidades diferentes	Platillos diferentes	Casitas diferentes

Resultados

Combinatoria. En P^1, E_5 no reconoció la permutación con repetición en la respuesta de un alumno de 2° grado y mostró así su inadvertencia de este aspecto en el referente planteado; sólo las permutaciones sin repetición escritas por los alumnos fueron aceptadas por E_5 como respuesta correcta.

A_1: Puedo hacer… el tres cambiarlo por el cinco [traza la flecha que inicia en el tres y termina en el 5] y el cinco va por aquí [señala el uno con su lápiz] y el uno se queda, y se forma el 351 [enseña su cuaderno a I].
I: ¿Cuántas más?
A_1: Hay muchas más, si pone…, podría ser uno, aquí [traza una flecha del 1 del 351 al 3], uno aquí [señala las centenas de 135] pero cambio el 5 en medio y el tres aquí, sería 153.
I: Mmmjú, ¿qué más?
A_1: Es diferente a las otras cantidades.
I: ¿Son todas [refiriéndose a las cantidades escritas por el alumno] o puedes hacer otra?
A_1: Hay otra, trescientos quince [se queda observando su trabajo] sí, me faltó trescientos quince, cambio otra vez el tres [traza la flecha que inicia en el tres y termina en el uno de 153] trescientos quince, pero cambió así [traza una flecha del cinco (del 153) al 3].


Figura 1. Cantidades de tres cifras escritas por A_1 de 2° grado.

Como señalaron Piaget e Inhelder (1951), el niño escribió cinco permutaciones de tres elementos sin seguir un sistema, pero advirtió el rol del cambio de posición.
En P^2, los alumnos de 3er grado identificaron la operación aritmética respectiva para responder correctamente seis platillos diferentes. Para P^3, E_9 no aclaró qué sucedería con la repetición de casas, pero los alumnos (*AS*) de 4° grado sí la advirtieron y decidieron no considerarla:

A_{13}: [Estira la mano tratando de alcanzar las tres casas repetidas]… o que nos sobren, pero también, podemos hacer que éstos [se refiere a las tres casas repetidas] no los contemos.
I: Fuerte [el tono de voz], a ver; ¿qué me dijiste?, ¿qué, qué?
A_{13}: También podemos hacer que éstos [señala las tres casas repetidas], que éstos, no los contemos.
I: ¿Entonces?
A_{13}: Que los saquemos.
I: Entonces, ¿esas tres [refiriéndose a las casas repetidas] entran en la respuesta a la pregunta que se les hizo?
A_{13}: Pues sí, porque […]. No […] ¡no!
I: ¿Por qué no?
A_{13}: Pues […] como ya le dijo mi compañero A_{10}, serían repetidas.
I: Entonces, ¿cuál es la respuesta a la pregunta? ¿Cuántas…?
AS: ¡Nueve!

Durante P^3, los alumnos de 4° grado colorearon las figuras como se les había indicado, construyeron nueve casas distintas y tres repetidas que descartaron; y comprobaron la respuesta de nueve casas distintas al completar una tabla de doble entrada (véase la Figura 4), propuesta por E_9, quien terminó solicitando a los alumnos la operación aritmética que confirmaba que sólo eran posibles nueve casas diferentes:

E_9: [Inaudible] escuchen ya dijimos que son nueve casitas [señala la tabla de doble entrada] y ¿cómo dijimos que sacamos esas nueve casitas con una operación?
A_8: Con una multiplicación; son nueve.
E_9: ¿Cuánto es?
A_8: Tres por tres; nueve.
E_9: Tres por tres; nueve ¿sí? [mira al grupo]. Y ¿por qué eran tres por tres?
$A_{\#}$: Porque eran tres colores de cada figura.

Sin embargo, el recurso de la tabla se ignoró al responder los ejercicios del libro de texto (SEP, 2011c, p. 31), pues los alumnos ya sólo efectuaron la multiplicación respectiva.

Otros conceptos matemáticos. En las tres prácticas, E_5 y E_9 realizaron operaciones aritméticas correctas. En P^1, todos los alumnos de 2° grado identificaron correctamente cantidades de tres cifras (véase la Figura 1). En P^2, los alumnos de 3er grado resolvieron correctamente las multiplicaciones del número de guisados por el número de postres. En P^3, los alumnos de 4° grado multiplicaron erróneamente cantidades de dos cifras al dar respuesta a las preguntas de la lección del libro de texto (SEP, 2011c, p. 31).

Recursos semióticos: En P^1, E_5 presentó cada uno de los tres dígitos en una tarjeta; los alumnos de 2° grado enlistaron en sus cuadernos y en el pizarrón las diferentes cantidades de tres cifras que iban identificando. Un alumno trazó flechas indicando las diferentes posiciones de los dígitos (véase la Figura 1). En P^2, E_5 pegó en el pizarrón y entregó a los alumnos figuras de postres y guisados. Un alumno de 3er grado mostró, a nivel de experiencia (Andrà, 2011), un diagrama de árbol que trazó para identificar los seis menús (véase la Figura 2) y orientó a una compañera para que trazara un diagrama triangular (véase la Figura 3).

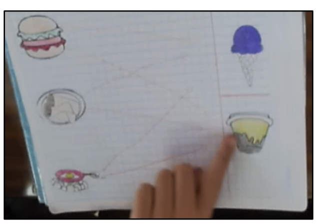

Figura 2. Diagrama de árbol propuesto por un alumno de 3er grado.

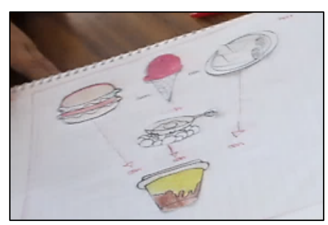

Figura 3. Diagrama triangular por una alumna de 3er grado con orientación de su compañero.

E_5 no previó todas las estrategias de los alumnos (diagrama de árbol) para responder a la pregunta planteada; evidenció así su conocimiento deficiente de las diferentes estrategias de solución a problemas de técnicas de conteo. De acuerdo con Steinbring (1991), por medio del diagrama de árbol y de un diagrama triangular los alumnos de 3er grado reconstruyeron el significado del principio multiplicativo, construido en el aula. Además, el intercambio entre ellos relativo a esos recursos activó su zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 2009).

Los alumnos trazaron figuras y enlistaron (en el pizarrón) las seis posibilidades de los menús que pudieron formar. Para P^3, E_9 enseñó el principio multiplicativo por medio de material concreto (figuras en tarjetas), una tabla de doble entrada (véase la Figura 4) y con la multiplicación (signos aritméticos), en acuerdo con English (2005) en que los problemas combinatorios se prestan a una variedad de estrategias de solución.

Figura 4. Tabla de doble entrada propuesta por E_9.

Términos empleados: En P^1, E_5 solicitó "*diferentes* cantidades de tres cifras", sin aclarar que los dígitos no podían repetirse, como ya señalamos antes; un alumno de 2° grado repitió sólo un dígito cuando la investigadora le preguntó si los dígitos dados se podían *repetir*. En P^2, los alumnos de 3^er^ grado identificaron el término *posibilidades*. En P^3, un alumno de 4° grado empleó el término *posibilidad* al construir las casas:

I: Entonces ¿éstas [señala las casas repetidas], ya no son posibles pegarlas?
A_2: No, ya no.
I: ¿Ya, no?
A_2: Se me acabaron las […]
I: Se acabaron las ¿qué?
A_2: Las posibili…¡ay, no!
I: Las posibilidades [A_1 dice posibilidades en coro con la Investigadora; A_2 se ríe].

En el planteamiento de P^2, E_5 confundió el término "menú" con el de "platillo", lo cual no revistió dificultad alguna para el desarrollo de la actividad.

Referente: Para $\boldsymbol{P^2}$, ni E_5 ni los alumnos de 3^er^ grado presentaron dificultad para comprender como platillo la conjunción de un guisado y un postre. Durante la enseñanza en P^3, E_9 no definió como "casa" la conjunción de un cuadrado y un triángulo. El alumno A_{10} propuso otra forma de casa: "Pero si formas una casa diferente… así de tres cubos juntos como una pirámide… y los juntas así, sería más o menos una mansión".

Comentarios

Los docentes en formación limitaron la enseñanza del principio multiplicativo a identificar la operación aritmética y al llenado de tablas; en acuerdo con Hogarth (2001), esto lo imitaron los alumnos de 4° grado al responder los ejercicios de la lección "Combinaciones" de su libro de texto (SEP, 2011c, p. 31). Los practicantes no previeron todas las posibles respuestas que dieron los alumnos a las preguntas propuestas. Su formación en el principio multiplicativo obliga a considerar una variedad de referentes para tratar los casos con y sin orden, repetición, exclusión, distinguibilidad. También deben incluir la identificación de otras estrategias de solución a los problemas de técnicas de conteo, como el diagrama de árbol.

Fischbein (1975), Heitele (1975) e English (2005) afirman que la enseñanza de técnicas de conteo debe iniciarse en edades tempranas. Con los dos primeros autores señalamos la conveniencia de la enseñanza del trazo del diagrama de árbol y agregamos el uso del término *posibilidades*, dada la evidencia que obtuvimos de alumnos de 3er y 4º grados de que comprendieron sus términos y estrategias para contestar las preguntas de conteo.

Los mentores de los normalistas deben retroalimentar a sus estudiantes acerca del principio multiplicativo y de su enseñanza, identificando los errores que cometieron los practicantes y las dificultades de los alumnos para responder a las tareas que los primeros les plantearon. Los mentores y los practicantes deben identificar las ventajas y desventajas de los recursos semióticos a utilizar según el objetivo perseguido y anticipar las posibles respuestas de los alumnos a las preguntas que se les planteen sobre técnicas de conteo. Es necesario que, juntos, mentores y normalistas analicen en el planteamiento de cada situación a proponer en las prácticas el rol de las palabras para orientar apropiadamente la actividad de los alumnos a los conceptos en foco y disipar posibles ambigüedades. Además, conviene solicitarles a los profesores en formación no sólo el planteamiento de problemas similares a los tratados en la clase, como lo sugiere English (2005), sino relativos a otras técnicas de conteo para que puedan identificar lo característico de cada una.

Referencias bibliográficas

Andrà, Ch. (2011). Preservice primary school teachers' intuitive use of representations in uncertain situations. *Proceedings of the 7th CERME* (Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E., Eds.). University of Rzeszów, Poland, 715-724.

Batanero, C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1997). *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils*. Educational Studies in Mathematics, 32, 181-199.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 88: 89-114.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematic*s. 6(2), 187-205.

Hogarth, R. (2001). *Educar la intuición*. Barcelona: Paidós.

Martínez, A. M. y Ojeda, A. M. (2016). Estrategias que utilizan los docentes en formación para resolver problemas de conteo**.** En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., pp. 973-981.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent : A Privileged Proportion. *Review of Educational Research*. 65(4), pp. 421-481.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* New York: Norton & Company Inc. 1975.

SEP (2011a). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2011b). *Matemáticas, tercer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011c). *Matemáticas, cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012.* México.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vygotsky, L. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* España: Biblioteca de Bolsillo.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós.