

DECISIONES EN EL CAMPO ECONÓMICO APLICANDO MODELOS MATEMÁTICOS

María Rosa Rodríguez, Sandra Noemí Franco, Gustavo Ariel Sota

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad Nacional de Tucumán. (Argentina)

mrrodriguez@face.unt.edu.ar, sandranfranco@hotmail.com, gustavosota1@hotmail.com

Resumen

El lenguaje matemático aporta a las Ciencias Económicas relaciones entre variables, explicando fenómenos a través de modelos matemáticos que interpretan la realidad social. Estos modelos aportan la estructura conceptual necesaria para admitir predicciones de validez general. La Matemática es una herramienta fundamental para consolidar el conocimiento y tomar decisiones óptimas con el objetivo fundamental de todo empresario el de lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido

El propósito de este curso es mostrar la importancia de la Matemática y el requerimiento del Análisis Marginal para expresar su vinculación con decisiones en el campo económico – social, contextualizando los conceptos a través de formulaciones algebraicas que conducen de manera rápida y precisa a importantes decisiones e interpretaciones económicas.

Palabras Claves: contribución marginal, mark up, optimizaciones

Abstract

Mathematical language provides relations between variables to Economic Sciences, explaining phenomena through mathematical models that interpret social reality. These models provide the conceptual framework necessary to support predictions of general validity. Mathematics is a fundamental tool to consolidate knowledge and make optimal decisions with the fundamental objective of every entrepreneur: to achieve greater profitability considering the invested capital. The purpose of this course is to show the importance of Mathematics and the requirement of Marginal Analysis to express its connection with decisions in the economic - social field, contextualizing the concepts through algebraic formulations which lead quickly and accurately to important decisions and economic interpretations.

Keywords: marginal contribution, mark up, optimizations

■ Introducción

El inicio y el desarrollo de una actividad económica, está sujeto a la incidencia de factores endógenos y exógenos, al comportamiento de los mercados internos y externos, etc. Estos elementos, de manera aislada o concurrente, condicionan el quehacer económico.

La Educación Matemática hace hincapié en el desarrollo del pensamiento lógico-formal, procurando lograr personas competentes para la resolución de problemas. Esto es importante en el quehacer

económico, donde los empresarios deben adoptar decisiones óptimas para lograr mayores beneficios. Toda actividad requiere el uso de algoritmos, procesos lógicos, estimación de resultados, construcción de modelos matemáticos y utilización de procedimientos del cálculo.

La Matemática en las Ciencias Económicas es una herramienta fundamental para adquirir y consolidar el conocimiento. Porque necesita definir las variables de interés en cada problema; establecer las hipótesis sobre sus comportamientos y determinar las relaciones entre ellas. En segundo lugar, el lenguaje matemático explica los fenómenos económicos y formula modelos que interpretan la realidad social. Estos modelos aportan la estructura conceptual necesaria para obtener predicciones válidas. Cuanto más precisas sean las posibilidades de medir las variables de interés mayor será su contenido matemático.

La presente investigación tiene como propósito la descripción del proceso de análisis, implementación y resultados obtenidos de un tema económico basado en modelación matemática. Para ello se consideran dos aspectos. En el primero se detallan los fundamentos teóricos y las actividades en cada uno de los casos considerados en los diferentes dominios de modelación elegido. Luego, se describe el proceso de descripción e implementación de los casos (Rodríguez y Quiroz, 2014).

El Análisis Marginal es una herramienta fundamental para optimizar el beneficio de una empresa vinculado con la toma de decisiones en la formación de costos y precios. Estudia la generación de utilidades en una empresa, en función de los aportes individuales de cada producto tangible o intangible (servicio) elaborado. Además, modela situaciones sobre los diferentes niveles de producción que persigue el empresario a fin de lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido. Dichas decisiones serán racionales y convenientes sólo si el beneficio excede el costo adicional de hacerlo.

El objetivo de este Curso es mostrar la importancia de la Matemática y el uso del Análisis Marginal en la optimización del beneficio de una empresa cuando existen cambios en el comportamiento de los costos fijos o en los costos variables unitarios o en el incremento de las ventas debido a la disminución en los márgenes de marcación o Mark Up.

El cambio en los costos fijos produce sucesivos aumentos de la producción, el aumento en los costos variables unitarios puede deberse a incrementos en los incentivos a la producción y por último la empresa lograría aumentar sus ventas si aplica rebajas sistemáticas de precios. Se aplicaron las distintas situaciones en casos reales, solicitados por directivos de empresas con actividades en la provincia de Tucumán, Argentina.

Para optimizar el beneficio de las empresas se integró la teoría con la práctica y se construyeron modelos matemáticos que mostraron las variaciones en los costos y beneficios de una empresa frente a sucesivos cambios en los niveles de producción.

En este curso se procurará dar sentido y contextualizar los conceptos, a través de modelos matemáticos que aporten valiosa información y conducen de manera rápida y precisa a importantes decisiones e interpretaciones económicas.

■ Conceptos Económicos

Costo Total

Toda empresa tendrá una serie de costos fijos y de costos variables.

1. *Costos Fijos, Constantes o Estructurales*: son aquellos costos totales que se mantienen casi constantes ante cambios en el nivel de actividad. No dependen del nivel de producción y/o ventas de la empresa y son independientes del volumen del negocio..
Los costos fijos no son permanentemente fijos, sino que llegado a ciertos niveles de actividad pueden variar.
2. *Costos Variables*: son los que aumentan o disminuyen frente a cambios en el nivel de actividad. Dependen del volumen de producción y/o ventas de la compañía.
Esta clasificación de los costos no es absoluta. Algunos se mantienen constantes y otros experimentan modificaciones al pasar de un nivel de producción a otro. En cualquier caso existen modificaciones en los costos.
El costo total es la suma del costo fijo total más el costo variable total: $CT = CF + cv \cdot Q$ donde el costo variable total es el producto entre el costo variable unitario (cv) y la cantidad producida (Q).

Costos y Beneficios

El costo-beneficio es una técnica importante dentro de la teoría de decisión, basada en el principio de obtener los mejores resultados al menor esfuerzo invertido. Si los beneficios superan el costo son exitosos, caso contrario fracasan. Además, es útil en el análisis de las ventajas de un proyecto de inversión. El proyecto puede consistir en el desarrollo de nuevos productos, adquisición de nuevas maquinarias o cambios en los niveles de producción.

La decisión de aumentar la capacidad de una actividad depende de que el nuevo nivel de producción brinde mayor beneficio que el que se obtiene ocupando la capacidad actual.

El beneficio o utilidad se define: $B = I - CT$ donde el ingreso I es la cantidad que recibe una empresa por venta de productos o servicios.

Si pv es el precio de venta unitario: $B = pv \cdot Q - (CF + cv \cdot Q) \Leftrightarrow B = (pv - cv) \cdot Q - CF$

Análisis Marginal

Una herramienta central de la investigación económica es conocida como *análisis marginal*, que analiza el cambio en los costos y beneficios frente a cambios en las acciones. La cuestión central es si los beneficios esperados de la acción superan el costo añadido.

El análisis marginal contribuye a equilibrar los costos y beneficios de las acciones adicionales, ya sea para producir más o consumir más, aumentando la utilidad.

Se recurre al análisis marginal cuando se presentan modificaciones en alguno de los términos de la expresión del Beneficio o cuando la nueva utilidad supera el costo añadido.

$$B = pv * Q - cv * Q - CF \quad \text{ó} \quad B = (pv - cv) * Q - CF$$

El factor $cm = pv - cv$ recibe el nombre de *contribución marginal unitaria* de un producto y muestra el modo en que contribuyen los precios de los productos o servicios para cubrir los costos fijos y generar utilidad.

Cuando se producen cambios en los costos variables unitarios y en los precios de venta, el estudio se reduce a las modificaciones en la contribución marginal unitaria. Su disminución se debe, especialmente cuando existe aumento de los costos variables unitarios o disminuciones de los precios de venta, que afecta a toda la actividad.

El producto de la contribución marginal unitaria por el número de unidades producidas o vendidas da la contribución marginal total (CM) del producto.

Aportes de la CM

Como $B = cm \cdot Q - CF$ entonces $B = CM - CF$ y se pueden dar las siguientes alternativas:

1. Si la contribución marginal total absorbe el costo fijo, deja un "margen" para la utilidad o beneficio. $CM > CF$ $B \Rightarrow$
2. Cuando la contribución marginal total es igual al costo fijo, no deja ganancia, la empresa está en su punto de equilibrio y su beneficio es nulo. $CM = CF$ $\Rightarrow 0$
3. Cuando la contribución marginal total no alcanza a cubrir los costos fijos, la empresa puede seguir trabajando a corto plazo ya que la contribución marginal absorbe parte de los costos fijos. $CM < CF$ Hay *Pérdida* \Rightarrow
4. La situación más crítica se da cuando la contribución marginal unitaria es negativa. En este caso extremo, se debe tomar la decisión de no continuar con la elaboración de un producto o servicio. $cm < 0$ o sea $pv < cv$

El concepto de contribución marginal es muy importante en las decisiones de mantener, retirar o incorporar nuevos productos de una empresa, por la incidencia que tienen en la absorción de los costos fijos y la capacidad de generar utilidades.

La disminución de cm surge cuando aumentan los costos variables unitarios o reducen los precios de venta, que afectan a toda la actividad o por tramos.

Las modificaciones pueden afectar a toda la actividad con la misma magnitud o bien afectar a distintos tramos de la actividad con magnitudes diferentes para cada tramo.

Se desarrollarán tres situaciones comerciales que requieren decidir sobre el aumento de producción de una actividad, cuando se presentan modificaciones en los costos fijos, disminución en la contribución marginal unitaria y rebaja del precio de venta o Mark Up.

■ Desarrollo de Aplicaciones

Como parte de la investigación, se realizó una consulta entre varias empresas de Tucumán, Argentina, interesadas en realizar cambios en la estructura de sus productos. Así, surgieron tres situaciones distintas a decidir: cuando existen sucesivos aumentos de la producción, aumento en los costos variables unitarios debido a incrementos en los incentivos a la producción y el aumento de sus ventas se debe a rebajas sistemáticas de precios.

1er Caso: Modificaciones de los Costos Fijos

Se construirán modelos matemáticos que muestran las variaciones en los costos y en los beneficios de una empresa frente a sucesivos cambios en los niveles de producción.

Entre las empresas consultadas en la provincia se seleccionó una fábrica de parquet que intenta modificar su estructura debido al gran incremento en la demanda de pisos y estima que la adquisición de nuevos equipos le permitirá incrementar su producción, generando consecuentemente un aumento en los ingresos. No obstante, las decisiones tomadas llevarían inevitablemente a un aumento en los costos de estructura, los cuales deberán analizarse para evaluar la ampliación más conveniente.

En la situación actual la fábrica de parquet produce $Q_1 = 1000$ unidades, mientras que la compra del nuevo equipamiento le permitiría duplicar sus niveles de producción a $Q_2 = 2000$. Los Costos Fijos actuales son $CF_1 = \$150.000$ y se calcula que los Costos Fijos con la nueva estructura alcanzan a $CF_2 = \$250.000$. El Precio de venta unitario es pv de $\$250/\text{unidad}$, el Costo variable unitario cv de $\$50/\text{unidad}$. Por lo tanto la Contribución marginal unitaria cm es de $\$200/\text{unidad}$.

La inversión quedará plenamente justificada si el nuevo nivel de producción permite superar el beneficio derivado de la producción actual y cubrir los nuevos costos fijos.

El beneficio con la máxima producción actual es $B_1 = 1.000 * 200 - 150.000 = 50.000$

Frente a un cambio en el nivel de producción, la cantidad mínima es $Q = \frac{B + CF}{cm}$

Entonces, el nivel mínimo que justifique una inversión que incremente el nivel de producción actual, de 1000 unidades, es $Q_{n_1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm}$ donde

Entonces: $Q_{n_1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm} = (50.000 + 250.000) / 200 = 1.500$

La nueva estructura debe superar la cantidad de 1.500 unidades y el beneficio que aporta esa producción es: $B_{n_1} = 1.500 * 200 - 250.000 = 50.000$

Que es el mismo beneficio que se alcanza usando al máximo la estructura actual. La compra de nuevo equipamiento se realizará, sólo si aumenta el beneficio esperado ($\$50.000$), que se logrará cuando se produzcan y vendan más de 1500 unidades.

El resultado obtenido de producir 1500 unidades se denomina *Punto de Resultado Indiferente (PRI)* que representa el nivel de actividad que arroja un beneficio igual al que se consigue usando al máximo la capacidad de la estructura anterior.

Para sucesivos aumentos de la estructura se consideran las variaciones en costos e ingresos.

El Nivel de Producción máxima con un 2do aumento de la estructura $Q_3 = 3000$ unidades, un Costo fijo de la nueva estructura CF_3 de $\$300.000$ y sin cambios en la cm se calcula su beneficio. Para que sea conveniente abordar el segundo tramo, debe ser superado el Punto de Resultado Indiferente $Q_{n_1} = 1500$

Con el primer aumento de la estructura, el beneficio usando la máxima cantidad (2000 unidades) es:

$B_2 = Q_2 * cm - CF_2 = 2000 * 200 - 250.000 = 150.000$.

El PRI con el segundo aumento es:
$$Q_{n_2} = \frac{B_2 + CF_3}{cm} = \frac{150.000 + 300.000}{200} = 2250$$

La nueva estructura debe superar la cantidad de 2250 unidades y el beneficio que aporta esa producción es:
$$B_{n_2} = 2250 * 200 - 300.000 = 150.000.$$

Convendrá realizar cualquier inversión, sólo si aumenta el beneficio esperado (\$150.000) que se logra cuando se fabrican y se venden más de 2250 unidades, que es el PRI.

En este último tramo, el beneficio obtenido usando al máximo este aumento de la estructura (3000 unidades) es:
$$B_3 = Q_3 * cm - CF_3 = 3000 * 200 - 300.000 = 300.000$$

Estos cálculos permiten visualizar el comportamiento de los distintos parámetros cuando se producen nuevas y mayores ampliaciones de la estructura.

Para el caso de los sucesivos aumentos de la producción de piso de parquet, se observa que el tramo del nivel de actividad entre 1100 y 1200 unidades no es conveniente, ya que el resultado se convierte en quebranto. Y aunque el beneficio se recupera a partir de las 1250 unidades, no supera al de las 1000, sino recién cuando excede el nivel de las 1500 unidades.

Si el nivel de actividad mínimo que justifica la nueva estructura está muy cerca del nivel máximo que ella permite, puede resultar desaconsejable la inversión, ya que, ante la necesidad de un pequeño aumento en la producción, sería necesario aumentar la estructura.

2do Caso: Contribuciones Marginales Decrecientes

Una fábrica de cosméticos de la provincia de Tucumán nos consultó sobre la toma de decisiones en la producción de una máscara de pestañas cuando aumenta el costo variable unitario, debido a incentivos a sus operarios.

Los dueños realizaron incrementos en el incentivo a la producción en sus operarios y quieren conocer si se incrementa el beneficio para la empresa, aumentando la producción.

Según sus directivos los costos fijos son de \$70.000 mensuales y el precio de venta de su producción es de \$250 cada unidad. El costo variable unitario se compone de \$100 de materia prima más un incentivo a la producción cuyo valor por unidad producida aumenta de a \$20 cada vez que son superadas las 400, 700 y las 1000 unidades.

Como el *pv* no experimenta cambios y los *cv* aumentan entonces las *cm* decrecen.

En la empresa de cosméticos, se presenta la producción en tres tramos, acorde a un costo variable unitario que aumenta. El concepto económico que prima es el de Punto de Equilibrio que es el nivel de actividad en el cual la empresa no tiene beneficios ni pérdidas.

Para determinar si se puede lograr beneficio en cada tramo, se calculan los Puntos de

Equilibrio en cada uno:
$$Q_1 = \frac{70000}{130} = 539 \quad Q_2 = \frac{70000}{110} = 636 \quad Q_3 = \frac{70000}{90} = 778$$

El Punto de Equilibrio del primer tramo corresponde a 539 unidades, esto no es posible porque la *cm* ya no es de \$130 sino sólo de \$110. En el segundo tramo es de 636 unidades que corresponde a la *cm* de

\$110; por lo tanto este Punto de Equilibrio existe en la realidad de la empresa. En el último tramo, el Punto de Equilibrio es de 778 unidades y también es un dato real porque la cm es realmente de \$90. En consecuencia, existen dos puntos de equilibrio, uno en 636 unidades y el otro en 778 unidades. Por lo tanto, la empresa no puede operar en el primer tramo porque sólo obtendría quebrantos, mientras que en los siguientes tramos el beneficio sí es posible.

En el segundo tramo el máximo nivel es de 700 unidades con una contribución marginal unitaria de \$110 por lo tanto su beneficio es: $B_2 = 700 * 110 - 70000 = \7000

Es importante saber si aumenta el beneficio de la empresa en el tercer tramo Para ello se recurre a la

expresión $Q = \frac{B + CF}{cm}$ donde $Q_{n3} = \frac{B_2 + CF}{cm_3} = \frac{7000 + 70000}{90} = 856$

Por lo tanto, convendrá aumentar la actividad para pasar al tercer tramo si se pueden superar las 856 unidades de máscara de pestañas. En este nivel se recupera el máximo beneficio posible dentro del segundo tramo.

3er Caso - Rebaja del Precio de Venta por Margen de Marcación (Mark up)

Margen o Márgenes es una palabra que se usa mucho en los negocios y está relacionado con el concepto de ganancia en la venta. El más sencillo es el margen de marcación o Mark Up, que es una estrategia de fijación y ajuste de precios.

El Mark Up es un índice que se aplica sobre el costo de adquisición de un producto y permite determinar con precisión el precio de venta cubriendo todos los costos y gastos y asegurando un margen de ganancia, aun cuando el cliente pida descuento.

Los comerciantes casi siempre fijan sus precios considerando el costo de adquisición más el margen de marcación (Mark Up). Si un comerciante compra a sus proveedores un producto a \$1.000 y le aplica un Mark Up del 100%, significa que lo venderá a \$2.000. Esto es costumbre en la mayoría de los negocios.

Un negocio de marroquinería que vende carteras para damas con costos fijos mensuales de \$200.000, está evaluando la posibilidad de aumentar sus ventas a través de una política apoyada en ofertas sistemáticas a precios rebajados. Su margen de marcación sobre los costos de adquisición es del 100% y su venta total mensual asciende a \$500.000. Algunos estudios de mercado le permitieron estimar las siguientes posibilidades: si se disminuye el margen al 90% podría aumentar sus ventas a \$ 600.000; si disminuye al 80%, podría aumentar a \$700.000. Nos solicitaron asesoramiento sobre la política más conveniente.

Para obtener el precio de venta, al costo se le agrega el margen $pv = cv (1 + m)$ donde $m =$ margen

de marcación. Luego $\frac{pv}{cv} = 1 + m$ (1)

Se considera el Punto de Equilibrio: de $B = cm \cdot Q - CF$ y si $B = 0 \Rightarrow CF = cm \cdot Q$

De $cm = pv - cv \Rightarrow \frac{pv}{cv} cm = cm (1 + m) \Rightarrow pv \left(\frac{pv}{cv} - 1\right) = cm (1 + m)$

$pv \cdot m = cm (m + 1)$ luego $pv = \frac{m + 1}{m} \cdot cm$ resulta $pv \cdot Q = \frac{m + 1}{m} \cdot cm \cdot Q$

$I = \frac{CF (m + 1)}{m}$ es el Punto de Equilibrio en términos monetarios con Mark Up.

El Punto de Equilibrio en el primer tramo es $I_1 = \frac{200000 \cdot 2}{1} = 400.000$

El Beneficio Máximo del 1er tramo $B_1 = \frac{\text{Ventas M}á\text{x Primer Tramo} \cdot m}{1 + m} - CF = 50.000$

El PRI del segundo tramo es $I_2 = \frac{(CF + B_1) (1 + m)}{m}$ y resulta $I_2 = 527.778$

El Beneficio máximo en el segundo tramo: $B_2 = \frac{600000 \cdot 0.90}{1.90} - 200000 = 84.211$

El PRI en el tercer tramo es $I_3 = \frac{(200000 + 84211) 1.80}{0.80} = 639.474$ y $B_3 = 111.111$

El negocio puede operar con beneficios a partir de \$400.000 de ventas, situación que es posible dentro del primer tramo. Si el estudio de mercado es acertado, la alternativa de vender rebajando al 90% en el segundo tramo, es conveniente superando los \$527.778 de ventas. Pues, a menores niveles el beneficio es menor que el que se obtiene operando al máximo en el tramo anterior. Análogamente, es conveniente disminuir al 80% si supera el nivel de ventas \$639.474. El Mark Up es un caso de contribuciones marginales decrecientes por tramos porque estima cuánto podrían aumentar sus ventas si aplica rebajas sistemáticas.

■ Conclusiones

Con el estudio analítico se visualiza el comportamiento de los distintos parámetros frente a modificaciones en el nivel de actividad.

Con este Curso se procura dar sentido y contextualizar los conceptos y, sobre todo, revelar la inmensa lógica empresarial que tiene la sencillez de su origen y la facilidad de comprensión de sus modelos matemáticos. Estos modelos aportan una valiosa información, que lleva a importantes decisiones e interpretaciones económicas. También, muestran la significación y utilidad para el empresario, permitiéndole evaluar el impacto económico de sus decisiones, de manera rápida y precisa. El objetivo fundamental de todo empresario es lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido.

El Análisis Marginal es una herramienta muy útil para la toma de decisiones en el ámbito empresarial, tanto en el caso de producción simple como de producción múltiple. También estudia los casos de modificaciones en la contribución marginal unitaria debido a cambios en los precios de venta.

Este trabajo es parte de una investigación en curso y se continuará sobre los casos en que sufren modificaciones varios parámetros simultáneamente.

Otras herramientas que contribuyen a una mayor visualización, comprensión del problema e interpretación de los resultados son las representaciones en cuadros y gráficas. Son muy explicativas las representaciones gráficas de las contribuciones marginales totales vs los costos fijos, diferentes a las usuales de ingresos vs costos totales.

Este Curso proporciona a los docentes de Matemática del área económica una modelización accesible aportando valiosa información y promoviendo importantes decisiones, de manera rápida y precisa.

■ Referencias Bibliográficas

- Camacho Peñalosa, E. et al. (2006). *Fundamentos de Cálculo para Economía y Empresa*. 1ra Edición. Madrid: Delta Publicaciones.
- Rodríguez, R. y Quiroz S. (2015). Elementos de Diseño para una Clase de Matemática a través de Modelación Matemática. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28. 993-1000. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2006). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid: Pearson Educación.
- Yardín, A.; Rodríguez Jáuregui, H. y Bottaro, O. (2004). *El Comportamiento de los Costos y la Gestión de la Empresa*. Buenos Aires: La Ley
- Yardín, A. (2010). *El Análisis Marginal, la Mejor Herramienta para Tomar Decisiones sobre Costos y Precios*. Buenos Aires: Osmar Buyatti.