Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

ANÁLISIS DE LAS EXPLICACIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE JUEGOS DE AZAR EN PROBABILIDAD

Beatriz Adriana Rodríguez González, Isaias Miranda Viramontes
Universidad Politécnica de Zacatecas. (México), Instituto Politécnico Nacional. (México)
betyrogo9@hotmail.com, imirandav@ipn.mx

Resumen

El objetivo de este artículo es analizar el uso que hacen estudiantes universitarios de conceptos de probabilidad en explicaciones sobre el funcionamiento de juegos de azar que involucran riesgo. Como parte de la estrategia de enseñanza que los profesores de estos estudiantes consensuaron entre ambos, al inicio del curso, estos juegos debían ser diseñados por medio de, o bien la elaboración de problemas vistos en clase, o bien la variación de juegos de azar ya conocidos. En este sentido, los juegos de azar pueden considerarse como un ejemplo de la metodología conocida como creación de problemas (*problem posing*). Así, el análisis de las explicaciones se hizo con base en el uso explícito de los conceptos involucrados en las explicaciones de los juegos, así como en el significado que para los estudiantes ha tenido la experiencia de elaborar o modificar problemas. Los resultados indican que los estudiantes lograron comprender el significado del concepto de probabilidad.

Palabras clave: probabilidad, explicación, juego de azar, creación de problemas

Abstract

The aim of this report is to analyze how university students' use the concept of probability in their explanations on the organization of the games of chance that involve risk. As part of the teaching strategy, which both, teachers and students agreed on at the beginning of the course, these games had to be designed based on the exercises previously seen in class or on the modification of already known games of chance. In this sense, such games can be considered as an example of the well-known methodology called problem posing. Thus, the analysis of the students' explanations was based on the explicit use of concepts involved in the explanation of the games, as well as the meaning that the experience of elaborating and modifying problems has had for the students. The results show that the students could understand the meaning of the concept of probability.

Key words: probability, explanation, gaming, problem posing

Introducción

Un importante número de estudios establece que la gran mayoría de los estudiantes de nivel universitario no entienden el concepto de probabilidad de un curso introductorio de estadística. (Garfield et al., 2000). Incluso, por considerarlo poco atractivo para los estudiantes, durante algunos años se creyó necesario eliminar este concepto de los planes de estudio de la formación universitaria (Tovar, Castillo y Marín, 2007; Díaz y Hernández, 2002). Los motivos de esta decisión se basaron en el hecho de que se aseguraba que, para algunos estudiantes, el curso de probabilidad es un curso aburrido que se limita al aprendizaje de procedimientos mecánicos y conceptos estadísticos descontextualizados. Para la educación universitaria, Díaz y Hernández (2002) muestran que los contenidos estadísticos no se enseñan con una adecuada profundidad y que la enseñanza de la estadística descuida el trabajo con datos reales y el ejercicio del razonamiento lógico. Aunado a esta problemática, Batanero (2001) ha encontrado que la formación específica de los profesores en este ámbito es prácticamente inexistente. Afortunadamente, pese a todas estas disyuntivas, la mayoría de las carreras incluyen temas de probabilidad en sus currículos (Friz, Sanhueza y Figueroa, 2011). En este contexto, según Friz, Sanhueza y Figueroa (2011), el trabajo actual y futuro de la estadística debiera centrar su atención en definir aprendizajes fundamentales para los diferentes niveles educativos y en las competencias que debe incluir el profesor para su enseñanza. En años recientes se nota una tendencia a renovar la enseñanza de la probabilidad y estadística al volverla más experimental con la intención de que pueda proporcionar a los estudiantes una experiencia estocástica desde su infancia (Batanero, 2005). Para los investigadores en la enseñanza de la probabilidad, es un reto hacer propuestas eficientes que ayuden a mejorar el aprendizaje de conceptos como el azar y la aleatoriedad (Jones, Langrall y Money, 2007), ya que a pesar de los esfuerzos didácticos de esta disciplina, prevalecen las dificultades que tienen los estudiantes para comprender su significado (Delmas, Garfield y Ann, 2003).

Un concepto que tiene un significado importante en la investigación sobre tópicos de probabilidad es el de probabilidad condicionada (Penalva, Posadas y Roig; 2010). Éste puede estudiarse mediante la utilización correcta de herramientas como tablas de contingencias o por medio del teorema de Bayes. En la investigación de Díaz y Batanero (2005) se muestra que las dificultades mostradas por estudiantes de bachillerato en relación con la comprensión de este concepto persisten aun después de la instrucción docente.

Con base en la idea metodológica denominada *creación de problemas* (problem posing), en la presente investigación se analiza el aprendizaje de los principales conceptos de probabilidad, en estudiantes universitarios, en un contexto de creación de juegos de azar que involucren riesgo. La característica de estos juegos es que, en su elaboración, estén involucradas reglas de probabilidad. Así, la creatividad del estudiante tiene un papel primordial dentro del desarrollo de su nuevo juego. En específico, con la creación de estos juegos, se pretende contribuir a resolver la problemática de aprendizaje relacionada con el razonamiento de conceptos que involucran azar y aleatoriedad.

Marco Conceptual: Creación de problemas

La noción de creación de problemas o “problem posing” ha sido explorada por algunos investigadores a partir del uso de diferentes perspectivas. Se ha encontrado que esta forma de enseñar matemáticas ayuda a la generación de nuevas formulaciones de un problema ya conocido, motiva la generación de nuevos problemas, hace que los estudiantes construyan una interpretación personal con base en una situación concreta y formulen un significado para los problemas en matemáticas (Duncker, 1945; Mamona-Downs, 1993; Malaspina, 2013a; Stoyanova y Ellerton, 1996).

Al respecto, Malaspina (2013b) propone que la creación de un problema en matemáticas se puede dar a través de la variación o de la elaboración. Este autor define la variación como el proceso para construir un problema nuevo al modificar la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático. Por otra parte, la elaboración es el proceso mediante el cual se construye un problema cuyo contexto contiene información que se obtiene por la selección o modificación de la información percibida en la situación original del problema, y que es factible de resolver mediante relaciones lógicas, dentro de un determinado entorno matemático. De esta forma, todo problema matemático, según Malaspina, tiene cuatro elementos fundamentales: Información, requerimiento, contexto y entorno matemático.

Para Malaspina (2013b) la creación y planteamiento de nuevos problemas modifica el aprendizaje de un concepto en particular. Este autor afirma que la creación de problemas por parte de los estudiantes contribuye a motivar el estudio, desarrolla la creatividad, fortalece las capacidades tanto para resolver problemas como para formular preguntas.

Metodología

Dos grupos de estudiantes universitarios, de la licenciatura en negocios internacionales, participaron en este estudio. Los profesores de ambos grupos impartían el mismo curso: Probabilidad y Estadística; ambos tenían 10 años de experiencia y se reunían de manera informal para compartir estrategias que beneficiaran el aprendizaje de sus estudiantes. La propuesta de solicitar a los estudiantes la elaboración de los juegos de azar fue, de hecho, el resultado de una de esas reuniones. Los profesores acordaron en evaluar el aprendizaje de los conceptos de la Unidad III de su curso por medio de solicitarles a sus respectivos grupos la elaboración de juegos de azar que implicaban riesgo. Los grupos fueron divididos en equipos de 4 a 5 integrantes. En este artículo se describen y muestran las propuestas de 3 de los 12 juegos presentados. Los juegos podían ser, o bien la variación de algún problema visto en clase, o bien la elaboración de un juego a partir de ejemplos que no necesariamente tienen que ver con juegos de azar. Los conceptos involucrados en cada juego debían ser los siguientes conceptos, mostrados en el libro de texto de Lind, Marchal y Wathen (2008): regla especial y regla general de la adición, regla especial y regla general de la multiplicación, regla general para eventos no independientes. Los profesores explicaron estas reglas en clase y, además, estudiaron el significado del análisis combinatorio en la aplicación de problemas relacionados con juegos de azar. De esta forma, lo que se pretendía era que cada equipo explicara cómo estos conceptos podían identificarse en el juego de azar propuesto. Las explicaciones de los estudiantes fueron grabadas.

Análisis de los resultados

Las propuestas de los tres equipos analizados se han dividido en subsecciones. Los nombres de cada subsección aluden al juego propuesto por cada equipo.

Las pelotas lanzadas del Equipo A

El equipo A utiliza el enfoque de probabilidad clásica y su juego consiste en solicitar al participante que intente meter dos pelotas dentro de 50 vasos, que fueron previamente enumerados del 1 al 50. El participante no puede ver el número con el que está marcado el vaso y debe, antes de lanzar la primera pelota, seleccionar una de las siguientes tres opciones:

a) Obtener un múltiplo de 6 (M6) o un múltiplo de 8 (M8);
b) Un múltiplo de 7 (M7) o un múltiplo de 14 (M14);
c) Un múltiplo de 10 (M10) o un múltiplo de 15 (M15).

Los integrantes del Equipo A calcularon las probabilidades para cada opción de la siguiente manera:
Para la opción a: $P(A)=$ M6, P(B)= M8 $P(A\ o\ B)=\frac{8}{50}+\frac{6}{50}-\frac{2}{50}=\frac{12}{50}$.
Para la opción b: $P(A)=$ M7, P(B)= M14 14 $P(A\ o\ B)=\frac{7}{50}+\frac{3}{50}-\frac{3}{50}=\frac{7}{50}$.
Para la opción c: $P(A)=$ M10 P(B)= M15 $P\ (A\ o\ B)=\frac{5}{50}+\frac{3}{50}-\frac{1}{50}=\frac{7}{50}$.

En otras palabras, este equipo utiliza la regla general de la adición para calcular sus probabilidades: $\mathrm{P\ (A\ o\ B\ )=P(A)+P(B)-P(A\ y\ B)}$.

Los estudiantes usan este concepto de probabilidad en su juego y modifican su aprendizaje para dar una aplicación práctica a los conceptos vistos en clase.

Vale mencionar que este juego es una variación de un ejercicio en libro de texto de los estudiantes y que, a su vez, fue enseñado en clase por uno de los profesores. El ejercicio consistía en responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que una carta de una baraja convencional, escogida al azar, sea rey o corazón? Para ayudar a los estudiantes a responder esta pregunta, en el libro aparecía la Tabla 1, mostrada a continuación:

Tabla 1. *Explicaciones al cálculo de probabilidades de extraer cartas de una baraja (tomado de Lind, Marchal & Wathen, 2008; p. 156)*

Carta	Probabilidad	Explicación
Rey	$P(A)=\ 4/52$	4 reyes en una baraja de 52 cartas
Corazón	$P(B)=\ 13/52$	13 corazones en una baraja de 52 cartas
Rey de corazones	$P\ (A\ y\ B)=1/52$	1 rey de corazones en una baraja de 52 cartas

De acuerdo con la fórmula $\mathrm{P\ (A\ o\ B\ )=P(A)+P(B)-P(A\ y\ B)}=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}\ o\ 0.3077$

El problema que se enseña a los estudiantes para que entiendan el uso de las reglas de la suma también tiene que ver con el azar. Cuando se pregunta a ellos la variación que hacen al juego, ellos explican que es más divertido y dinámico para los participantes lanzar pelotas como en un juego de feria que simplemente adivinar con cartas. Los integrantes del Equipo A explicaron el uso de reglas de probabilidad y dijeron que poner en práctica su creatividad los ayudó a entender mejor el uso de las reglas de probabilidad y la diferencia entre los conceptos mutuamente excluyente y no mutuamente excluyente, vistos en clase.

Las figuras coloreadas del Equipo B

El equipo 2 elaboró una tabla de contingencias (ver Figura 1) para calcular las probabilidades de ganar en su juego. El juego consiste en pedirle al participante que seleccione, sin ver, una de tres figuras (un triángulo, un círculo y un cuadrado) y, posteriormente, adivine el color de esta figura (tres posibles colores había: rojo, azul o naranja). Por ejemplo, una vez que el participante extrajo un cuadrado, debe adivinar su color. El cálculo de la probabilidad de es: P (B1/A3) = $\frac{3}{9}$, P(B2/A3) = $\frac{4}{9}$ y P(B3/A3) = $\frac{2}{9}$.

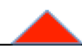
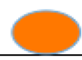
Figuras/Colores	Rojo B1	Azul B2	Naranja B3	Suma
A1 	2	3	1	6
A2 	4	2	3	9
A3 	3	4	2	9
Suma	9	9	6	24

Figura 1. Tabla de contingencias elaborada por estudiantes

Como puede observarse, la probabilidad más alta de ganar se obtiene si se escoge el color azul.

Los integrantes de este equipo hicieron una variación de un ejemplo del libro de texto, que no tiene relación con el azar, sino con el uso correcto de la tabla de contingencia. Este ejemplo es una encuesta de 150 adultos clasificados según su género y la cantidad de películas que vieron en el cine el mes pasado. Cada entrevistado se clasifica de acuerdo con dos criterios: la cantidad de películas que ha visto y el género. La tabla utilizada en el libro de texto, para este ejemplo, se muestra en la Tabla 2. Con ella, es posible calcular la probabilidad de entrevistar, por ejemplo, a un adulto mujer que haya visto una película el mes pasado.

Tabla 2. *Tabla de contingencias*
(tomado de Lind, Marchal & Wathen, 2008; p. 156)

Películas vistas/Género	Hombres	Mujeres	Total
0	20	40	60
1	40	30	70
2 o más	10	10	20
Total	70	80	150

En el ejemplo del libro se muestra la forma en que las reglas de adición y multiplicación se emplean en tablas de contingencias. Se hacen preguntas como: ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una persona que haya visto una película?

El tema del cálculo de probabilidades con el uso de tablas de contingencia fue difícil de comprender para los integrantes del Equipo B; sin embargo, el hecho de pedirles que elaboraran un juego de azar en cuya explicación se involucrar este tema, ellos se vieron forzados a estudiarlo con mayor detalle. Una integrante del equipo dijo que cuando el profesor explicó en clase el uso de la tabla, ella no entendió su uso:

Realmente no entendía de qué estaba hablando el profesor cuando explicaba la función de una tabla de contingencias. Cuando se asignó a nuestro equipo este tema para crear un juego de azar, no se me ocurría nada; pero cuando mis compañeros de equipo y yo creamos la propuesta [...] finalmente entendí el uso de la probabilidad condicional. Si me hubieran preguntado esto en un examen habría reprobado".

Como puede inferirse de este testimonio, la creación de un juego de azar ayudó a los integrantes del Equipo B a entender las reglas de la multiplicación a los estudiantes. Poner en marcha la creatividad del estudiante y calcular probabilidades en su *propio nuevo* problema ayuda al aprendizaje de la probabilidad.

El "Melate" del Equipo C

El Equipo C propuso un juego que consistía en mostrarle al participante tres cartas. En cada carta, previamente, se había dibujado una cuadrícula cuyos en cuyos cuadrados se habían escrito números del 1 al 15 (ver Figura 2). El participante debía elegir tres números de cada carta. A continuación, uno de los integrantes del Equipo C extraía, sin ver, uno de 15 papeles numerados que habían sido colocados en una urna. El integrante repetía esta extracción tres veces. Si la terna obtenida por el integrante del equipo coincidía con una de las ternas elegidas por el participante (no importaba el orden de los números extraídos), éste ganaba un premio.

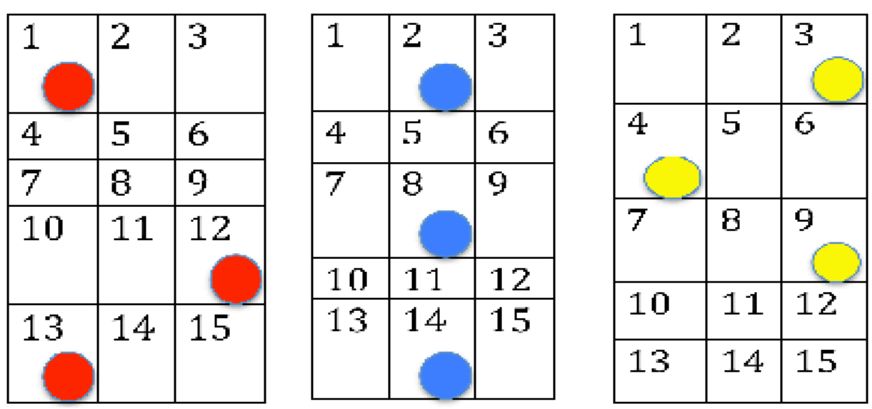


Figura 2. Ejemplo de tres combinaciones seleccionadas por un participante hipotético del juego del Equipo C

El juego elaborado por el Equipo C no fue una variación (en el sentido de Malaspia, 2013) de un ejemplo o problema visto en clase. De hecho, las bases de este juego son similares a las del conocido juego mexicano *Melate* (en el idioma inglés, este juego se conoce como *Pick 3*). Sin embargo, lo novedoso de este juego está en el hecho de que los integrantes del equipo involucraron reglas de contar para calcular la probabilidad que tenía el participante de ganar. Esto es relevante, pues los profesores de probabilidad explican la combinación solo como una regla para contar, pero no como una herramienta para calcular probabilidades. Aun cuando en el *Melate* se utiliza la combinación para calcular probabilidades, los integrantes de este equipo comentaron que, antes del curso de probabilidad, creían que la probabilidad de cada terna era de $P(A) = \frac{1}{15}$, sin tomar en cuenta las combinaciones que disminuyen ampliamente la posibilidad de ganar. Con la creación de este juego, ahora los integrantes saben que la probabilidad de que cada terna sea la ganadora es de $P(A) = \frac{1}{455}$, y de que la probabilidad de ganar es de $P(A) = \frac{3}{455}$. En este sentido, una integrante de este equipo mencionó:

Es tentativo el juego, pero es una forma de engañar [al participante] ya que la probabilidad de ganar prácticamente es muy poca; porque como de 15 números [los participantes] escogen 3, la gente se cofunde y piensa que tiene muchas posibilidades de ganar. Y en realidad no, ya que son 455 combinaciones y, de esas 455, tienes que escoger tres, con eso prácticamente es nula la probabilidad. Se puede pensar que nuestro juego no es muy novedoso porque el Melate existe. Aquí lo importante es que aprendimos a aplicar la probabilidad en combinaciones; sabiendo nuestras posibilidades difícilmente compraremos un boleto para participar en este tipo de lotería.

Conclusiones

En este artículo se analizaron las explicaciones proporcionadas por estudiantes de universidad en el momento de presentar juegos de azar que involucraban riesgo, elaborados por ellos mismos, y después de haber recibido clases sobre el concepto de probabilidad. Como resultado principal se observa que esta estrategia de enseñanza provoca un cambio en la forma de comprender este concepto, además de ser una forma más activa de aprenderlo. Las explicaciones que de sus juegos debían proporcionar los estudiantes provocan el desarrollo de su creatividad, fortaleciendo su capacidad para resolver problemas y formular preguntas surgidas de sus nuevas propuestas. Aún más, derivado de esta propuesta didáctica, se observan algunas ventajas relacionadas con la enseñanza no solo del concepto de probabilidad, sino también de la estadística. Una de ellas, por ejemplo, es la de producir una práctica pedagógica en un contexto poco tradicional y fuera del aula de clase que motiva al estudiante a reflexionar sobre la importancia de estudiar con minuciosidad los conceptos involucrados en juegos tan conocidos como los que se organizan en casas de apuesta o en los juegos de feria organizados (tiro con dardos, por ejemplo) por gobiernos locales. Otra de las ventajas de esta estrategia es que el estudiante identifica los objetos de estudio en la práctica y, con el paso del tiempo, los sigue reconociendo. Estudiantes de cursos más avanzados recuerdan lo que hicieron en la feria de probabilidad y lo comentan con sus ex profesores. Difícilmente recuerdan lo que contestaron en un examen de estadística.

Más investigación es necesaria para indagar cómo la creación de problemas de azar puede permitir que los estudiantes se planteen nuevas preguntas. Preguntas como, por ejemplo, ¿y si mi pelota cae en un 8? ¿y si escojo el color azul? ¿o si elijo tal o cual combinación? pueden hacer que el estudiante profundice en el significado de conceptos relacionados con el de probabilidad. Al dar respuesta a sus propias propuestas, el estudiante modifica su aprendizaje y elabora nuevos problemas o realiza variaciones con la información que le proporciona el docente.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

Delmas, R., Garfield, J., y Ann, O. (2003). Assessing students´ conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), 22-38.

Díaz, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista.* México: McGraw Hill.

Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs, 58*(270), 1-113.

Friz, M., Sanhueza S., y Figueroa, E. (2011). Concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la estadística. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13*(2), 113-131.

Garfield, J., y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 44-63.

Garfield, J., Hogg, B., Schau, C., y Whittinghill, D. (2000). Best practices in introductory statistics. Position paper prepared for the Undergraduate Statistics Education Initiative. First Courses in Statistical Science Working Group. Recuperado el 2 de diciembre de 2014 de http://www.amstat.org/education/pdfs/usei_1st.pdf

Jones, G. A., C. W. Langrall y E. S. Money (2007), Research in probability. Responding to classroom realities, en F. K. Lester (ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Charlotte: Information Age Publishing.

Lind, D.; Marchall, G.; Wathen, S. (2008). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. México: Mc Graw Hill.

Malaspina, U. (2013a). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. UNO, *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 63*, 41-49.

Malaspina, U. (2013b). Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. UNION*, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 34*, 141-149.

Mamona-Downs, J. (1993). On anaysing problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. Ill, pp. 41-47). Tsukuba (Japan): International Group for the Psychology in Mathematics Education.

Penalva, Posadas y Roig (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática, 22* (3), 23-54.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En Clarkson (Ed.), *Technology in Math. Education* (pp. 518–525). Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Tovar, J. Castillo, H. Y Marín, M. (2007). Preconcepciones de estudiantes de la Pontificia Universidad Javeriana Cali sobre el curso de Estadística. *Pensamiento Psicológico, 3*(9), 61-78.