

# CONSTRUCCIÓN DE PENSAMIENTO FUNCIONAL: UNA EXPERIENCIA EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO EXTRACURRICULAR

Mónica Adriana Pineda Ballesteros, Solange Roa Fuentes  
Universidad Industrial de Santander, EDUMAT, UIS. (Colombia)  
monypin23@gmail.com, roafuentes@gmail.com

## Resumen

Esta investigación aborda aspectos relacionados con la construcción de pensamiento funcional que desarrolla un grupo de individuos con talento matemático potencial (GTM). Se presentan definiciones y elementos del pensamiento funcional, desde el marco *Early Algebra* y los Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003). El objetivo de esta investigación es identificar y describir las relaciones funcionales (Recurrencia, Correlación y Covariación) que pueden evidenciar estudiantes entre 9 y 14 años, al resolver Tareas que involucran situaciones funcionales. Estas tareas están diseñadas para motivar una actividad cognitiva centrada en el análisis de cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2011; Smith, 2008). Los estudiantes que participaron en el GTM evidenciaron desarrollo de pensamiento funcional a partir del estudio de las relaciones funcionales Recurrencia y Correlación que se plantearon en las Tareas.

**Palabras clave:** pensamiento funcional, talento matemático potencial.

## Abstract

This research tackles aspects related to the construction of functional thinking developed by a group of students with potential mathematical talent (GTM). Definitions and elements of functional thinking are presented, framed by the *Early Algebra* and the Principles and Standards for School Mathematics (Thales, 2003). The objective of this research is to identify and describe the functional relations (Recurrence, Correlation and Co-variation) that 9 to 14-year-old- students have shown, when solving tasks involving these functional situations. These tasks are designed to motivate a cognitive activity focused on the analysis of co-variation amounts (Blanton and Kaput, 2011; Smith, 2008). The students who participated in the GTM demonstrated a functional thinking development based on the research on the functional relations recurrence and correlations, set out in the tasks.

**Key words:** functional thinking, potential mathematical talent.

## ■ Introducción

Este reporte hace parte de una investigación en curso, que estudia el desarrollo del pensamiento funcional, visto desde la perspectiva de Cañadas y Molina (2016) como “un proceso cognitivo... basado en la

construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (p. 3). Al poner en marcha esta propuesta, fue creado un contexto extracurricular al interior de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia), llamado Grupo Talento Matemático (GTM - UIS), con el objetivo de generar un espacio de enriquecimiento que en particular potencie el desarrollo del pensamiento funcional. Este tipo de pensamiento es asociado al talento matemático potencial, a partir del estudio de Tareas que involucran relaciones funcionales que están fuera del contexto escolar y que pueden potenciar el desarrollo del talento matemático. Por tanto se propone describir los procesos de Recurrencia, correlación y Covariación que desarrollan individuos en el GTM – UIS. También se busca diseñar Tareas que potencien el pensamiento funcional y fomenten su desarrollo a través de la construcción recursiva de patrones, la covariación y la correlación de variables.

En esta investigación se resalta la necesidad de enriquecer la experiencia matemática en primaria y los primeros años del bachillerato, brindando experiencias que vayan más allá de la aritmética y le proporcione a los estudiantes herramientas para fortalecer su razonamiento matemático. Al respecto el Thales (2003) menciona que “También, aquellos alumnos con especial interés por la disciplina o excepcional talento para ella, pueden necesitar programas más ricos o más recursos para estimularlos y comprometerlos” (p. 14).

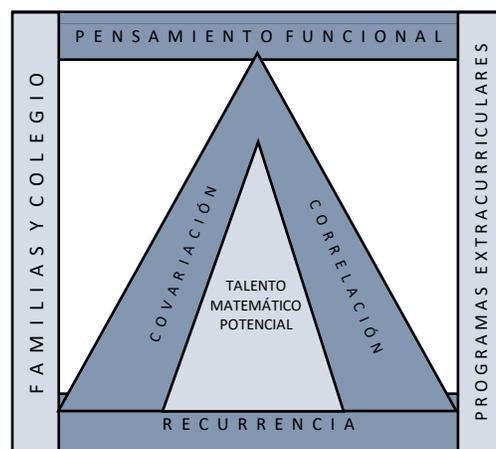
A continuación se presentan los aspectos teóricos que fundamentan la investigación. Los elementos conceptuales definen la perspectiva de esta investigación sobre: el pensamiento funcional y el talento matemático; uno de los elementos centrales es el talento matemático potencial. Para este trabajo se ha adoptado la definición que presenta la Organización de Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la cultura (UNESCO, 2004), donde el talento potencial es definido como:

Aquel que aún no se ha desarrollado o evidenciado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su talento o talentos, pero por uno o más factores no lo ha podido afirmar en sus esquemas de acción. (p.27)

Esta postura encaja con la que aquí se propone, pues en ella se considera la familia, la sociedad, la condición económica, el colegio, entre otros, como factores que influyen positiva o negativamente en la evolución o retroceso del talento potencial de un individuo.

Otro elemento de gran relevancia en este trabajo es el pensamiento funcional y el estudio de su desarrollo a partir de las tres relaciones funcionales expuestas por Smith (2008) y trabajadas ampliamente por Blanton y Kaput (2011), Pinto (2016), Bastías (2016), entre otros. La más elemental de ellas, desde el punto de vista de Cañadas y Pinto (2016) es la Recurrencia que implica encontrar el patrón de variación. Esta relación es la más reportada en las investigaciones que implican desarrollo de pensamiento funcional. La segunda relación es la Correspondencia que se basa en la identificación de una correlación entre variables. Según Bastías (2016) esta relación busca que el alumno logre identificar la notación algebraica convencional. La última es la Covariación, vista como la relación que representa mayor dificultad para los estudiantes; esta relación se basa en el estudio de cómo dos cantidades varían simultáneamente y cómo los cambios en los valores de una variable producen cambios en la otra. Esto implica que la atención se centra en los cambios de las variables de manera independiente. Las relaciones funcionales descritas permiten dar cuenta de cómo puede evidenciarse el pensamiento funcional en la producción de los estudiantes que hacen parte del GTM-UIS.

La figura que se presenta a continuación, reúne los principales elementos conceptuales que sustentan esta investigación; en ella se muestra una composición que incluye el talento matemático potencial como foco central; las tres relaciones funcionales propuestas por Smith (2008): Recurrencia, Correspondencia y Covariación, que dan soporte al desarrollo del pensamiento funcional. Y como pilares fundamentales la familia, la escuela regular y los programas extracurriculares. Estos últimos elementos, desde el punto de vista de esta investigación representan una importante y decisiva influencia en el desarrollo del talento matemático potencial de los estudiantes; lo anterior de acuerdo con Feldhusen (2003) quien afirma que “... la influencia de las personas, los recursos, los ambientes es una parte del desarrollo sistemático del talento” (p.44).



*Figura 1.* Relación entre los principales elementos que potencian el talento matemático.

## ■ Método

Esta investigación es de tipo cualitativo, toma como fundamento el estudio de casos (Stake, 2010). Este enfoque permite analizar a los estudiantes que en el desarrollo de las Tareas evidencian en su actividad la presencia de relaciones funcionales.

Las unidades de estudio serán 7 estudiantes de instituciones públicas de Bucaramanga (Colombia). La elección de tan solo 7 casos se justifica por la necesidad de delimitar las nuevas etapas y categorías, que permiten focalizar la investigación con mayor precisión, hacia las relaciones funcionales presentes en el desarrollo de las Tareas, y la Actividad generada por los estudiantes a la hora de abordarlas. Además esta perspectiva metodológica sustenta el ejercicio investigativo propuesto, que busca identificar y describir lo más explícitamente posible las estrategias que caracterizan el desarrollo del pensamiento funcional; particularmente en el desarrollo de Tareas matemáticas que impliquen la participación de los estudiantes en una situación funcional.

Esta investigación se desarrolla en tres Fases: la primera es la construcción del marco conceptual y el diseño de tareas. En esta fase se busca aclarar el rumbo de la investigación y en segundo lugar, dar peso conceptual y teórico a cada uno de los elementos que la sustentan. El diseño de tareas, entendiendo la

Tarea desde el punto de vista de Diezmann (2004) quien sugiere que: “las tareas matemáticas retadoras para estudiantes dotados deben ser auténticas tareas que les ofrezcan oportunidades para emular la práctica de los matemáticos, en un nivel menos sofisticado” (p. 14); en este sentido, se considera además que cada reto debe ser suficiente para cada individuo, dependiendo de su necesidad y su potencial. La segunda fase es la implementación de tareas que tiene dos aplicaciones: la primera en el segundo semestre de 2016 con un total de 21 estudiantes, esta aplicación se implementó durante quince sesiones de tres horas cada una; la segunda aplicación se dio en el primer semestre de 2017, con 7 estudiantes que fueron escogidos por su rendimiento, grado de compromiso y participación en la primera aplicación, en esta aplicación se trabajó durante diez sesiones de tres horas cada una. La tercera y última fase incluye el análisis de la producción intelectual de los estudiantes, para esta última fase se toman en cuenta grabaciones que fueron hechas a lo largo de la experiencia y las producciones escritas de los estudiantes.

### ■ Ejemplo y Análisis

Las tareas que se desarrollaron durante las dos implementaciones del GTM-UIS fueron pensadas y diseñadas con el fin único de desarrollar pensamiento funcional en los estudiantes. Estas Tareas fueron diseñadas para desarrollarse en cuatro momentos: El primer momento consiste en motivar la participación de los estudiantes en una situación funcional, el segundo momento busca centrar la atención de los estudiantes en las relaciones entre variables que se definen en la Tareas; en este momento se plantean preguntas que motiven la búsqueda de relaciones (Recurrencia, Correlación y Covariación). El tercer momento consiste en el registro de los valores correspondientes a las cantidades que varían, estos registros pueden darse mediante una tabla, un dibujo, una representación numérica o verbal, el registro que se elija va a depender de las condiciones de la Tarea y las habilidades del estudiante. El cuarto y último momento es la construcción de una expresión, con este momento no se busca que el estudiante llegue a una expresión algebraica, si no, que pueda comprender la manera en que se va construyendo el patrón y pueda establecer las relaciones que existen entre las variables. La expresión que surja a partir del recorrido por los anteriores momentos puede ser verbal, icónica, numérica, entre otras. A continuación se presenta el análisis de un fragmento de una de las tareas que fueron implementadas en el GTM-UIS, para éste análisis se nombra a los estudiantes como E1, E2, E3 y E4.

1. Participar en una “Situación Funcional”. Es posible que inicialmente se evidencie la construcción de relación de Recurrencia por parte de los estudiantes. En el instante en que el estudiante observa las primeras imágenes gráficas, y continúa generando las serpientes correspondientes a los días consecutivos.

Tarea

En el zoológico de reptiles de la Universidad Estatal están estudiando el crecimiento de una serpiente Pitón cada día. Para ayudarlos, debes encontrar el número de partes que tendrá una serpiente en crecimiento cada día. Debes tener en cuenta que cada triángulo equivale a una parte del cuerpo.

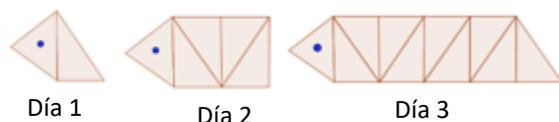


Figura 2. Tarea de la serpiente (Adaptación de Blanton y Kaput, 2011, p.11)

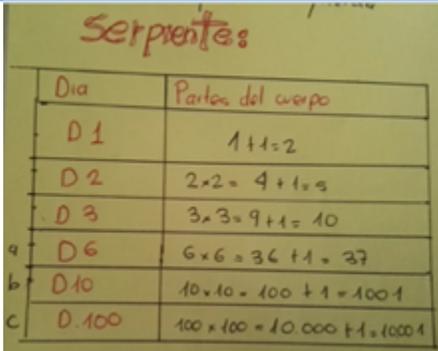
¿Cuántas partes tendrá una serpiente en el día 6, en el día 10, el día 100?  
Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100.  
¿Cómo lo harías?

2. Centrar la atención en la relación entre dichas variables. La actividad generada por la Tarea de la serpiente fue analizada mediante la tabla que aparece a continuación. Allí se definen tres columnas: Pregunta (planteada durante una entrevista grabada mediante vídeo-cámara), Evidencia (Transcripción de videos y audios) y Relación Funcional. De tal manera que se da cuenta de la actividad de los estudiantes a la luz de las relaciones funcionales.

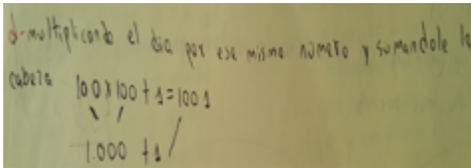
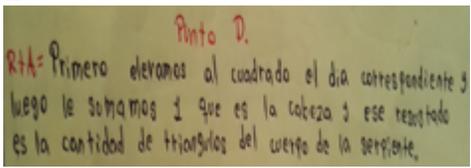
Pregunta	Evidencia	Relación Funcional
<p>¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6?</p> 	<p>Inv.: ¿Qué idea tenías? E2: Que en el día 1 tenía dos triángulos, a ese le sumaba cuánto le faltaba para llegar al día 2 y a ese le sumaba cuánto le faltaba para el siguiente [Indicaba en su hoja de trabajo]. Pero después vi que si seguíamos así no podríamos terminar, porque no es fácil saber para un número grande. Entonces mi compañera se dio cuenta de otra cosa.</p>	<p>En la primera intervención de E2 se puede observar una relación de <b>Recurrencia</b>. El estudiante se centra en encontrar el patrón de variación, tal y como se observa en la figura. Cuando comprende que este método le llevará mucho tiempo decide abandonarlo y acogerse al de su compañera.</p>

3. Registrar valores correspondientes a las cantidades que varían.

Pregunta	Evidencia	Relación Funcional
	<p>E3: Observando la figura y el número de días se eleva a la dos y el resultado es el número de partes del cuerpo. Inv.: ¿Siempre se eleva al cuadrado? E3: Si. E4: El número de días se eleva a la dos y se suma uno.</p>	<p>En este momento, se hace más complicado continuar dibujando las serpientes hasta el día 100, que hallar características que permitan saber el número de partes de la</p>

<p>¿Cuántas partes tendrá una serpiente el día 100?</p>	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>Día</th> <th>Partes del cuerpo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>D1</td> <td><math>1+1=2</math></td> </tr> <tr> <td>D2</td> <td><math>2 \times 2 = 4 + 1 = 5</math></td> </tr> <tr> <td>D3</td> <td><math>3 \times 3 = 9 + 1 = 10</math></td> </tr> <tr> <td>D6</td> <td><math>6 \times 6 = 36 + 1 = 37</math></td> </tr> <tr> <td>D10</td> <td><math>10 \times 10 = 100 + 1 = 100 + 1</math></td> </tr> <tr> <td>D100</td> <td><math>100 \times 100 = 10\,000 + 1 = 10001</math></td> </tr> </tbody> </table>	Día	Partes del cuerpo	D1	$1+1=2$	D2	$2 \times 2 = 4 + 1 = 5$	D3	$3 \times 3 = 9 + 1 = 10$	D6	$6 \times 6 = 36 + 1 = 37$	D10	$10 \times 10 = 100 + 1 = 100 + 1$	D100	$100 \times 100 = 10\,000 + 1 = 10001$	<p>serpiente de una forma más sencilla.                  En la intervención del estudiante se evidencia que logra establecer una <b>Correlación</b> entre las variables que intervienen en la tarea. Los datos que muestra por medio de la tabla, representan la función que describe la tarea (<math>y = x^2 + 1</math>).</p>
Día	Partes del cuerpo															
D1	$1+1=2$															
D2	$2 \times 2 = 4 + 1 = 5$															
D3	$3 \times 3 = 9 + 1 = 10$															
D6	$6 \times 6 = 36 + 1 = 37$															
D10	$10 \times 10 = 100 + 1 = 100 + 1$															
D100	$100 \times 100 = 10\,000 + 1 = 10001$															

4. Construcción de una expresión.

Pregunta	Evidencia	Relación Funcional
<p>Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100.                      ¿Cómo lo harías?</p>	<p>E1: Multiplicamos el número del día por ese mismo número y al resultado le sumamos uno que sería igual a la cabeza. [01:21]                      E2:                        [multiplicando el día por ese mismo número y sumándole la cabeza]                      E7:                        [Primero elevamos al cuadrado el día correspondiente y luego le sumamos 1 que es la cabeza y ese resultado es la cantidad de triángulos del cuerpo de la serpiente]</p>	<p>En las dos intervenciones de E1 y E2, se evidencia que logran plasmar verbal y numéricamente la relación que describe la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente para el día 100.                      Por su parte E7 deja ver un nivel superior al de sus compañeros, al describir de manera más general la forma en que se halla la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente para cualquier día. Con esos ejemplos se evidencia la <b>Correlación</b> entre la cantidad de días y el número de partes de la serpiente.</p>

■ Reflexiones Finales

El estudio del pensamiento funcional en primaria es una corriente que se ha venido trabajando desde hace poco tiempo, lo que dificulta la identificación de elementos e investigaciones que aporten elementos teóricos a esta investigación. Abordar el estudio del pensamiento funcional desde edades tempranas, con

estudiantes que han manifestado cierto agrado o empatía con la matemática y bajo unas condiciones que favorezcan su aprendizaje, puede aumentar la posibilidad de que éstos sujetos tengan un mejor desempeño en sus estudios posteriores.

El espacio que en el GTM-UIS se genera, brinda a los estudiantes potencialmente talentosos, la oportunidad de explorar y desarrollar sus habilidades matemáticas. También proporciona la posibilidad de ampliar sus horizontes respecto a la amplia gama de posibilidades que se abren cuando se decide trabajar en su formación y afianzamiento de conocimiento matemático.

Las evidencias de pensamiento funcional que aquí se presentan, son una muestra del trabajo que se logró con los participantes del GTM-UIS. En los apartes de la entrevista se evidencia que algunos en mayor nivel que otros, establecen de forma clara y convincente la relación que determina la secuencia que se está trabajando. También se evidencia recursividad en los estudiantes, al mostrar en sus producciones diferentes representaciones, entre ellas la tabular, numérica y verbal, para dar solución a la Tarea que se presenta. Con esto, se puede garantizar que se evidencia desarrollo de pensamiento funcional en los estudiantes, a partir del manejo que muestran en la aparición de relaciones funcionales como Recurrencia y Correlación.

#### ■ Referencias bibliográficas

- Bastías, K. (2016). *Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5° curso primaria*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. En Cai, J. & Knuth. (Ed.), *Early Algebraization* (pp. 3-21). New York, Estados Unidos: Springer.
- Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco R. (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago (Chile): OREALC-Unesco.
- Blanco, R., Rios, C. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En Benavides, M., Maz, A., Castro E. y Blanco, R. *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. pp. 49-60. Santiago (Chile): OREALC-UNESCO.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.
- Diezmann, C. M., Faragher, R., Lowrie, T., Bicknell, B. & Putt, E. (2004). *Catering for exceptional students in mathematics*. Tomado desde <http://eprints.qut.edu.au/1855/1/1855.pdf>.
- Feldhusen, J. (2003). Beyond General Giftedness: New Ways to Identify and Educate Gifted, Talented, and Precocious Youth. En Borland J. *Rethinking Gifted Education*. (pp. 34-45), New York: Teachers College Press.
- Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación en estudiantes de tercero de primaria*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

- Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga: SEIEM.
- Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. J. Kaput, Carraher, D. W, & Blanton, M. L. *Algebra in the Early Grades*. pp. 133-160. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates
- Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. (5a Ed.). Barcelona: Labor.
- Thales, S. A. E. M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, SAEM Thales.