# DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDACTICAS PARA PROMOVER LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

**Daniel Rubal Valencia, Guadalupe Villaseñor Gándara**
Universidad de Sonora. (México)
daniel.ruvalencia@gmail.com, gviga@mat.uson.mx

**Resumen**

En este trabajo se presentan avances de la propuesta de diseño de una Secuencia de Actividades Didácticas, cuyo propósito es promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria en estudiantes de nivel superior. Partimos de la problemática detectada en algunas investigaciones respecto a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales, la cual está basada en promover un aprendizaje memorístico de definiciones y procedimientos matemáticos. Fundamentamos nuestro trabajo con la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) y la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS).

**Palabras Clave:** educación matemática realista, derivada de una función, contextos reales, registros de representación semiótica

**Abstract**

This paper shows a preview on the design proposal of a sequence of didactic activities, which is aimed at fostering the construction of the notion of ordinary differential equation in higher education students. We start from the problem detected in some investigations, regarding the teaching of Differential Equations, which is focused on promoting a rote learning of mathematical definitions and procedures. We base our work on the theory of Realistic Mathematics Education (RME) and the Theory of Semiotic Representations (TSR).

**Key words:** realistic mathematics education, derivative of a function, realistic contexts, register of semiotic representation

## Introducción

El área de Ecuaciones Diferenciales cuenta con muy pocas investigaciones desde el punto de vista de la Educación (Rasmussen, 2016). En particular, uno de los aspectos que se destaca en este trabajo, es la importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en el nivel superior. Así como el uso de la tecnología, pues como menciona Perdomo (2011) el usar herramientas tecnológicas en las EDO, facilita el proceso de aprendizaje del estudiante.

En específico, nuestro interés está centrado en abonar a una de las problemáticas detectadas en la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, relacionada con la memorización de definiciones y procedimientos matemáticos. Referido a esto, Perdomo (2011) menciona que el enfoque de enseñanza habitual en el que se introduce el concepto de EDO a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución suponen un aprendizaje que no perdura en el tiempo si este no se refuerza con razonamientos que produzcan dichos métodos. Además, Nápoles (2003) menciona que, en la enseñanza de las EDO, los conceptos que rodean al tema son evadidos o disfrazados con una fórmula o algoritmo, lo que no permite su comprensión, y hace creer a los estudiantes y en ocasiones a los profesores, que la fórmula es el concepto mismo.

Asimismo, se menciona el problema que existe por parte de los estudiantes de poder relacionar una ecuación diferencial ordinaria con la derivada de una función. Con respecto a esto, Perdomo (2011) menciona que gran parte de los estudiantes muestran dificultades para poder establecer una conexión entre estos dos conceptos.

A partir de ello, el objetivo de nuestro trabajo es diseñar una secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria de forma integrada con la noción de derivada. La secuencia se aplicará a estudiantes de ingeniería y estará basada en la resolución de problemas, la cual, a su vez será mediada con el uso de tecnología.

## Antecedentes de investigación

Para el desarrollo del trabajo, se hace una revisión de varios artículos, los cuales hacen mención de los aspectos a tratar aquí, en específico, de la problemática detectada. En uno de ellos, Dullius (2009) resalta la importancia que se le ha dado a la representación algebraica en los cursos de ecuaciones diferenciales, de tal manera que los estudiantes llegan a dominar los métodos de solución de éstas, pero no la concepción que hay detrás.

Uno de los referentes importantes en nuestro trabajo es el Proyecto Inquiry-Oriented Differential Equations (IO-DE), el cual tiene su fundamento en la Educación Matemática Realista. El equipo de investigación que participa en este proyecto es numeroso, uno de los principales miembros es Rasmussen (2016). Trabajan en torno a tres objetivos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Esos objetivos son:

- Reinvención por parte de los estudiantes de muchas de las ideas y métodos matemáticos fundamentales.
- Tareas desafiantes, que reflejen situaciones reales.
- Balance entre el tratamiento de los enfoques analítico, numérico y gráfico.

## Consideraciones teóricas

Consideramos como elementos teóricos que dan sustento a este trabajo a la Educación Matemática Realista (EMR) basada en las ideas de Freudenthal (1968), así como a la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS) de Duval (1993).

De la Educación Matemática Realista se toman los seis principios fundamentales que menciona Alsina (2009):

- De Actividad: En este principio, la idea fundamental de Freudenthal es que la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola. Con relación a ello, Freudenthal (1968) menciona que "matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma" (p. 7).

- De Realidad: La característica más importante que se aborda en este principio es que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, y por contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos. Para esto, Freudenthal (1991) dice, "yo prefiero aplicar el término "realidad" a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario" (p. 17).

- De Reinvención Guiada: En este principio, se entiende como reinvención guiada al proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal. Freudenthal (1991) menciona que "la reinvención guiada significa encontrar un balance entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar" (p. 48).

- De Niveles: La EMR admite que el estudiante pasa por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1991) son: situacional, referencial, general y formal.

    - En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

    - En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

    - El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.

    - En el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.
    - La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Freudenthal, 1991).

- De Interacción: En la Educación Matemática Realista, se considera el aprendizaje de la matemática como una actividad social. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados (Bressan, 2010).

- De Interconexión: La Educación Matemática Realista no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo. Freudenthal (1991) menciona que la resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas.

De la Teoría de Representaciones Semióticas se toman lo que son las representaciones semióticas que Duval (1993) define como las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (p. 175). Además, agrega que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.

- El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro.

- La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

## Aspectos metodológicos

En este apartado, se abordan las principales consideraciones para el diseño de una secuencia de actividades didácticas, contemplando tanto la implementación de la propuesta como el análisis a posteriori de ésta. Para ello, se consideran la Educación Matemática Realista y la Teoría de las Representaciones Semióticas, como las guías fundamentales para el desarrollo de las tres etapas: diseño, implementación y análisis.

Etapa 1: Diseño

En esta etapa, se hace apoyo del principio de realidad y de actividad que se destacan en la Educación Matemática Realista y se aúnan a estos, los tratamientos y conversiones en y entre los distintos tipos de representaciones semióticas de la Teoría de las Representaciones Semióticas, así como el uso de recursos tecnológicos los cuales permiten una exploración dinámica de las conexiones entre los diferentes registros de representación.

Se busca que el diseño cumpla con el principio de reinvención guiada que es fundamental para la EMR, para eso se desarrollan las siguientes fases:

- Fase 1: Búsqueda y selección de contextos

Zolkower, Bressan y Gallego (2006) afirman que "los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos" (pp. 11-33). Además, Freudenthal (1991) señala que "un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno para ser matematizado" (p. 73).

- Fase 2: Emergencia de modelos

Zolkower, Bressan, Gallego y Pérez (2016) afirman que "los modelos en la EMR no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, comprueban relaciones" (p. 4).

- Fase 3: Trabajar con los diferentes tipos de representación semiótica

Duval (1993) señala que cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo.

- Fase 4: Promover el uso del software matemático GeoGebra

Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki, y Ballés (2014) señalan que "GeoGebra permite trabajar con diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático a través de sus distintas vistas" (p. 2169).

- Fase 5: Trabajo individual y colectivo

Heuvel-Panhuizen (2002) afirma que "la educación debe ofrecer a los estudiantes la oportunidad de compartir sus estrategias e inventos entre sí" (p. 13).

Etapa 2: Implementación

Para esta etapa, la implementación de la propuesta, se siguen los principios de reinvención guiada y de interacción, que se plantean en la Educación Matemática Realista. Por tanto, el profesor tendrá un papel de suma importancia en el desarrollo de esta parte del trabajo.
Zolkower, et al. (2006) señalan que los docentes deben fomentar la interacción entre estudiantes de tal manera que eso ayude a generar la participación, el debate genuino y la reflexión de éstos. En adición a ello, añaden que "el docente debe ser capaz de analizar el trabajo oral y escrito de sus alumnos, atendiendo a aquellos momentos clave donde se aprecian discontinuidades en el aprendizaje" (p. 15).

Etapa 3: Análisis

Para finalizar, en esta etapa relacionada con el análisis de las respuestas que brinden los estudiantes a la secuencia, se utiliza el principio de los niveles de la EMR, así como también el análisis de la capacidad del estudiante para realizar los tratamientos adecuados y las diferentes conversiones entre registros de representación.

En estos momentos, nos encontramos en la Etapa 1. Como muestra, se añaden en la sección de anexos dos de las actividades y algunas preguntas que forman parte de las actividades de inicio, una de ellas está enfocada en el contexto extra matemático del cáncer de mama, que tiene la intención de que el estudiante comience a relacionar la derivada de una función con la ecuación diferencial ordinaria, reforzando primeramente la primera de éstas, llevando al estudiante por un camino geométrico de la derivada, es decir, viendo la derivada como la pendiente de la recta tangente.

## Conclusiones

La importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el nivel superior se asocia a varios hechos, uno de ellos es que contribuye a la formación de los estudiantes de distintas áreas de la ciencia y la ingeniería. Perdomo (2011) afirma que "las EDO están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en los currículos de nivel universitario" (p. 113).

Algo que también hay que destacar, es la relación que tienen las ecuaciones diferenciales ordinarias con la vida cotidiana, ya que éstas ayudan a describir fenómenos de variación que ocurren en nuestro alrededor. Perdomo (2011) menciona que "permiten describir fenómenos de variación y por tanto resultan de utilidad para modelizar, analizar y resolver numerosos problemas que surgen en diferentes contextos" (p. 113).

## Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado*. Recuperado de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-AngelAlsina.pdf

Bressan, A. (2010). *Los principios de la educación de la Matemática Realista*. Recuperado de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-mate-matica-realista.pdf

Dullius, M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico* (Tesis inédita de Doctorado). Universidad de Burgos, España.

Duval, R, (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Freudenthal, H. (1968). *Why to teach mathematics so as to be useful*. Educational Studies in Mathematics, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L. & Ballés, H. (2014). *GeoGebra y los sistemas de representación semióticos*. Acta Latinoamerica de Matematica Educativa. Vol. 27, pp. 2169-2176.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). *Realistic mathematics education as work in progress*. En Fou-Lai Lin (Eds.). Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Nápoles, J. (2003). *La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias: Un enfoque histórico*. Educación y Pedagogía. Vol. 15, No. 35, pp. 165-181.

Perdomo J. (2011). *Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología.* Revista de la didáctica de las matemáticas. Vol. 78, pp. 113-134.

Rasmussen C. (2016). *The Inquiry Oriented Differential Equations Project: Addressing Challenges Facing Undergraduate Mathematic Education*. MatRIC Modelling Colloquium.

Zolkower, B., Bressan, A. & Gallego, F. (2006). *La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores*. Recuperado de https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Yupana/article/download/247/333

Zolkower, B., Bressan, A., Gallego, F. & Pérez, S. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases Teóricas.* Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wpcontent/uploads/2016/03 /Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

## 7. Anexo

Actividad 3. La fiebre.
A continuación, se presenta la representación gráfica de la temperatura de un caso de fiebre en un paciente:

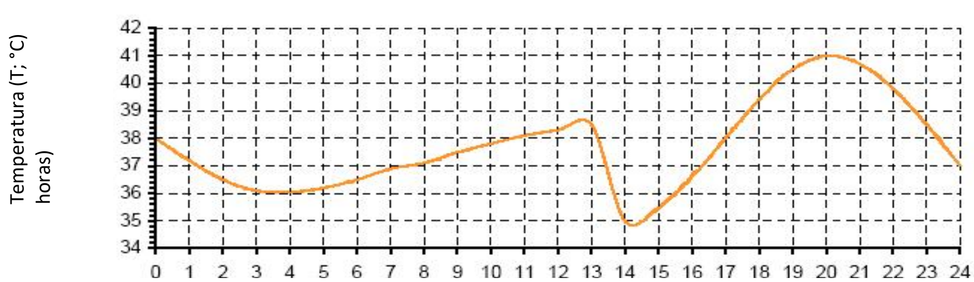


***Figura 1***. Gráfico de la temperatura de un paciente con fiebre

Responde lo que se pide:

1. Describe detalladamente que es lo que está sucediendo con el paciente según la Gráfica 1
2. Calcula para los siguientes intervalos de tiempo, el cambio en la temperatura ($\Delta T$)

| $(t_1, t_2)$ | $\Delta T, °C$ | $\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$ | Interpretación |
|---|---|---|---|
| (0,4) | | | |
| (13,15) | | | |

a. Completa la tercera columna de la Tabla 1 calculando la rapidez de cambio promedio (razón de cambio promedio)
b. Interpreta estos resultados obtenidos para cada intervalo de tiempo

3. En la Gráfica 1 representa la rapidez de cambio promedio en los intervalos indicados
   a. Describe lo que hiciste y argumenta tu respuesta

4. Atendiendo lo hecho anteriormente:
   a. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más rápido?
   b. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más lento?

Actividad 4. El cáncer de mama en México.
A continuación, se presenta un modelo gráfico idealizado de las defunciones de mujeres mayores a 25 años, por cáncer de mama en México, a lo largo de los años:

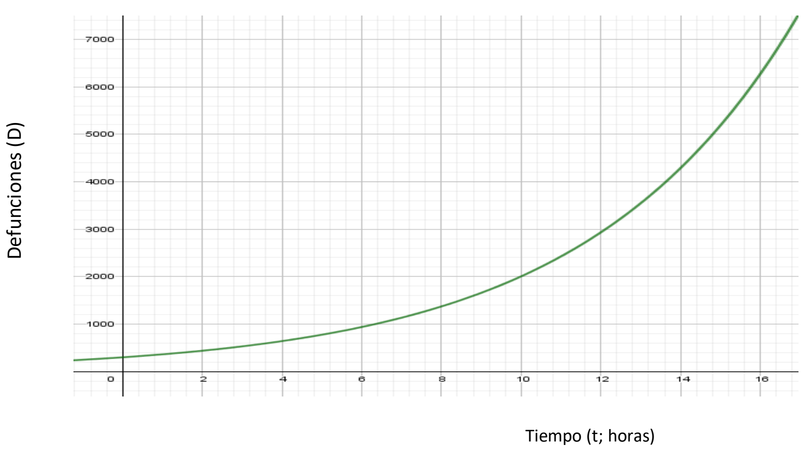


***Figura 1.*** Gráfico idealizado de las defunciones por cáncer de mama

En compañía de un compañero, analiza las gráficas anteriores y responde lo que se pide:
1. ¿Qué puedes decir sobre las defunciones por cáncer de mama con respecto al paso de los años?

Para analizar detalladamente el comportamiento del modelo gráfico presentado anteriormente es necesario descargar el software libre GeoGebra y seguir las siguientes instrucciones:

1. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico1.ggb
    a. Mueve el punto x0 que esta sobre la barra (deslizador) que aparece en la parte superior de la vista gráfica y responde lo siguiente:
        i. ¿Qué sucede al mover el punto señalado?
    b. Realiza una tabla de valores en la cual se tenga el número de años a partir de 1955 y el de defunciones por año:
    c. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico2.ggb
        i. Habilita la opción de recta y mueve el punto x0:
        ii. ¿Qué tiene de particular esa recta?
    d. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico3.ggb
        i. Elige el número $m$ y mueve el punto x0:
        ii. ¿Qué representa el número $m$?
    e. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico4.ggb
        i. Selecciona el punto $B$ y mueve el punto $x0$:
        ii. ¿Qué representa el punto $B$?