

# EL RAZONAMIENTO IMPLICADO EN EL ESTUDIO DEL MUESTREO. APORTES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA INFERENCIAL

**Amable Moreno**

Universidad Nacional de Cuyo Argentina. (Argentina)

morenoamable6@gmail.com

## Resumen

Estudios realizados sobre el aprendizaje de las muestras aleatorias y el muestreo en diferentes niveles educativos revelan la complejidad de estos tópicos desde la perspectiva de su enseñanza. En este trabajo analizamos el tipo de razonamiento implicado en la construcción del conocimiento estadístico relativo al muestreo; debido a que las ideas que surgen de este análisis son claves para la comprensión de la inferencia estadística. Comenzamos presentamos algunas ideas previas; luego realizamos una revisión bibliográfica de los estudios realizados sobre el razonamiento de los estudiantes en este tópico; y finalmente a modo de conclusión esbozamos algunas sugerencias para su enseñanza haciendo uso de la tecnología. De esta manera promovemos el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes en el muestreo, tan necesario para poder evaluar críticamente las declaraciones basadas en datos.

**Palabras clave:** muestreo, variabilidad muestral, razonamiento estadístico

## Abstract

Studies on the learning of random samples and sampling at different educational levels show the complexity of these topics from their teaching perspective. In this paper we analyze the reasoning type involved in the construction of statistical knowledge related to sampling; due to the fact that the ideas that emerge from this analysis are essential for statistical inference understanding. We begin with some previous ideas; then, we review bibliography related to the studies carried out on the students' reasoning on this topic; to conclude, we outline some suggestions for its teaching by using technology. In this way we promote the development of students' statistical reasoning in sampling, which they need to be able to critically evaluate data-based statements.

**Key words:** sampling, sample variability, statistical reasoning

## ■ Introducción

La información contenida en los datos que aparecen en la vida cotidiana y profesional de las personas, nos obliga a orientar la enseñanza de la estadística hacia el análisis de la información para la toma de decisiones desde la perspectiva de la construcción del conocimiento estadístico. Esta forma de entender la formación de los estudiantes favorece el desarrollo de las competencias necesarias para evaluar críticamente las declaraciones basadas en los datos. Este enfoque de la enseñanza de la estadística se

potencia con la incorporación de los recursos informáticos disponibles en la web, y que están al alcance de todos los estudiantes; como es el software R de distribución libre.

Partimos de la idea de que el núcleo de la estadística consiste en tomar muestras representativas de una población y hacer inferencias sobre características poblacionales desconocidas. Lo que nos lleva a considerar las ideas centrales del muestreo: representatividad muestral y variabilidad muestral; que deben ser comprendidas y cuidadosamente balanceadas para el estudio de la estadística inferencial.

Para Rubin, Bruce y Tenney (1990) el exceso de confianza en la representatividad del muestreo lleva a los estudiantes a pensar que una muestra nos dice todo acerca de una población, mientras que la dependencia en la variabilidad del muestreo lleva a los estudiantes a creer que una muestra no nos dice nada útil de una población. Los estudiantes debe tener la oportunidad de encontrar el equilibrio entre la representatividad y la variabilidad (Shaughnessy, 2007). Es decir que, debemos ayudar a desarrollar las ideas del lenguaje probabilístico necesarias para articular “esta muestra no me dice nada, esta muestra me dice todo, esta muestra me dice algo”.

Los estudiantes, en general, están familiarizados con la idea de muestra y tienen un sentido bastante bueno de que cada muestra puede diferir de otras muestras extraídas de la misma población; sin embargo, tienen dificultades para hacer la transición al significado estadístico formal de muestra aleatoria (Watson y Moritz, 2000). También tienen dificultad en la comprensión del comportamiento de todas las muestras aleatorias cuando se estudian ciertos estadísticos, y cómo se relacionan los estadísticos con la población; en particular cuando se consideran los estadísticos en una distribución de muestreo.

A pesar de que el muestreo y la distribución del muestreo son temas importantes y presentan cierta dificultad para los estudiantes, no existe suficiente investigación sobre el mismo en comparación con otros conceptos estadísticos.

### ■ Marco conceptual

Para Saldanha y Thompson (2002); Wild y Pfannkuch (1999) aprender a razonar sobre las muestras y el muestreo implica establecer diferencias entre muestras y poblaciones; reconocer similitudes y diferencias entre las múltiples muestras tomadas de una población y examinar distribuciones de estadísticos muestrales. Para Garfield y Ben-Zvi (2008), el estudio de las distribuciones de las medias muestrales para muchas muestras de una población nos permite ver como una muestra se compara con el resto de las muestras, lo que nos lleva a determinar si una muestra es poco probable o no. También comparando las medias de todas las muestras aleatorias de la misma población podemos construir la idea de variabilidad en el muestreo; un componente de la inferencia estadística.

La idea de muestra y distribución muestral se construye sobre varios conceptos fundamentales de la estadística, y si estos conceptos no se comprenden en profundidad, los estudiantes nunca llegarán a comprender las ideas importantes del muestreo. Por ejemplo, las ideas de distribución y variabilidad subyacen a la idea de variabilidad muestral y distribución muestral. La idea de centro, es decir promedio, es también involucrada en la comprensión de la media de la distribución muestral; como así también la idea de modelo; como la distribución normal, que es el modelo que ajusta las distribuciones muestrales bajo ciertas condiciones. También, son importantes las ideas de aleatoriedad y probabilidad, las que no

siempre son comprendidas fácilmente, como ocurre con los estudiantes para profesor de matemáticas y de biología (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014; 2015). Finalmente, el tamaño de la muestra se relaciona con la ley de los grandes números, de hecho las muestras más grandes representan mejor a la población de la cual fueron extraídas, y los estadísticos muestrales están más cerca de los parámetros. De acuerdo con lo expresado, las ideas relativas a muestras y muestreo, como así también sus interrelaciones con otros conceptos claves, son de suma importancia, cuando se pretende realizar inferencias estadísticas confiables (Bakker, 2004).

Para que los estudiantes entiendan qué es el razonamiento estadístico y como funciona, es conveniente partir del análisis de los resultados que brindan las simulaciones computacionales, las que proporcionan una base conceptual que les permitirá comprender el tratamiento formal de los métodos estadísticos.

### ■ Indagación bibliográfica

Entre los estudios realizados sobre muestras y muestreo, podemos mencionar el trabajo de Tversky y Kahneman (1971), quienes han sugerido en un artículo sobre “Creencias en la ley de los pequeños números”, que: “Las personas tienen intuiciones fuertes sobre el muestreo aleatorio; y que estas intuiciones están equivocadas en aspectos fundamentales; que son compartidas por sujetos ingenuos y por científicos capacitados, que cuando las aplican producen consecuencias desafortunadas en el curso de la investigación científica” (p. 24). Estos autores afirman que, las personas ven una muestra tomada al azar de una población altamente representativa. En consecuencia, esperan que cualquier par de muestras tomadas aleatoriamente de la misma población sean similares entre sí.

Desde que se publicó este artículo, algunos investigadores han examinado y descripto las dificultades de los estudiantes en la comprensión de muestras aleatorias, variabilidad muestral, distribución muestral y el teorema del límite central. Así encontramos que Well, Pollatsek y Boyce (1990) han señalado que las personas a veces razonan correctamente sobre el tamaño muestral y otras veces no; por ejemplo, en ocasiones consideran que muestras grandes representan mejor a la población; y otras veces piensan que muestras grandes y muestras chicas representan bien a la población. Para revelar las razones de esta discrepancia, ellos realizaron una serie de experimentos, donde les hicieron preguntas que involucraban el razonamiento sobre muestras y variabilidad muestral. Los investigadores encontraron que los estudiantes usaron tamaños muestrales apropiados dependiendo de las preguntas; por ejemplo, cuando les preguntaron ¿cuál es el tamaño muestral más preciso? contestaron correctamente; pero no ocurrió lo mismo cuando la pregunta se refería a qué muestras deberían recoger para producir un valor en la cola de la distribución poblacional; los investigadores afirmaron que los estudiantes no comprendían la variabilidad de las medias muestrales. Además, notaron que los estudiantes no detectaron diferencias entre las distribuciones muestrales para muestras grandes de las distribuciones para muestras pequeñas; concluyendo que las intuiciones estadísticas de los estudiantes no siempre son correctas, pero se pueden desarrollar concepciones correctas a través del diseño cuidadoso de la instrucción.

En una serie de estudios, Sedlmeier y Gigerenzer (1997) encontraron que cuando los estudiantes tienen una buena comprensión del efecto del tamaño muestral, los estudiantes no tienen dificultades en la determinación de la distribución muestral de un estadístico a partir de muchas muestras. Sedlmeier (1999) continuó con esta investigación y encontró que si cambiaba los ítems que requerían considerar

distribuciones muestrales por otros que requerían distribuciones de frecuencias, se obtuvieron un alto porcentaje de respuestas correctas.

Watson y Moritz (2000) estudiaron las ideas intuitivas sobre muestras de los alumnos de una escuela elemental; y señalan que mientras los estudiantes tienen buenas ideas acerca de lo que es una muestra, ellos tienen dificultad para hacer la transición al significado estadístico y las connotaciones relacionadas. Por ejemplo, los estudiantes pueden hacer generalizaciones apropiadas de una pequeña muestra de comida a la entidad más grande de la cual se extrajo, pero estas ideas intuitivas no generalizan la noción de variabilidad muestral y la necesidad de extraer muestras grandes, como así tampoco la necesidad de que la muestra sea aleatoria. Estos autores sugieren hacer explícitas estas diferencias, por ejemplo entre tomar una muestra chica de comida la cual representa a una entidad homogénea, con la muestra de la población de los estudiantes para estimar una característica como puede ser la altura, la cual tiene variabilidad.

Por otra parte, Saldanha y Thompson (2002) encontraron en un experimento de enseñanza, que si se presenta y usa el concepto de muestreo como parte de un proceso repetido, con variabilidad de muestra en muestra, esta estrategia favorece la comprensión de lo que es una distribución, la cual es necesaria para comprender las distribuciones muestrales. Continuando con este trabajo, estudiaron el razonamiento de estudiantes de secundaria sobre muestras y distribuciones muestrales. Estos investigadores encontraron que los estudiantes usaban una estrategia aditiva en el cálculo de la probabilidad de una muestra aleatoria. Estos autores sugieren la necesidad de distinguir entre tres niveles de los datos: la distribución de la población, la distribución de la muestra y la distribución muestral de un estadístico.

Posteriormente, Watson (2004) en una investigación sobre razonamiento en el muestreo, describe como los estudiantes a menudo, para ser justos, prefieren un muestreo sesgado, como puede ser un muestreo voluntario, porque no confían en el muestreo aleatorio como proceso que produce muestras “justas”.

Bakker (2004) en un experimento con estudiantes de octavo grado, logró que los estudiantes comprendieran que las muestras grandes son más estables y representan mejor a la población; usando una secuencia de muestras de tamaño creciente. De esta manera los estudiantes fueron inducidos gradualmente a incrementar el tamaño muestral hasta que tomaban toda la población; y para cada muestra los estudiantes fueron interrogados para hacer inferencias informales. Este enfoque es apropiado para lograr un razonamiento coherente con conceptos estadísticos claves, como la distribución, la variabilidad, la tendencia y el muestreo. Además, es una herramienta pedagógica útil para lograr el decrecimiento de la variabilidad en muestras de tamaño creciente (Ben-Zvi, Aridor y Bakker; 2012).

delMas, Garfield y Chance (2004) enumeran las siguientes creencias de los estudiantes en razonamiento sobre distribuciones muestrales:

- La distribución muestral debería verse como la población ( $n > 1$ )
- Las distribuciones muestrales para muestras de tamaño grande y chico tienen la misma variabilidad.
- Las distribuciones muestrales para muestras grandes tienen más variabilidad.
- Una distribución muestral no es la distribución de un estadístico muestral
- Una muestra, de datos reales, se confunde con todas las muestras posibles, en distribución, o potenciales muestras.
- La ley de los grandes números (muestras grandes representan mejor a la población)

- es confundido con el teorema del límite central ( distribuciones de medias para
- muestras grandes tienden a la distribución normal)
- La media de una distribución con asimetría positiva será más grande que la media
- de la distribución muestral de muestras grandes tomadas de la población
- considerada.

Para confrontar las concepciones erróneas y construir un razonamiento sólido sobre muestras y distribuciones muestrales, educadores e investigadores han recurrido al uso de herramientas interactivas tecnológicas (Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina, 2007) para ilustrar los procesos abstractos involucrados en muestreo repetido de poblaciones.

Lane-Getaz (2006) proporciona un modelo visual en su denominado Modelo del proceso de simulación. Este modelo fue adaptado por Garfield y Ben-Zvi (2008) y lo llamaron “Simulación de muestras” (SOS). Este modelo distingue entre el primer nivel de datos (población), muchas muestras aleatorias de la población (nivel 2) y la distribución de los estadísticos muestrales (nivel 3).

Moreno, A. (2017) en un estudio con estudiantes universitarios encontró dificultades en el concepto de muestra aleatoria, que se vio reflejado en la incorrecta enumeración de todas las muestras de igual tamaño de una población dada, debido a la falta de razonamiento combinatorio; y además encontró dificultades en la determinación de la probabilidad de una muestra, al identificar la idea de muestra aleatoria con la de subconjunto de la población.

## ■ Conclusiones

Estudios realizados sobre el aprendizaje de las muestras aleatorias y el muestreo en diferentes niveles educativos, revelan las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de estas ideas. Esto se debe en gran medida a la multiplicidad de conceptos abstractos intervinientes y a sus relaciones; como así también a la falta de estrategias didácticas que involucren a la tecnología. Concluimos que para ayudar a los estudiantes a desarrollar ideas sobre el muestreo se requiere de bastante tiempo, mucho más del asignado en el curriculum de las distintas carreras; idea que ha sido señalada por otros autores como Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011). Los estudiantes necesitan experimentar auténticas situaciones, tomando muestras y aprendiendo como las muestras representan o no a la población. Estas experiencias pueden incluir colecciones de datos de encuestas y de experimentos, donde aprendan las características de las buenas muestras y las razones que hacen que algunas no sean buenas muestras y puedan crear modelos usando herramientas de simulación para estudiar la relación entre muestra y población. Estas experiencias pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar una profunda comprensión del muestreo y de la inferencia informal.

Debemos comenzar por lograr que los estudiantes reconozcan la importancia de tomar muestras aleatorias simples; luego logren comparar diferentes muestras tomadas de la misma población, observando la forma, el centro y la extensión, lo que les permitirá la construcción de la idea de variabilidad muestral. Además, las simulaciones computacionales pueden ayudarlos a comprender que una muestra suficientemente grande proporciona información casi exacta de la distribución de la población. Finalmente, podrán concluir que cuando el tamaño de la muestra aumenta, los estadísticos muestrales tienden a los parámetros poblacionales. Con la ayuda de los recursos tecnológicos, la visualización de las distribuciones

correspondientes en cada caso, y donde el cálculo no sea un obstáculo; se genera un contexto propicio para la comprensión de las ideas relativas al muestreo.

A pesar de los numerosos recursos informáticos que existen para hacer estos conceptos difíciles más concretos (Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Maker, 2013), y a pesar que los diseños curriculares presentan estos tópicos; no hay suficiente investigación sobre las formas que permiten apoyar efectivamente y eficientemente la emergencia del razonamiento estadístico de los estudiantes; y cómo evaluarlos. Tampoco se conoce mucho sobre la comprensión de los profesores sobre estos temas, ni qué estrategias didácticas son suficientemente idóneas para lograr en los estudiantes el desarrollo de estas ideas.

### ■ Referencias bibliográficas

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.
- Ben-Zvi, D., Aridor, K., y Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 44(7), 913-925.
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., y Maker, k. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. In M.A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education (pp.643-690)*. New York: Springer.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1).
- delMas, R.C., Garfield, J., y Chance, B. (2004). *Using assessment to study the development of students' reasoning about sampling distributions*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.
- Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Lane-Getaz, S.J. (2006). What is statistical thinking, and how is it developed? In G.F. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning about data and chance: Sixty-eight NCTM Yearbook (pp. 273-289)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Moreno, A. (2017). Dificultades en la comprensión del concepto de muestra aleatoria simple en estudiantes universitarios. Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Investigación Matemáticos. En J.M Contreras, P. Arteaga, G.R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M.M. López-Martín (Eds), *Actas del Segundo Congreso Internacional sobre el Enfoque Ontosemiótico*. ISBN: 978-84-617-9047-0
- Moreno, A., Cardeñoso, J.M., y González-García, F. (2015). Los significados de la probabilidad en los profesores de matemática en formación: un análisis desde la teoría de los modelos mentales. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 1320-1327. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISSN: 2448-6469

- Moreno, A., Cardeñoso, J.M., y González-García, F. (2014). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 1963-1972. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Rubin, A., Bruce, B., y Tenney, Y. (1990). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, Vol. 1, 314-319. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Saldanha, L.A., y Thompson, P.W. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, 5(3), 257-270.
- Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning: Theoretical models and practical implications*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sedlmeier, P., y Gigerenzer, G. (1997). Intuitions about sample size: The empirical law of large numbers. *Journal of Behavioral Decision Making*, 10(19); 33-51.
- Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F.K.Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 957-1009. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Tversky, A., y Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, 76(2), 105-110. (reimpreso en D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (1982) *Judgment under uncertainty: Heuristics an biases*. Cambridge University Press.
- Watson, J.M. (2004). Developing reasoning about samples. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 277-294). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Watson, J.M., y Moritz, J.B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 44-70.
- Well, A.D., Pollatsek, A., y Boyce, S.J. (1990). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Journal of Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 47(2), 289-312.
- Wild, C.J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- Wild, C.J., Pfannkuch, M., Regan, M., & Horton, N.J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, 174(2), 247-295.