Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

PRAXEOLOGIAS EXISTENTES PARA O ENSINO DA NOÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Sirlene Neves de Andrade, Marlene Alves Dias
Secretaria de Educação de São Paulo, UNIAN. (Brasil)
sirlene-neves@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a ferramenta de análise construída para identificar as praxeologias existentes para o desenvolvimento da noção de função exponencial no Ensino Médio e verificar se essas estão em conformidade com o que se espera como conhecimento prévio no início do Ensino Superior. Para sua construção, escolhemos como referencial teórico as noções de quadro e mudança de quadros, a Teoria Antropológica do Didático e a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes. Concluímos que existe uma preocupação em propor situações que possam ser utilizadas por professores, levando em conta os conhecimentos prévios dos estudantes, mas que podem dificultar sua aplicação posterior.

Palavras-chave: função exponencial, quadro, ostensivos e não ostensivos, níveis de conhecimento

Abstract

In this paper, we show an analysis tool which was made to identify the existing praxeologies for the development of the notion of exponential function in High School, as well as to verify if such praxeologies are in accordance with what is expected as previous knowledge at the beginning of Higher Education. For its construction, we chose as theoretical reference the notions of square and change of squares, the Anthropological Theory of Didactics and the notion of the levels of knowledge expected in the students. We conclude that there is concern on the proposal of situations that can be used by teachers, taking into account the previous knowledge of the students, but that may hinder its subsequent application.

Keywords: exponential function, framework, ostensive and non ostensive, knowledge levels.

Introdução

Este trabalho é parte do projeto sobre o estudo da transição entre a Educação Básica e o Ensino Superior, cuja proposta é investigar as questões associadas a essa transição para as noções matemáticas que são, em geral, desenvolvidas nos quadros da Álgebra, Álgebra Linear, Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral.

O objetivo desta pesquisa é identificar as praxeologias existentes para o desenvolvimento da noção de função exponencial no Ensino Médio e verificar se essas estão em conformidade com o que se espera como conhecimento prévio mobilizável e/ou disponível no início do Ensino Superior.

Observamos inicialmente que Gueudet (2008) apresenta uma revisão da literatura de Educação Matemática sobre a transição Ensino Médio e Superior. Nesse trabalho, a autora parte da seguinte questão: "Quando a transição acontece?" De acordo com a autora, não existe uma resposta simples para essa questão e, além disso, é preciso considerar, por exemplo, os diferentes contextos, culturas e escalas de tempo. Isso nos conduziu a centrar nosso olhar sobre a instituição, em particular, observando as técnicas e suas explicações, quando as mesmas são trabalhadas no Ensino Médio.

Considerando a noção de função exponencial, que no Brasil, em geral, é introduzida no Ensino Médio, escolhemos analisar as organizações matemáticas que estão associadas ao conteúdo a ser desenvolvido e as organizações didáticas que correspondem às propostas institucionais possíveis para trabalhar um determinado conteúdo, incluindo as estratégias, diferentes abordagens e formas de trabalho com os estudantes para uma determinada etapa escolar.

Para isso, escolhemos como referencial teórico para o desenvolvimento da pesquisa as noções de quadro e mudança de quadro de Douady (1984, 1992), a abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1998) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992, 1994, 2015) e Bosch e Chevallard (1999), em particular as noções de relação institucional e pessoal, organizações praxeológicas ou praxeologias e ostensivos e não ostensivos.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujas análises foram realizadas em documentos contemporâneos que são utilizados por professores e estudantes. Para isso, seguimos o método da pesquisa documental, segundo Lüdke e André (2013) e construímos uma grade de análise inspirada em Dias (1998).

Os resultados das análises mostram que nem sempre existe uma coerência em relação às propostas institucionais de utilização de uma mesma tarefa nas diferentes etapas escolares que podem auxiliar professores e estudantes do Ensino Médio e Superior a revisitar o trabalho realizado em etapas anteriores, utilizando esses conhecimentos como conhecimentos prévios disponíveis para a introdução dos novos conceitos.

Referencial teórico

Como destacado anteriormente, nossa fundamentação teórica se desenvolve principalmente na TAD, porém com a sustentação de outras abordagens teóricas.

Da TAD, consideramos sua primeira noção fundamental: a noção de *objeto o* que, para Chevallard (1992, 1998, 2015), corresponde a toda entidade, material ou imaterial que existe para pelo menos um indivíduo. Isso lhe permite considerar a segunda noção fundamental, que é a de relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o, que equivale à expressão pela qual designamos o sistema – representado por $R(x,o)$ –, de todas as interações, sem exceção, que x pode ter com o objeto o, ou seja, x pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele etc.

A partir da segunda noção, é considerada a terceira noção fundamental, que é a de ***pessoa***, que é definida pelo par formado por um indivíduo x e o sistema de relações pessoais $R(x,o)$ num dado momento da história de x.

Na sequência, o autor introduz a quarta noção fundamental – a de *instituição* –, explicitando que as instituições são obras de tipo particular, ou seja, uma instituição é um dispositivo social "total", que pode ter somente uma extensão reduzida no espaço social (existem microinstituições), mas que permite e impõe a seus sujeitos, isto é, às pessoas que vêm ocupar diferentes posições oferecidas na instituição *I,* envolvendo maneiras próprias de fazer e, mais amplamente, adotando praxeologias determinadas.

Assim, a "teoria do conhecimento" esboçada para os indivíduos é transferida às instituições, ou seja, dado um objeto *o*, uma instituição *I* e uma posição *p* em *I*, o autor denomina *relação institucional de o em posição p*, e a indica por $R_I(p,o)$ a relação com o objeto *o* que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de *I* em posição *p*.

Para o estudo das relações institucionais e pessoais, fomos conduzidos a considerar a noção de *organização praxeológica, ou praxeologia* que, conforme Bosch et Chevallard (1999), corresponde aos *tipos de tarefas* (*T*) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer, denominada *técnica* (τ). A associação tarefa-técnica é definida como um saber fazer que não sobrevive isoladamente, solicitando um ambiente tecnológico-teórico que equivale a um saber formado por uma tecnologia ou discurso tecnológico (θ) – ou seja, um discurso racional que justifica a técnica e a torna compreensível – e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto por tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria $[T, \tau, \theta, \Theta]$, que corresponde ao saber. A base de toda praxeologia é constituída por um sistema de tarefas em torno das quais se desenvolvem e se organizam técnicas, tecnologias e teorias.

Chevallard (1994), ao considerar que em toda atividade humana somos chamados a realizar diferentes tipos de tarefas e que para estas existe uma técnica, apresenta as questões: De que é feita uma técnica? De que ingredientes se compõem? Em que consiste a "execução" de uma técnica?

Isso o conduz a distinguir dois tipos de objetos: *os ostensivos e os não ostensivos*. Os primeiros são objetos que têm para nós uma forma material ou sensível. Exemplos: objetos materiais (caneta, compasso etc.); gestos (*ostensivos gestuais*); palavras, e mais genericamente o discurso (*ostensivos discursivos*); esquemas, desenhos, grafismos (*ostensivos gráficos*); escritas e formalismos (*ostensivos escriturais*).

A característica dos ostensivos é que eles podem ser manipulados, não só no sentido tátil estrito (como um compasso, uma caneta etc.), mas também em sentido amplo (pela voz, pelo olhar etc.). Ao contrário, os objetos *não ostensivos*, que denominamos usualmente noções, conceitos, ideias etc., não podem ser manipulados, mas só evocados por manipulação dos ostensivos associados. Chevallard (1994) observa que existe uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois os primeiros são *manipulados* por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto estes últimos são *evocados* por meio da manipulação dos ostensivos.

Além das noções da TAD, recorremos à noção de quadros de Douady (1992), a qual afirma:
[...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady, 1992, p. 135).

Douady (1984, 1992) define ainda as *mudanças de quadro* como meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e possibilitam utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas à formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, permitindo assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho.

Ressaltamos que a noção de quadros nos dá subsídio para compreender como e em qual quadro a noção de função exponencial está inserida nas duas instituições que analisamos, isto é, o Ensino Médio e Superior.

Observamos ainda que, para introduzir a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes é preciso considerar a noção de níveis de conceituação definidos por Robert (1997), os quais são definidos como os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual. Muitas noções matemáticas podem ser abordadas em vários níveis de conceituação, sempre parcialmente encaixados, sendo que os objetos iniciais mudam, tornando-se mais gerais, o que propicia introduzir novas estruturas, mais ricas, requerendo, no entanto, um novo formalismo. Em geral, os exercícios ditos teóricos de determinado nível correspondem aos teoremas do nível seguinte. Dessa forma, várias ordens de apresentação são sempre possíveis, inexistindo uma hierarquia absoluta entre esses níveis, que, pelo menos durante os estudos, dependem apenas do ensino efetivo.

Após observar a relatividade dos conhecimentos matemáticos no que tange ao campo conceitual em que se encontram, destacamos o que Robert (1998) intitula níveis de conhecimento esperados dos estudantes. Os níveis nos proporcionam uma nova ferramenta de análise, que nos auxilia a classificar os tipos de tarefas em relação ao trabalho esperado dos estudantes, a saber: os níveis técnico, mobilizável ou disponível. Esses níveis são relativos a um determinado nível de conceituação.

Sendo assim, segundo a autora, os tipos de tarefas de *nível técnico* são aquelas que funcionam de maneira mais isolada, local e concreta, isto é, tarefas que são explícitas em sua composição, ou seja, é direta a identificação de qual noção deve ser utilizada na busca da resolução. No que se refere ao *nível mobilizável*, este é mais amplo que o anterior, pois existe um início de relação entre diversos saberes de um determinado campo da Matemática, vários métodos podem ser mobilizados, os caracteres, ferramenta e objeto são considerados, além disso, a noção a utilizar está explícita na tarefa. Se um saber é identificado, ele é dito mobilizável se é acessível, se o estudante o utiliza corretamente. Por fim, temos o *nível disponível* que corresponde a saber resolver o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros (relacionar), aplicar métodos não previstos.
Após esta rápida exposição do referencial teórico da pesquisa, descrevemos o percurso metodológico deste trabalho.

Metodologia

A metodologia escolhida para desenvolver essa pesquisa é a qualitativa, centrada no método da pesquisa documental em conformidade com Lüdke e André (2013), uma vez que nossas fontes são documentos institucionais, portanto, utilizamos a técnica de análise de documentos retrospectivos e contemporâneos, a saber: livros didáticos e macroavaliações, que correspondem a materiais habitualmente usados por professores e estudantes.

Para tal, construímos uma grade de análise, inspirada na grade de Dias (1998), que serviu de instrumento para identificar as organizações matemáticas e didáticas. Essa grade foi construída considerando o referencial teórico escolhido para a pesquisa.

A finalidade da grade é analisar as diferentes formas de organizações matemáticas e didáticas existentes via livros didáticos para identificar as relações institucionais que atualmente sobrevivem no processo de ensino e aprendizagem da noção de função exponencial no Ensino Médio. Identificação das praxeologias usuais privilegiadas que podem ser consideradas como novas formulações nas diferentes etapas escolares, isto é, as diferentes técnicas que viabilizam trabalhar as novas formulações.

Apresentamos, a seguir, um exemplo específico da grade utilizada para identificar as praxeologias usuais. A tarefa escolhida é a privilegiada em todas as obras do Ensino Médio, sendo que, em geral, são tratados apenas os gráficos das funções $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 3^x$e $y = 3^{-x}$. Os outros casos ficam a cargo de professores e estudantes.

Tipo de tarefa: Esboçar o gráfico cartesiano da função exponencial de domínio IR.

Exemplo: Esboce o gráfico cartesiano de domínio IR de $y = 3^x$.
Técnica(s): A técnica consiste em aplicar a definição de potência para determinar as coordenadas dos pontos pertencentes ao sistema cartesiano, os quais, unidos, formam a curva do gráfico solicitado.

Tecnologia: Consiste em elaborar uma tabela de dupla entrada, escolhendo valores para a variável x e determinando y de forma que os mesmos satisfaçam a função $y = 3^x$, na qual x pertence ao domínio da função. Em seguida, é preciso representar num plano
cartesiano os pontos encontrados. Desse modo, são necessárias as noções de: valor numérico de uma função, sistema cartesiano ortogonal e coordenadas de um ponto e como representá-lo neste sistema, propriedades da função exponencial e suas representações.
Teorias: O conjunto de números reais e suas propriedades, sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais no plano enfatizando as noções de abscissa e ordenada, funções, suas propriedades e representações.
Quadro(s) em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico.
Quadro(s) de solução da tarefa: numérico.
Ostensivos de representação escrita: representação na forma de potência algébrica explícita e representação gráfica.
Não ostensivos associados: noção de potência de expoente real, noção de número real, suas operações e propriedades, noção de plano cartesiano, as noções de abscissa e ordenada, noção de coordenadas cartesianas, noção de função exponencial, noção de gráfico de uma função exponencial.
Nível de conhecimento esperado dos estudantes: É preciso dispor de conhecimentos sobre definição de potência, cálculo do valor numérico de uma função e construção de gráficos no plano cartesiano.

Alguns resultados

As análises das organizações matemáticas e didáticas conduziram à identificação de uma dificuldade teórica, quando da definição de função exponencial, que em geral é apresentada no Ensino Médio por meio de um caso particular, isto é, considerando seu contradomínio como o conjunto dos números reais positivos e diferentes de zero.

Observamos aqui que esta escolha didática dificulta a compreensão e a aplicação da função exponencial em outros domínios da Matemática, em particular, em Cálculo Diferencial e Integral, que corresponde a um domínio para o qual poderíamos utilizar, por exemplo, a função exponencial como conhecimento prévio disponível desenvolvido no Ensino Médio para a introdução das assíntotas horizontais.

Observamos que encontramos apenas seis tipos de tarefas sobre a noção de função exponencial e em todas elas eram dadas funções definidas do conjunto dos reais nos conjuntos dos reais positivos e diferentes de zero (caso particular).

Os tipos de tarefas apresentados na sequência correspondem àqueles que compõem as praxeologias desenvolvidas no Ensino Médio no Brasil.

T1: Classificar em crescente ou decrescente a função definida por meio do ostensivo algébrico explícito (por exemplo: $y = 2^x$).

T2: Identificar e/ou determinar a lei de formação da função exponencial de uma situação enunciada por meio do ostensivo de representação em língua natural.

T3: Calcular valores numéricos para uma função exponencial dada.

T4: Esboçar o gráfico cartesiano da função exponencial de domínio IR e contradomínio IR_+^* (conjunto dos números reais positivos e maiores que zero).

T5: Classificar em crescente ou decrescente a função definida pela sua representação gráfica cartesiana.

T6: Identificar a lei de formação de uma função exponencial do tipo$y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ por meio de uma representação gráfica cartesiana (passagem do ostensivo gráfico para o ostensivo algébrico).

Ressaltamos aqui que, ao definir a função exponencial considerando apenas o caso particular em que o contradomínio é o conjunto dos números reais positivos e diferentes de zero, as praxeologias existentes nos livros didáticos avaliados e indicados pelo Ministério da Educação tornam-se diferentes das pedidas nas macroavaliações de acesso no Ensino Superior, como foi possível constatar na tarefa da figura1 da prova da FUVEST – 2011, o que já representa uma dificuldade para sua aplicação em outras tarefas já no Ensino Médio.

Seja f(x) = a+2^{bx+c}, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semireta]–1, ∞[e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1, 0) e $(0, -\frac{3}{4})$. Então o produto a.b.c vale: a) 4 b) 2 c) 0 d) –2 e) –4

Figura 1. Tarefa sobre função exponencial da prova da primeira fase da FUVEST – 2011

A análise dos livros de Cálculo Diferencial e Integral, que são geralmente indicados no Ensino Superior, mostrou que a noção de função exponencial não é revisitada nesta etapa escolar, o que nos levou a considerá-la como um conhecimento prévio disponível.

Contudo é preciso ressaltar que as funções exponenciais utilizadas na introdução de novos conceitos e noções no Ensino Superior ultrapassam as definidas apenas para o caso particular introduzido no Ensino Médio, o que está de acordo, por exemplo, com as exigências institucionais da prova da FUVEST, que é um exame de admissão para a universidade de São Paulo.

Isso mostra um descompasso entre o que se desenvolve no Ensino Médio e o que se espera enquanto conhecimento prévio disponível no Ensino Superior. Esse descompasso conduz a uma dificuldade na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que tem sido constantemente constatada pelos professores, e que podemos supor estar associada a uma falta de articulação e comunicação entre o Ensino Médio e Superior.

Algumas considerações

No desenvolvimento da pesquisa, foi possível observar que nem sempre existe uma coerência em relação às propostas institucionais de utilização de uma mesma tarefa nas diferentes etapas escolares que podem auxiliar professores e estudantes do Ensino Médio e Superior a revisitar o trabalho realizado em etapas anteriores utilizando esses conhecimentos como conhecimentos prévios disponíveis para a introdução dos novos conceitos, o que conduz a tornar os conhecimentos prévios mais ricos, mais diferenciados e mais elaborados em termos de significado e o novo conhecimento adquire significados para o aprendiz, conforme afirma Moreira (2005).

Sendo assim, é preciso estar atento, quando da escolha do livro didático, para não criar uma dificuldade difícil de ser ultrapassada. Além disso, como já indicamos acima, nossa hipótese é que parece necessitarmos de uma maior articulação e comunicação entre professores e educadores dos Ensinos Médio e Superior, ou seja, de trabalhos que mostrem a importância da transição entre estas duas etapas escolares, exibindo diferentes aspectos dessa transição, o que pode ser feito por meio dos diferentes olhares propostos por Guedeut (2008).

Referências bibliográficas

Bosch, M. e Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 19(1), 77-124.

Chevallard, Y. (2015). *Pour une approche anthropologique du rapport au savoir*. Disponível em :http://www.gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial155_enligne_anthropo_rap_savoir_chevallard.pdf .

Chevallard,Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125.

Chevallard,Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage*, Grenoble, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1991). La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Enseigné. *La Pensée Sauvage*. Grenoble. França.

Dante, L.R. (2014). *Matemática:* Contexto e Aplicações. Editora Ática. São Paulo. Brasil.

Dias M. A. (1998). *Problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de Doctorat. Université Paris VII, Paris. França.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de Doctorat. Université de Paris VII, Paris. França.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères* IREM, 6, 132-158.

Fuvest (2011). *Provas e gabaritos*. Disponível em: http://www.fuvest.br/vest2011/provas/provas.stm
Gueudet, G (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Moreira, M.A. (2005). *Aprendizagem Significativa Crítica*. Editora da Universidade Federal de Porto Alegre. Porto Alegre. Brasil.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques. — La Pensée Sauvage*, Grenoble, 18(2), 139-190.