

NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE INSTRUMENTAL

Mihály Martínez Miraval, Agustín Curo Cubas
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (Perú)
pcmammar@upc.edu.pe, agustin.curo@upc.pe

Resumen

Esta investigación presenta el análisis de cómo se generó la génesis instrumental de la noción de integral definida en estudiantes universitarios desde el Enfoque instrumental, mediada por el Geogebra. Al contrastar los resultados esperados y obtenidos por medio de la Ingeniería didáctica, se observó que los estudiantes generaron esquemas de utilización de la integral definida al emplearla en la resolución de problemas matemáticos, evidenciando la instrumentalización e instrumentación de dicha noción matemática.

Palabras clave: génesis instrumental, área, integral definida, geogebra

Abstract

This research shows the analysis of how the instrumental genesis of definite-integral notion was generated by university students from the GeoGebra-based Instrumental Approach. When contrasting the expected results to the ones obtained by using Didactic Engineering, we could observe that the students generated schemes to use the definite integral by using it in solving mathematical problems, showing the instruments used and the instrumentation of this mathematical notion.

Key words: instrumental genesis, area, definite integral, geogebra

■ Introducción

La integral definida es uno de los conceptos más relevantes en la enseñanza del Cálculo, pues este contenido aparece en la formación básica de varias especialidades como la de administración a nivel universitario en Perú.

Es frecuente que los libros de cálculo asocien la noción de integral definida al problema de hallar el área de una región R limitada por el eje x y una curva $y = f(x)$, en un intervalo dado, debido a que se desconoce una fórmula de geometría plana para hacerlo o con la intención de mostrar un nuevo proceso de cálculo. La solución propuesta en estos libros para resolver dicho problema, privilegia el manejo algebraico sobre el gráfico, y no permite apreciar el procedimiento dinámico que consiste en aumentar el número de rectángulos, refinándolos cada vez más, cuya suma de áreas tiende al área de la región R ; asimismo, la

orientación para el cálculo de áreas de regiones apunta a la aplicación directa del teorema fundamental del cálculo (Stewart, 2011; Haeussler 2008).

En el capítulo 2 utilizamos los problemas de la recta tangente y la velocidad para introducir el concepto de derivada, que es la idea central en el cálculo diferencial. De la misma manera, este capítulo comienza con los problemas de área y distancia y los utiliza para formular la idea de integral definida, que es el concepto básico del cálculo integral. Veremos en los capítulos 6 y 8 cómo utilizar la integral para resolver problemas relacionados con volúmenes, longitud de curvas, predicciones de una población, registro cardíaco, fuerzas sobre una presa, trabajo, excedente de consumo y el beisbol, entre muchas otras situaciones.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada; veremos en este capítulo que este teorema simplifica en gran medida la resolución de muchos problemas.

Figura 1. Introducción al capítulo Integrales. Extraído de Stewart (2011, p. 359)

Artigue (2002) sostiene que la enseñanza del cálculo integral genera en los estudiantes un mayor dominio algebraico, donde predomina el cálculo de antiderivadas y no la comprensión de los procedimientos. Sin embargo, la autora indica que las experiencias de la ingeniería didáctica, tienden a demostrar que el uso del computador puede generar un equilibrio entre la conceptualización y la algoritmización de conceptos matemáticos, dado que ofrece diversas ventajas didácticas: ayudar a relacionar las representaciones algebraicas y geométricas por la visualización dinámica que proporciona, generar nociones de un concepto matemático a partir de simulaciones interactivas en actividades experimentales, establecer imágenes mentales del objeto matemático y sus propiedades, entre otros.

Para nuestra investigación usamos el software Geogebra que según García-Cuéllar y Salazar (2017), es un ambiente que ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos no solo de geometría sino también de álgebra, análisis y estadística. Es sencillo y fácil de utilizar, lo que facilita desarrollar actividades a través de las herramientas y/o recursos que ofrece. Permite abordar diferentes contenidos de geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, permite la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

Nuestra investigación tiene por objetivo analizar la génesis instrumental de la noción de integral definida mediada por el Geogebra. Para ello utilizamos como marco teórico aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y como marco metodológico, aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995).

■ Aspectos del Enfoque Instrumental

El Enfoque Instrumental aborda la dimensión tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los términos de este Enfoque que consideramos importantes para nuestra investigación son los de artefacto, esquema e instrumento. Según Rabardel (1995), *un artefacto* es un objeto material o simbólico

susceptible para darle un uso; un *esquema* es el resultado de una construcción propia del sujeto cuando realiza una tarea; y un *instrumento* es el conjunto artefacto – esquema de utilización resultante de la acción propia del sujeto.

Para el autor, el instrumento es una entidad compuesta (figura 2) que incluye una componente artefactual (un artefacto, una fracción de artefacto o un conjunto de artefactos) y una componente cognitiva (el o los esquemas de utilización, a menudo relacionados con esquemas de acción más generales).

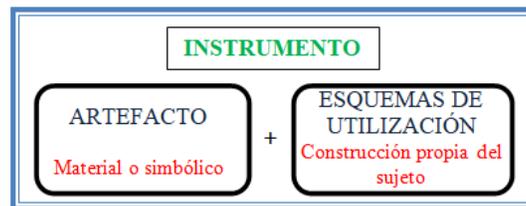


Figura 2. Componentes de un instrumento

Rabardel (1995) afirma que el Enfoque Instrumental estudia los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, a raíz de la generación de esquemas de utilización; a esta transformación la denominó proceso de Génesis Instrumental, la cual consta de:

- Proceso de instrumentalización, que se dirigen hacia el artefacto: selección, ordenamiento, producción e institución de funciones, desvíos, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. hasta la producción integral del artefacto por parte del sujeto.
- Proceso de instrumentación, que es relativo al sujeto: a la emergencia y la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc.

Respecto a los esquemas de utilización, que son esquemas relacionados con la utilización del artefacto, el autor hace referencia a dos dimensiones de la actividad:

- Actividades relativas a las tareas “segundas”, que están orientadas hacia la gestión de las propiedades y características del artefacto. Los esquemas relativos a estas tareas son los *esquemas de uso*.
- Actividades relativas a las tareas “primeras”, que están orientadas hacia el objetivo de la actividad, en donde el artefacto se convierte en un medio de realización. Los esquemas relativos a estas tareas son los *esquemas de acción instrumentada*.

■ Aspectos de la Ingeniería Didáctica.

La Ingeniería Didáctica, en palabras de Artigue (1995), es un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La ingeniería didáctica, como método de investigación, contempla cuatro fases: a) Análisis preliminar, b) Análisis a priori, c) Experimentación y d) Análisis a posteriori y validación. En la tabla 1, se muestra cada una de las fases de la Ingeniería didáctica que usamos en nuestra investigación.

Tabla 1. Fases de la Ingeniería didáctica

Fases	Descripción
Análisis preliminar	En la dimensión epistémica se realizó un estudio de la evolución epistémica de la integral. En la dimensión cognitiva realizamos un estudio de investigaciones cuyo objeto de estudio es la integral definida. En la dimensión didáctica se han analizado los libros de texto que se utilizan en las universidades de Lima - Perú.
Análisis a priori	En la investigación en esta fase realizamos una revisión de los posibles esquemas de utilización que podrían desarrollar los estudiantes en cada una de las actividades propuestas
Experimentación	Se ha realizado la aplicación de la propuesta didáctica. También se aplicó los instrumentos elaborados y se realizó el registro de observaciones de la experiencia.
Análisis a posteriori y validación	Se ha realizado el análisis de los datos recolectados durante los diferentes momentos de la experiencia.

■ Experimento y análisis

A partir de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), diseñamos e implementamos actividades experimentales, mediadas por el Geogebra usando *applets* en base a deslizadores y algunos comandos propios del programa, para que el estudiante los utilice como herramienta para hallar la medida del área. La parte experimental se desarrolló con 10 estudiantes de la carrera de Administración de una universidad particular de Lima – Perú, en un laboratorio con computadoras. A continuación presentamos los análisis a priori y a posteriori de dos de las actividades propuestas.

■ Actividad N° 1:

Abra el archivo Actividad_1.ggb. En la vista gráfica del programa aparece una región R , de área igual a $18,6 \text{ u}^2$, limitada por la gráfica de la función $f(x) = 0,12x^2 + 2$ y el eje X, en el intervalo para $x \in [1;6]$; y dos deslizadores n y n_1 .

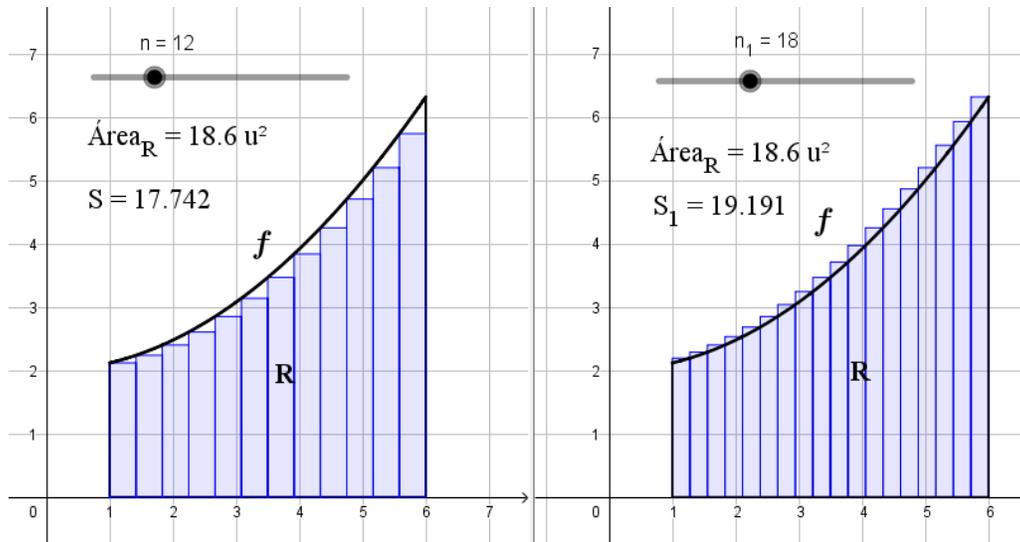


Figura 3. Región R limitada por el eje x y la función f , para $x \in [1;6]$.

- Dibuje cinco rectángulos con el deslizador n y cinco rectángulos con el deslizador n_1 . Luego, utilizando la regla de correspondencia de la función f , halle la suma de las áreas de los rectángulos en cada caso. A medida que n y n_1 aumentan de 1 a 50, ¿qué ocurre con los valores de S y S_1 ? Explique.
- Si se le permitiera cambiar el valor máximo que toman ambos deslizadores (en ambos casos el valor máximo es 50) por otros valores, por ejemplo 100, 500, 1000, 10000, ...; escriba a qué valor se aproximarían S y S_1 , y cuántos rectángulos se necesitarían para llegar a dicho valor.
- A partir de lo desarrollado en esta actividad, ¿explique cómo hallaría el área de la región R ?

A priori, consideramos que los estudiantes no iban a presentar dificultades para reconocer que los deslizadores n y n_1 dibujaban, respectivamente, rectángulos inscritos y circunscritos a la región R , y que S y S_1 daban la suma de las áreas de dichos rectángulos. Asimismo, consideramos que los estudiantes movilizarían esquemas preexistentes como son las nociones de áreas de rectángulos, intervalos y funciones. Luego de la manipulación de los deslizadores dibujando cada vez más rectángulos, se esperaba que generaran esquemas de uso de la aproximación de S y S_1 hacia el área de la región R , tanto numérica como gráficamente, y que generarán esquemas de acción instrumentada de la integral definida, como suma de las áreas de rectángulos cuyo número tiende al infinito.

A continuación, mostramos el análisis a posteriori de uno de los estudiantes cuyo nombre es Andrés. Como se había previsto, al responder correctamente al ítem a), se pudo observar que el estudiante movilizó esquemas como áreas de rectángulos, intervalos y cálculo de imágenes de una función.

Del mismo modo, como se había afirmado a priori, Andrés, al manipular los deslizadores e incrementar el número de rectángulos inscritos y circunscritos a la región R , y responder a las preguntas b) y c), genera el esquema de acción instrumentada de la integral definida, como suma de las áreas de rectángulos cuyo número tiende al infinito, tal y como se muestra en la figura 4.

Si, ambos valores se aproximan a 19.6 (por el programa). Se tendría que calcular aproximando a valores cada vez más altos (tendencia al infinito)

(a)

Calculando la suma de áreas de un número de rectángulos con tendencia al infinito

(b)

Figura 4. Esquema de acción instrumentada de la noción de integral definida. (a) Respuesta a pregunta b. (b) Respuesta a la pregunta c.

■ Actividad N° 2:

Pedro desea revestir la pared de la fachada lateral con madera. Todas las maderas deben tener forma rectangular con bases iguales, y ser colocadas de forma vertical. Los costos que Pedro tendría que realizar se muestran en la tabla:

Compra de madera	Servicio de corte de las maderas a medida
40 dólares por m^2	500 dólares

Pedro ha diseñado el *applet* Actividad 2.ggb que le permitirá observar de forma virtual cómo quedará la fachada con las maderas colocadas. Además le brinda el área que ocupan las maderas en la pared de la fachada.

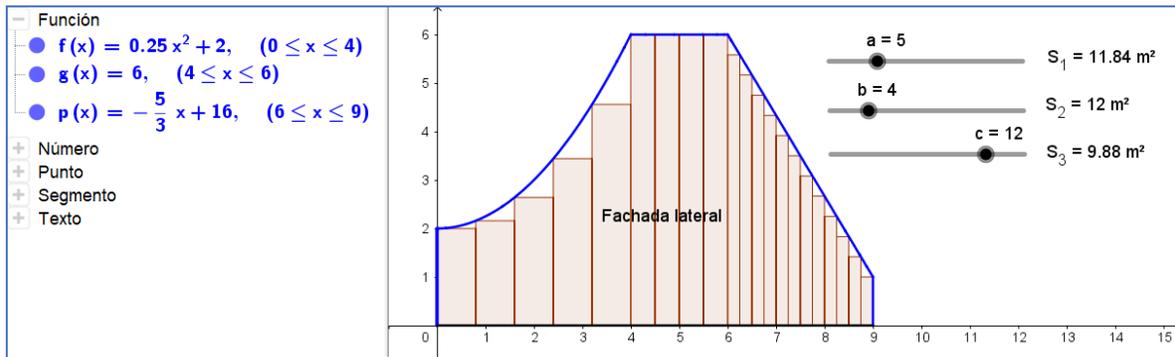


Figura 5. Vista algebraica y vista gráfica de Geogebra de la fachada lateral de una casa.

- ¿Dé un valor aproximado de cuánto le costaría a Pedro colocar maderas de igual base en la pared de la fachada, si desea que los espacios que quedan sin cubrir se reduzcan significativamente? Justifique su respuesta indicando cuántos rectángulos colocaría y por qué eligió ese número. (Para esta pregunta puede modificar los valores de los tres deslizadores).
- Debido a los costos elevados de revestir la pared de la fachada con madera, Pedro decidió pintarla por su cuenta. La pintura que desea comprar se vende en el supermercado a un costo de 18 dólares por m^2 . ¿Exactamente, cuánto gastaría Pedro en pintura? Explique su procedimiento.

A priori, se esperaba que los estudiantes reconocieran la información dada en las vistas gráficas y la función de los deslizadores para el dibujo de rectángulos y el cálculo de la suma de sus áreas, en el contexto de la situación, movilizandolos esquemas de uso, áreas de rectángulos, intervalos, función; y el esquema de acción instrumentada, integral definida. Se esperaba que los estudiantes para la pregunta a), modifiquen el valor máximo del deslizador por otro aún mayor, de modo que se dibujen más rectángulos y se aprecie, a “simple vista”, toda la fachada lateral cubierta, de modo que se halle la suma de las áreas de los rectángulos y luego se calcule el costo total. Para la pregunta c), se esperaba que el estudiante halle el área de la fachada utilizando la integral definida, mediante el comando Integral del Geogebra.

A posteriori, en las acciones de Andrés, se apreció que el estudiante para el ítem b. utilizó sus esquemas de uso de aproximación para reducir los espacios de la fachada lateral y hallar un área aproximada a partir de la suma de áreas de 90 rectángulos; y utilizó la integral definida en el ítem c. para dar respuesta a la pregunta, movilizandolos esquemas de acción instrumentada integral definida, como se puede apreciar en la figura 6.

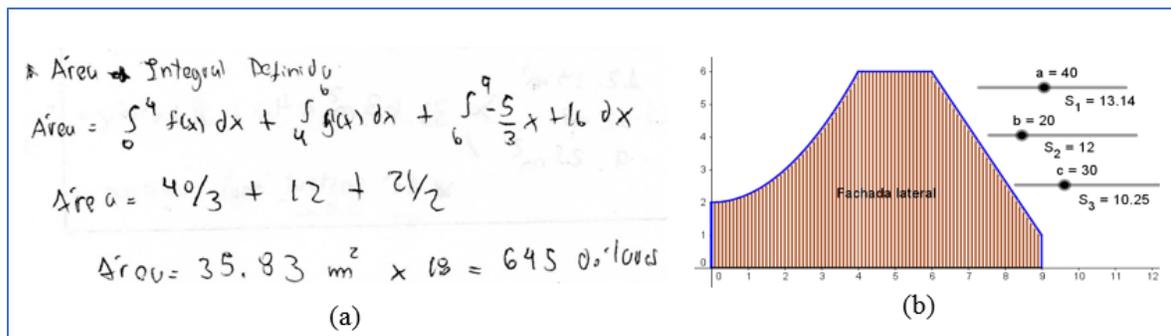


Figura 6. (a) Costo total por pintar la pared. (b) Pared cubierta por 90 maderas.

■ Conclusiones

Los estudiantes movilizaron esquemas preexistentes como áreas de rectángulos, intervalos, funciones y aproximaciones. Sin embargo, hubo estudiantes que presentaron dificultades para identificar la altura del rectángulo con la imagen de la función.

Se generó en el estudiante el esquema de acción instrumentada noción de integral definida, artefacto que se convirtió en instrumento, a partir de los procesos de instrumentalización e instrumentación de dicha noción, poniendo de manifiesto que el estudiante generó la génesis instrumental de la noción de integral definida.

El uso del GeoGebra permitió una mejor interpretación de los procesos seguidos en la construcción del conocimiento. Por las características de sus herramientas, especialmente del arrastre, los estudiantes pudieron observar cómo varían las gráficas y los cálculos numéricos dinámicamente, enfocando su tiempo en la observación, análisis e interpretación de resultados, en vez de destinarlo en gráficas y cálculos repetitivos.

■ Referencias bibliográficas

- Artigue, M., Douady, R, Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá : Grupo editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2002). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.
- García-Cuéllar, D. y Salazar, J.V.F. (2017). *Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra*. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237- 9657, v.6 n.1, pp 68-82, 2017
- Haeussler, E. y Paul, R. (2008). *Matemáticas para administración y economía*. México, D. F.: Prentice Hall.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instrumentns contemporains*. Paris: Armand colin.

Stewart, J. (2011). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas*. México, D. F.: Thomson Editores.