VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

APROXIMACIÓN Y MODELADO CON B-SPLINES USANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Juan Rafael Garibay Bermúdez
Universidad Nacional autónoma de México. (México)
egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx, egor1131@unam.mx

Resumen

El método del elemento finito ha llegado a ser aceptado ampliamente como una técnica de propósito general en el modelado numérico y en matemáticas aplicadas. Las principales aplicaciones se presentan en la mecánica del medio continuo, flujo de fluidos, y teoría de campos. En dichas áreas los métodos computacionales son esenciales y se benefician de manera importante, debido a los grandes avances de la tecnología computacional. Los conceptos matemáticos fundamentales han sido introducidos hace mucho tiempo antes de que se reconociera su práctica potencial. Ahora, varios aspectos de las técnicas del elemento finito continúan siendo el área central de la investigación, ingeniería y desarrollo. Los splines juegan un papel importante en aproximación y modelado geométrico. Son usados en ajuste de datos, diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés), manufactura automatizada (CAM, por sus siglas en inglés) y graficas por computadora. (Höllig, 2002)

Palabras clave: B-spline, étmodo del elemento finito

Abstract

The finite element method has become the most widely accepted general purpose technique for numerical modeling in engineering and applied mathematics. Principal applications arise in continuum mechanics, fluid flow, thermodynamics, and field theory. In these areas computational methods are essential and benefit strongly from the major advances in computer technology. The fundamental mathematical concepts had been introduced long before their practical potential was recognized. Now, various aspects of finite element techniques remain a central area of engineering research and development. Splines play an important role in approximation and geometric modeling. They are used in data fitting, computer-aided design (CAD), computer-aided manufacturing (CAM), and computer-aided graphics (Höllig, 2002).

Key words: B-spline, finite element method

Introducción

En este reporte de investigación se aborda el tema de la aproximación y el modelado con B-splines, usando el método del elemento finto; la conjunción entre los dos objetos matemáticos citados es uno de los métodos de reciente aplicación; sin embargo, el desarrollo de los objetos mencionados tiene una larga historia (figura 1). Por primera vez se usó el término “método del elemento finito” por Clough (R. Clough, 1996), las ideas claves datan de mucho antes; como se muestra en la figura 1. Ritz resolvió problemas variacionales con aproximaciones de dimensión finita; un acercamiento ya empleado por Rayleigh. Siguiendo las observaciones hechas por Bubnow, Galerkin realizó soluciones aproximadas de problemas con valores en la frontera directamente, sin recurrir a la formulación variacional. Ahora, después de más de30 años varios aspectos del método del elemento finito conservan la idea central tanto en investigación, como en desarrollo e ingeniería.

Los splines juegan un rol importante en aproximación y modelado geométrico. Son usados en ajuste de datos, diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en ingles Computer-Aided Design), manufactura automatizada (CAM, por sus siglas en ingles Computer-Aided Manufacature), y graficas por computadora. Un amplio repertorio de software está disponible y sus algoritmos son muy eficientes expresados como polinomios. El primer trabajo de Schoenberg revelo que los splines poseen poderosas propiedades de aproximación. Subsecuentemente, muchos esquemas de aproximación han sido propuestos; en particular después de los resultados de, de Boor, acerca de los B-splines, estos llegaron a ser populares para un amplio rango de aplicaciones; sus algoritmos son actualmente los bloques básicos en la construcción de la mayoría del software sobre splines. Otra importante contribución se debe a Bezier quien introdujo los polinomios segmentarios para el modelado CAD/CAM.

La indagatoria está sustentada en la metodología de la transposición didáctica y se propone poner en práctica con estudiantes de algunas carreras de ingeniería; es decir la investigación está en proceso. Así mismo, la indagatoria se fundamenta con los elementos que debe de contener toda investigación con carácter científico tal como lo propone la corriente de estudiosos de la matemática educativa en México y el mundo. Por tanto este documento consistirá de las secciones que se refieren a la descripción de los aspectos matemáticos considerados en el modelado y la aproximación numérica, al planteamiento del problema de investigación acompañado de la hipótesis correspondiente, otra sección es la que se refiere al marco teórico de los objetos matemáticos. Se describe brevemente la metodología utilizada y se describen los resultados esperados.

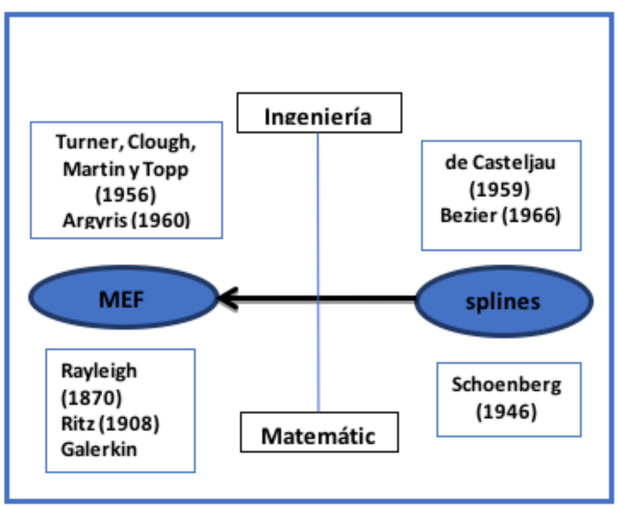

Figura 1. Desarrollo histórico del Elemento Finito y de los Splines
(MEF, significa Método del Elemento Finito, por sus siglas en español)

Justificación

Uno de los elementos fundamentales del andamiaje es el planteamiento de un problema en el contexto de la ingeniería, el cual consiste en un caso propio para los estudiantes de las carreras de ingeniería y Tecnología; por ejemplo, se podría citar el fenómeno de convección y difusión del calor en un material cualquiera (metal, plásticos, etc.) y su representación mediante un mapa bidimensional o tridimensional obtenido mediante el B-spline a través del elemento finito.

Algunos otros casos en el ámbito o contexto de los estudiantes de la carrera Licenciado en Tecnología, podrían consistir en determinar los modelos matemáticos obtenidos mediante el método B-spline en elemento finito, correspondientes a fenómenos tales como el comportamiento de campos gravitacionales o magnéticos, fenómenos asociados al comportamiento de los materiales sujetos a altas o bajas temperaturas, o al comportamiento de materiales diseñados con propósitos biofísicos o bien modelos representativos de fenómenos sociales y financieros, entre otros fenómenos.

El planteamiento de los casos mencionados tiene como propósito mostrar la utilidad práctica del objeto de estudio en cuestión; así como, el de producir en el estudiante el motivo y significado del aprendizaje del objeto matemático planteado.

La experimentación se ha diseñado para estudiantes de las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología (Ramos, 2012). Consiste en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado aquí tratado; es decir, se le indicará al estudiante cuales son los antecedentes matemáticos requeridos, para que se asegure de que los pueda conocer y dominar; lo cual le permitirá el acceso al proceso de aprendizaje.

Planteamiento del problema

Se requiere del diseño de un modelo o andamiaje didáctico con fundamento en los conceptos propios de la teoría socio epistemológica, para proveer al estudiante el medio adecuado para la apropiación del conocimiento del objeto matemático B-spline en elemento finito.
Hipótesis

Al mostrar y poner al alcance de los estudiantes las antecedentes cognitivos requeridos en el proceso que define al objeto matemático en estudio, se podría conseguir la trasposición didáctica por el estudiante.

Metodología

Para el propósito de la apropiación del conocimiento del objeto matemático tratado, se considera en esta indagatoria, los fundamentos de la teoría de la transposición didáctica, la cual ha sido desarrollada por algunos estudiosos de la matemática educativa. Los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.), que son procesos específicamente humanos, y son los que permiten apropiarse del conocimiento de un objeto de estudio, tienen su origen en la vida social, es decir, se constituyen a partir de la mediación y de la internalización, de prácticas sociales y de instrumentos creados culturalmente, como es el caso de la transposición didáctica. Por lo tanto la apropiación del conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura; es decir, se adquieren primero en un contexto social y luego se internalizan. Se resaltan los aportes a la transposición didáctica de Chevallard, quien afirma que esta metodología se entiende como un proceso mediante el que se modifica un contenido del saber matemático para implementarlo para su enseñanza, lo cual conduce a la transformación del saber sabio al saber enseñado y así ponerlo al alcance del estudiante (Chevallard, 1991). Tall y Farfan reportan en sus indagatorias que se ha encontrado con que los estudiantes tienen ciertas dificultades para adentrarse en el análisis conceptual básico, de acuerdo con las investigaciones didácticas que se han realizado en este campo durante las últimas décadas, que así lo demuestran claramente (Tall, 1991. Farfán, 1993). Lo cual además permite identificar los obstáculos; así como, la naturaleza de las dificultades de los estudiantes y las fallas de las estrategias de enseñanza comúnmente utilizadas, como son las que se fundamentan en un proceso algorítmico; y aquellas fundamentadas en los desarrollos de los conceptos o formulaciones matemáticas teóricas. Así pues, nos proponemos establecer mediante la conceptualización teórica de la transposición didáctica los objetivos estratégicos específicos:

a). Promover, la actividad del estudiante para realizar tareas de investigación. Los medios de operar para conseguir este objetivo serán:

i) Diseñar y aplicar el entramado pedagógico que descanse más en la actividad del estudiante que en la labor informativa del maestro y que se oriente a eliminar la recepción pasiva de información, sustituyéndola por su análisis y comprensión. Dicho entramado requiere de realizar una síntesis por parte del estudiante de la definición o desarrollo del objeto matemático; para esta tarea se le proporciona al estudiante las referencias actuales y pertinentes del objeto de estudio indicando los antecedentes necesarios para su comprensión, otros elementos del entramado consisten en resolver casos de estudio y diseñar el programa por computadora para la solución del problema propuesto, así como realizar prácticas mediante uso de software interactivo; así mismo, efectuar una evaluación de las actividades del estudiante para llevar a cabo una retroalimentación, si es necesario.

ii) Conjuntar la comprensión de la teoría con su aplicación práctica. Propiciar en el estudiante la búsqueda y organización de la información. Preparar al estudiante en el uso personal de material informativo, como condición del auto-aprendizaje.

iii) Establecer sistemas de evaluación de conocimientos para considerar, junto con el aprendizaje, el logro de habilidades y hábitos positivos, que propicien una educación continua. Llevar a cabo reuniones y cursos con el personal docente para reorientar la enseñanza bajo los principios anteriores.

b). Facilitar al estudiante, la información de actualidad de la más alta calidad, con el propósito de estimular el proceso de auto desarrollo. Para la consecución de este objetivo estratégico se propone:

i). Establecer los medios que permitan el flujo, hacia la docencia, de la información sobre el desarrollo de la ciencia y la auto-evaluación y superación constante de la calidad del material informativo utilizado en la enseñanza.

ii) Implementar y aplicar la metodología para la transmisión del conocimiento de manera eficaz, que permita distribuir la información de mayor calidad al mayor número de personas en el menor tiempo posible.

Conceptualización del Método del Elemento Finito y de los Splines

Una descripción grafica de los conceptos para definir el objeto matemático se muestra en el diagrama de la figura 2.

Conceptos Básicos del Elemento Finito

Aquí se explica el esquema clásico de Ritz-Galerkin, para la ecuación de Poisson, la cual sirve como modelo típico del problema. Posteriormente se consideran ejemplos de las funciones base definidas para rejillas triangulares o cuadradas. Los elementos finitos estándar son discutidos de una manera muy breve, solamente para indicar la diferencia entre los splines con peso ponderado y los splines con elemento finito. Después de introducir brevemente los conceptos del espacio de Sobolev se formula el método del elemento finito en un resumen de configuración. En particular se define el concepto de elepticidad y se prueba el teorema de existencia de Lax-Milgram para problemas variacionales. Por último en esta sección se manejan dos estimaciones básicas de error: la desigualdad de Céa y el principio de dualidad de Aubin y Nitsche.

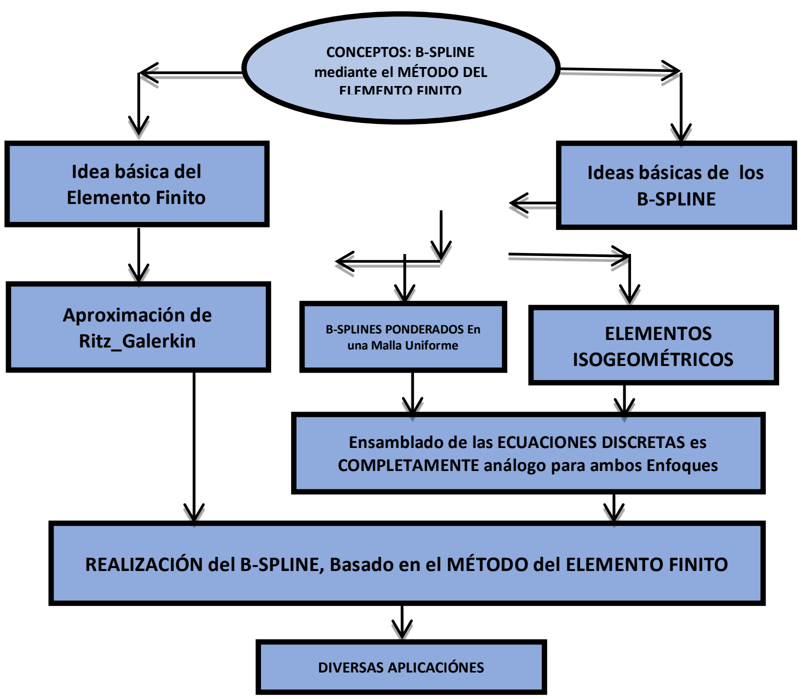

Figura 2. Diagrama que expresa la definición de los conceptos del objeto matemático tratado en la indagatoria

Conceptos Básicos de B-splines

En esta sección se definen los B-Splines y se describen las identidades y algoritmos, particularmente útiles para implementar los esquemas del elemento finito. Para un refinamiento local se tiene que usar bases jerárquicas más que las estrategias de inserción de nodos, la cual podría tener un efecto global. Entonces los B-splines uniformes son adecuados para aproximación multivariada y por supuesto mucho más simple desde un punto de vista computacional.

Funciones Básicas del Elemento Finito

En la investigación esta sección está dedicada a la construcción de las funciones básicas del elemento finito en una rejilla regular, usando B-splines. Los métodos resultantes proporcionan un enlace natural del modelado geométrico y la simulación numérica. Estos elementos comparten todas las ventajas de la aproximación estándar con elemento finito y las representaciones con B-splines. En particular, no se requiere de la generación de mallas o rejillas y es posible una muy buena exactitud en las soluciones con muy pocos parámetros relativamente. Los B-splines se expresan a partir de las bases de los splines sobre dominios limitados, como se describe en la siguiente sección de la indagatoria. Si bien es cierto que esos espacios splines tiene un orden óptimo de aproximación, ellos no establecen los requerimientos estándar del elemento finito completamente; además, las bases de los B-splines no se adaptan a las fronteras y no son uniformemente estables con respecto al ancho de la malla. Sin embargo, ambas dificultades pueden ser resueltas en una simple y elegante forma. Más adelante se muestra como incorporar fronteras homogéneas a través de funciones ponderadas y a continuación se describe un amplio procedimiento para estabilizar las bases. La combinación de ambos conceptos permite la definición de B-splines ponderados ampliados. Por último, se introducen los B-splines jerárquicos, los cuales pueden ser usados en las estrategias adaptativas de aproximación.

Aproximación con splines ponderados

Como se muestra en la definición de la aproximación de Ritz Galerkin, la convergencia del esquema del elemento finito se obtiene fácilmente de esta. La estimación fundamental corresponde a la desigualdad de Céa, la cual establece que el error en la norma de energía puede ser delimitada en términos del error de la mejor aproximación del subespacio del elemento finito. Por tanto, será suficiente analizar las propiedades de la aproximación de la función base, sin considerar específicamente los problemas de valor en la frontera discretizados. Para las bases del elemento finito introducidas en la sección anterior se obtiene el error común para un polinomio segmentario. Una estimación típica es:

$$\inf_{u_h} \|u - u_h\| \leq h^n \|u\|_{n+1}$$

Donde u_h es la aproximación ponderada de grado $\leq n$ a partir de ambos espacios; es decir, $w\mathbb{B}_h$ o $w^e\mathbb{B}_h$. Esencialmente los argumentos son análogos a la teoría estándar de los splines (Ramos, R., Aguilar, A., 2016). El desarrollo de las funciones básicas consiste en la construcción de las funciones duales. Primero se prueba que las funciones suavizadas pueden ser aproximadas por splines ponderados con orden óptimo. Luego, para obtener las formas específicas, se analiza la suavidad de los cocientes de las funciones ponderadas. Con ayuda de esos resultados se obtiene finalmente la estimación del error óptimo.

Problemas con valor en la Frontera

Aquí se discute la aproximación de un problema típico de valores en la frontera en el espacio de los splines. La ecuación diferencial que representa la solución u del problema tiene una formulación pobre tal como un problema variacional.

$$a(u,v) = \lambda(v), \qquad v \in H$$

Donde H es un espacio de Hilbert el cual incorpora las condiciones de frontera. La aproximación de Ritz-Galerkin $u_H = \sum_{i\in I} u_i B_i$ es obtenida simplemente reemplazando u por u_h y v por la función básica B_k. Aunque conceptualmente muy claro, este acercamiento cubre un amplio rango de aplicaciones. En esta sección se trata el problema no homogéneo de Poisson como un ejemplo típico de condiciones de frontera esenciales. Tales restricciones tienen que incorporarse dentro de los subespacios del elemento finito y entonces se requiere funciones ponderadas. En contraste, las condiciones de frontera naturales son satisfechas automáticamente por las soluciones de problemas variacionales y de esa manera se permite una aproximación mucho más simple. Esa situación se puede ilustrar mediante el cálculo en un problema de flujo incompresible. Luego, se combinan ambos casos y se considera una generalización de operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes variables. Más adelante se describe el problema de una placa como un ejemplo de la ecuación de orden cuarto. Al final de la sección se dedica un apartado a la elasticidad lineal, la cual es el problema de ingeniería clásico y tal vez el más importante en el análisis del elemento finito.

Métodos Multirejillas

Para definir las bases de un B-spline uniforme, el uso de las técnicas de multirejillas se sugiere por sí mismo. Tales algoritmos proporcionan las soluciones iterativas más eficientes del sistema Ritz-Galerkin. La solución en el tiempo es proporcional al número de incógnitas, por tanto, es asintóticamente óptimo. Mientras que para las iteraciones clásicas como las sobre-relajaciones sucesivas o el promedio de la convergencia de los gradientes conjugados afectan cuando el ancho de malla llega a ser pequeño, los esquemas multi-rejilla reducen el error mediante un factor independiente de malla en cada paso. La teoría matemática correspondiente es fascinante y ha sido un área de investigaciones de mucha actividad. La teoría de multi rejillas se aplica sin mayores modificaciones a las redes splines.

Implementación

Los métodos del elemento finito con splines no requieren de la generación de mallas y por lo tanto elimina la dificultad y la etapa de consumo de tiempo de pre procesado. La construcción de funciones básicas es comparativamente rápido, en particular si las funciones ponderadas naturales están disponibles. Una vez ensambladas, el curso de la simulación del elemento finito es paralelo a las técnicas basadas en mallas. Las rejillas o mallas regulares es una ventaja definitiva en todos los estadios o etapas del cómputo. Una amplia cantidad de software para el manejo de B-splines está disponible y puede ser utilizada para el cómputo científico y para la visualización de las aproximaciones mediante el método del elemento finito.

Recomendaciones en la determinación de Resultados

La experimentación consistirá en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado del B-spline, mediante el elemento finito; con objeto de que se asegure que el estudiante los conoce y que entiende su desarrollo. Cuando el estudiante manifieste dificultades en el conocimiento y dominio de los mencionados antecedentes se deberá proporcionar el apoyo necesario hasta conseguir una mejor aproximación en el dominio y aprendizaje de los antecedentes. Se espera que una vez puesto en la escena escolar universitaria la propuesta de investigación aquí considerada, se pueda observar, que mediante la metodología utilizada, el estudiante se apropie del conocimiento del objeto matemático denominado B-spline en elemento finito.

Referencias Bibliográficas

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Clough, R. (1980). The finite element method in plane stress analysis. *Computers and Structures 12(4)*, 361-370.

Höllig, K. (2002). Finite element approximation with splines. En G. Farin, J. Hoschek, and M.S. Kim (Eds.), *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. (pp. 283–308). Stuttgart: Elsevier.

Farfán, R.M. (Ed.) (1993). IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica del Cálculo, Monterrey, CINVESTAV-IPN, México.

Ramos, R., Aguilar A. (2016). *Interpolación, Derivación e Integración Numéricas*. México: Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Press