EJEMPLOS DE MIRADAS DIDÁCTICAS AD HOC EN PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE LA MATEMÁTICA EN CHILE

Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Se presenta un análisis desde una postura cognitiva, de distintos hechos didácticos específicos, a través de ejemplos. El primer y segundo ejemplo abordan desde la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska el concepto de cónicas y de Sistema de Números complejos, respectivamente. El tercer y cuarto ejemplo abordan, bajo el enfoque de la teoría APOE, los conceptos de raíz cuadrada y Fractal Triángulo de Sierpinsky. El Quinto ejemplo, muestra que teorías de la Didáctica de la Matemática se están utilizando para indagar en el aprendizaje de conceptos estadísticos, como el de variable aleatoria.

Palabras clave: análisis de actividades, teoría modos de pensamiento, teoría apoe

Abstract

This report shows an analysis of different specific didactic events from a cognitive stance, by using examples. The first and second examples address the concept of conics and Complex System of Numbers, respectively, from Anna Sierpinska’s theory of modes of thinking. The third and fourth examples tackle the concepts of square root and Sierpinsky’s Fractal Triangle, under the APOE theory framework,. The fifth example shows that mathematics education theories are being used to investigate the learning of statistical concepts, such as that of random variables.

Key words: analysis of activities, modes of thinking theory, apos theory

Introducción

En este reporte se presenta el análisis de cinco ejemplos (como casos de estudio (Stake, 2010)) desde dos referentes teóricos cognitivos de la Matemática Educativa –La teoría los Modos de Pensamiento de Sierpinska y la teoría APOE–, con la finalidad de mostrar a la comunidad cómo los elementos que constituyen estás teorías van explicando la comprensión y construcción de fragmentos de la matemática en los aprendices de Chile.

Marcos teóricos referenciales: Modos de pensamiento y Teoría APOE

La teoría de los Modos de pensamiento (MP) de Sierpinska (2000) y la teoría APOE (Arnon et al, 2014), son ambas de corte cognitivo, sin embargo, sus elementos y enfoques son diferentes. La teoría MP está interesada en hacer explícito el pensar teórico de la matemática y en propiciar que el aprendiz alcance la interacción entre lo teórico y lo práctico de tópicos matemáticos. En cambio, APOE está enfocada en explicar la construcción de fragmentos de la matemática a través de etapas previamente construidas y en ayudar a otros aprendices a que se apropien de los constructos que se precisan como previos, en el aprendizaje de nociones matemáticas específicas.

Con respecto a los elementos de ambas teorías, su razón de ser es que a través de ellos se pueden explicar obstáculos que se perciben en el proceso de enseñar y aprender la matemática, por ejemplo, la teoría MP atiende el obstáculo epistemológico de la convivencia de dos posiciones dogmáticas opuestas en la matemática *"una que rechaza los números dentro de la geometría (pensamiento práctico) y la otra que la geometría pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético (pensamiento teórico)"*. Entre tanto la teoría APOE, aborda el obstáculo de *"alcanzar en los aprendices niveles superiores de construcción en tópicos de la matemática"* a través de constructos previamente construidos, si el aprendiz no evidencia esos conocimientos –llamados previos–, es imposible que pase de un estado de construcción a otro superior.

Elementos de la teoría los Modos de Pensamiento

Los modos pensamiento de Sierpinska (2000) interpretan la comprensión de un concepto matemático, a través de sus elementos, estos son, el modo *pensamiento sintético-geométrico, el modo de pensamiento analítico-aritmético y el modo de pensamiento analítico-estructural*. Es precisamente estos dos últimos elementos, los encargados de hacer explícito el pensar teórico de un objeto de la matemática.

Cada uno de estos modos de pensamiento que es preferible considerarlos igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando.

En el modo de *pensamiento sintético-geométrico* (SG) los objetos matemáticos son atendidos directamente por la mente mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, utilizando el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales. La visualización matemática (en el sentido de Zimmermann y Cunningham, 1991) juega un rol fundamental en lo que es la resolución de problemas en este modo de pensamiento.

En el modo de *pensamiento analítico-aritmético* (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas o simbólicas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de números reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n-uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas, entre otros. Las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-uplas" de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas.

El modo de *pensamiento analítico-estructural* (AE) va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Los objetos matemáticos son pensados a través de propiedades, o caracterizaciones a través de axiomas.

Para esta teoría comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente (ir y venir) entre los modos de pensar: SG, AA y AE (Parraguez, 2012).

Elementos de la teoría APOE

La teoría APOE (Arnon, et al., 2014) es acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, y que en conjunto las etiqueta como construcciones mentales –existen variadas definiciones, pero en general se refiere a la organización de las ideas para intentar construir fragmentos de la matemática–, debido a su base piagetiana (Dubinsky, 1996), y constituyen una pieza fundamental, en la construcción de objetos matemáticos. Específicamente, una *construcción mental Acción* resulta de una operación mental, que obedece a un estímulo externo y repetible que transforma de alguna manera un objeto matemático, a través de la explicitación de todos sus pasos, y de cierta manera es algorítmica. La *construcción mental Proceso* resulta de la interiorización de una *Acción*. Esta construcción Proceso no se deja conducir por los estímulos externos, sino por los internos, y el estudiante ya no precisa hacer todos los pasos de una actividad matemática, explícitamente. También un *Proceso* es el resultado de la coordinación (como concatenación) de otros dos procesos. La *construcción mental Objeto*, resulta de la reflexión sobre las operaciones aplicadas en el proceso, que es dinámico inicialmente, y quien la posee puede actuar sobre el proceso, y también realizar transformaciones y pensarlo como algo estático, o como algo involucrado en sí mismo, es decir encapsulado. La *construcción mental Esquema***,** resulta de la organización de las construcciones acción, proceso, objeto y también otros esquemas previamente construidos en la mente de un aprendiz.

Ejemplos

Presentamos a continuación una descripción de 6 ejemplos (extraídos de los instrumentos diseñados para la de Fase de la Medición Inicial en el Proyecto Fondecyt Nº1180468), y analizados es este reporte como Casos de Estudio (Stake, 2010) a priori, a través de los referentes teóricos presentados.

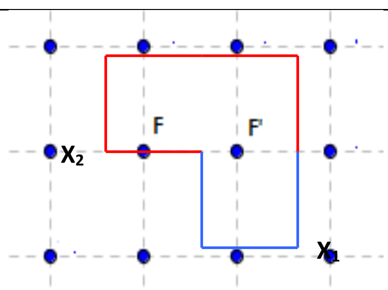
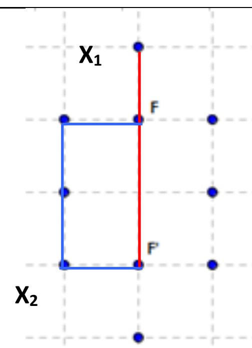
Primer Ejemplo: En la Geometría Discreta del Taxista

Justifica si la Cónica A y la Cónica B son elipses de focos F y F' en la Geometría Discreta del Taxista, donde la distancia se mide en cuadras horizontales o verticales.

Cónica A Cónica B

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este primer ejemplo se precisan en la Tabla 1, interpretadas desde los Modos de Pensar (Con base en Bonilla, Parraguez y Solanilla, 2014).

Tabla 1: *Respuestas del ejemplo 1 interpretadas desde los modos de pensar*

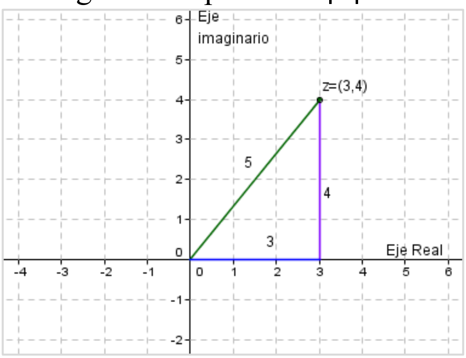
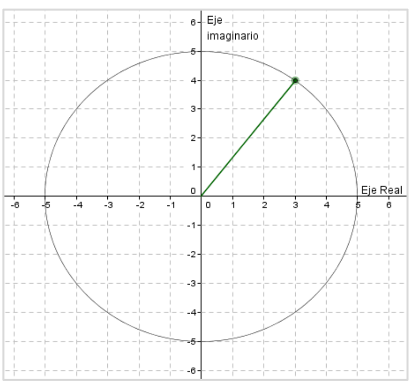
La Cónica A, no es una elipse, porque la suma de la distancia de cualquier punto digamos *X* a *F*, más la distancia de *X* a *F'* no es siempre constante.	**AA**
  Cónica A $d(X_1, F') + d(X_1, F) \neq d(X_2, F') + d(X_2, F)$ Cónica B $d(X_1, F') + d(X_1, F) = d(X_2, F') + d(X_2, F)$	**AA – SG**
La Elipse es el lugar geométrico de todos los puntos, cuya suma de las distancias de cualquier punto a los focos, es siempre una cantidad constante.	**AE**

Segundo Ejemplo: En el Sistema de los números complejos

Considere $Z \in \mathbb{C}$. ¿Qué números cumplen con $|Z| = 5$? Muestra tu resolución.

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este segundo ejemplo se precisan en la Tabla 2, interpretadas desde los Modos de Pensar (Con base en Randolph y Parraguez, 2015).

Tabla 2: *Respuestas del ejemplo 2 interpretadas desde los modos de pensar*

Determina casos particulares a partir de: $a^2 + b^2 = 25$, tales como $5i,\ 5,\ 3+4i,\ 4+3i$ (y sus opuestos).	**AA**
Trabaja casos particulares en el plano complejo, apoyándose en el triángulo rectángulo de hipotenusa $\lvert z \rvert$. 	**SG**
Relaciona que si $\lvert z \rvert = 5 = \sqrt{a^2+b^2}$ y apoyándose del plano complejo, sostiene que la solución son los puntos de la circunferencia definida por $a^2 + b^2 = 5^2$. 	**AA – SG**

Tercer Ejemplo: En la Función raíz cuadrada

Supongamos que el Texto A afirma que $\sqrt{9} = \pm 3$, *y el Texto B afirma que* $\sqrt{9} = 3$.
¿Cuál de los dos textos afirma lo correcto?

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este tercer ejemplo se precisan en la Tabla 3, interpretadas desde los elementos de la teoría APOE (Con base en Gamboa, Parraguez y Vásquez, 2014).

Tabla 3: *Respuestas del ejemplo 3 interpretadas desde APOE*

$\sqrt{x}$ es una función de variable real, con dominio y recorrido establecidos. $\sqrt{\ }: \underset{x \to \sqrt{x}}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+}$	**Función Raíz cuadrada como construcción mental Objeto**
Evaluando $x = 9$ en la función $\sqrt{\ }: \underset{x \to \sqrt{x}}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+}$, se obtiene que $\sqrt{9} = 3$.	**Función Raíz cuadrada como construcción mental Proceso.**

Cuarto ejemplo: En el Fractal Triángulo de Sierpinsky

Etapa 1 *Etapa 2* *Etapa 3*

¿Cuál es la figura de la etapa 5?

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este cuarto ejemplo se precisan en la Tabla 4, interpretadas desde los elementos de la teoría APOE (Con base en Gutiérrez y Parraguez, 2015).

Tabla 4: *Respuestas del ejemplo 4 interpretadas desde APOE*

La figura de la Etapa 1, como iniciador de Fractal. 	**Iniciador como construcción mental proceso**
La figura de la etapa 2, como Generador de Fractal. 	**Generador como construcción mental Objeto**

La figura de la etapa 3, autosimilitud a escala. 	**Autosimilitud proceso resultante de la coordinación entre los procesos iniciador y generador**.
La figura de la etapa 5, como generalización de la autosimilitud. 	**Generalización del proceso de autosimilitud.**

Quinto ejemplo: En la Variable Aleatoria

Considera el experimento de lanzar dos monedas, no cargadas.
a) *Escribe el espacio muestral del experiemnto.*
b) *Define una variable aleatoria para el experimento.*

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este cuarto ejemplo se precisan en la Tabla 5, interpretadas desde los elementos de la teoría APOE (Con base en Salazar y Parraguez, 2013.

Tabla 5: *Respuestas del ejemplo 5 interpretadas desde APOE*

Se describen los elementos del espacio, de acuerdo a los elementos C (cara) y S (sello) de una moneda cualquiera: $E = \{(C,C),(C,S),(S,C),(S,S)\}$ La cardinalidad del espacio muestral está determinada por el principio multiplicativo.	**Espacio muestral como construcción mental Proceso.**
Se define una función, desde el espacio muestral E hacia el conjunto de los números reales (o bien intervalo $[0,1]$.	**Coordinación de los procesos Dominio de una función y Variable aleatoria, mediante el concepto de asociación única.**

A modo de conclusión

A través de estos cinco ejemplos, se ha mostrado cómo los elementos de estas dos teorías – MP y APOE– explican e interpretan la actividad mental, cuando un aprendiz (hipotéticamente hablando) se enfrenta a una tarea de Matemática, lo que constituye el quehacer paradigmático e interpretativo de la Educación Matemática, desde marcos teóricos explícitos.

Cabe señalar que las respuestas dadas para cada uno de los ejemplos presentados, reúnen elementos dados a priori por un investigador que trabaja adherido a una u otra teoría, y para lo cual precisa describir la matemática desde los elementos de las teorías de la Matemática Educativa que operacionaliza en su investigación. Los ejemplos 1 y 2 interpretan el pensar práctico y el pensar teórico de un tópico matemático y los ejemplos 3, 4 y 5 muestran estados de construcción de conceptos matemáticos, según el investigador haga referencia a cuestiones estáticas o dinámicas del concepto, y que sintonizan con la intención de un instrumento investigativo, para que posterior a su aplicación se convierta en un documento de análisis, el cual podrá ser examinado por el investigador a través de la técnica mostrada, de acuerdo con los fines que se precise en el diseño metodológico trazado para tal o cual investigación.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido parcialmente subvencionada por el proyecto FONDECYT Nº1180468.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Bonilla, D., Parraguez, M. y Solanilla, L. (2014). Las cónicas: Una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 779-786. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8*(3), 25-41.

Gamboa, M., Parraguez, M. y Vásquez, P. (2014). *Construcción cognitiva de la raíz cuadrada.* En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 191-198. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gutiérrez, X. y Parraguez, M. (2015). *Elementos para las construcciones mentales del Fractal Triángulo de Sierpinski.* En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 345-352. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática-PUCV.

Salazar, R. y Parraguez, M. (2013). Diseñando una Descomposición Genética para el objeto variable aleatoria. *Revista de Educación Matemática RECHIEM*, *7*(1), 241-247.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Randolph, V. y Parraguez, M. (2015). Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 401-409. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. *Mathematical Association of America*, Notes, 19.