INVENCIÓN DE PROBLEMAS EN UN CONTEXTO DE COMPETITIVIDAD Y COOPERACIÓN: UNA EXPERIENCIA CON SUMAS DE SERIES

Lorena Salazar Solórzano
Universidad de Costa Rica, Costa Rica, Universidad Nacional. (Costa Rica)
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr, lorena.salazar.solorzano@una.cr

Resumen

Se presentan aquí algunos resultados parciales de una investigación que pretende indagar el efecto que produce en la comprensión matemática, la combinación de estrategias de creación de problemas, competitividad y cooperación. El contexto temático empleado fue el de sumas de series en una muestra de 18 alumnos de un curso de cálculo introductorio de la Universidad de Costa Rica, en la que los estudiantes en grupos, debían crear problemas para que un grupo adversario los resolvieran en una actividad competitiva y colaborativa. Se lograron resultados positivos en motivación y comprensión de este tema mejorando el rendimiento académico de los participantes.

Palabras clave: educación matemática, invención de problemas, motivación en el aula, series de potencias.

Abstract

This paper shows some partial results of a research that attempts to investigate the effect produced by the combination of posing problem strategies, competitiveness and cooperation in ~~the~~ mathematical understanding. We used addition of series as the thematic context, in a sample of 18 students from an introductory calculus course at the University of Costa Rica, in which groups of students had to create problems for an adversary one to solve them in a competitive and collaborative activity. Positive results were obtained with respect to motivation and understanding of this topic, improving the academic performance of the participants.

Key words: mathematical education, posing problems, motivation in the classroom, powers series.

Introducción

Hallar la suma de series numéricas y de potencias es un tema que presenta dificultades de comprensión en los estudiantes (Delgado, Codes, Monterrubio, & González-Astudillo, 2014). Este estudio pretende mejorar la comprensión de este tema, usando el espíritu competitivo y cooperativo de los estudiantes como elemento motivador, dado que investigadores como Font (1994), Tapia (2005), señalan que la falta de motivación es una de las causas más importantes para explicar las dificultades de aprendizaje en matemáticas. Combinado a esto, se usó la estrategia de creación de problemas por su potencial en comprensión de la matemática. Es por esto que el objetivo del estudio fue investigar el efecto que produce, en la comprensión del tema de sumas de series de potencias, la incorporación de tareas de invención de problemas en un contexto de competitividad y cooperación en un curso introductorio de cálculo.

Motivación en el aula

Tapia, (2005) indica que para lograr la motivación en los estudiantes, es importante presentar un esquema en el que se anticipen los contenidos, el despertar el interés inicial (con algún problema que les despierte la curiosidad), mantener el interés inicial (que es la parte más difícil), relacionar los contenidos nuevos con los que se han adquirido con anterioridad, hacer una exposición estructurada y a un ritmo adecuado, usar ejemplos o casos como elementos de apoyo, desarrollar la interacción entre profesor y alumno, inducirlos a la realización de trabajos prácticos con repercusión en la nota final. En la actividad realizada se tomaron en cuenta algunas de estas pautas. La actividad se inició con un esquema de los contenidos a desarrollar, se despertó el interés al involucrar a los alumnos en la confección de las reglas de la actividad y se tomó en cuenta que la misma tuviera un impacto en la nota final del curso; algo que no les generara tensión o preocupación por tal rubro, pero que sí contemplara algún reconocimiento que los motivara, tomándose una prueba corta con un valor extra de 3% de la nota final del curso.

Creación de problemas

En la última década se ha incrementado considerablemente el número de investigaciones sobre la creación de problemas con resultados positivos (Ellerton (2013); Espinoza, Lupiañez, y Segovia (2014); Malaspina (2016); Salazar (2014 y 2015); Singer y Voica. (2013). De acuerdo con Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014), la invención de problemas logra desarrollar la creatividad de los alumnos, da lugar a una mayor responsabilidad en los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, es una ventana para observar la comprensión matemática por lo que puede ser una herramienta para evaluar su aprendizaje y también mejora su disposición y actitudes hacia esta disciplina. La autora de este trabajo ha utilizado el planteamiento de problemas como una estrategia de enseñanza en cursos de matemática para profesores, con resultados muy positivos (Salazar, 2014, 2015). Otros investigadores como Malaspina (2016) también señalan resultados muy alentadores al aplicar esta estrategia en diferentes talleres con profesores de matemática en formación y en ejercicio.

Competitividad y Trabajo colaborativo

En la actividad se promovió que aflorara en los estudiantes el espíritu competitivo y cooperativo de los estudiantes. De acuerdo con Cadoche (2009), cooperar significa trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes, mientras que competir consiste en trabajar para alcanzar un objetivo que solo puede conseguir un estudiante (o unos pocos). En esta experiencia se da una competencia sana, en el sentido de que todos pueden ganar, sin perjudicar a otros, es decir con esfuerzo todos los grupos podrían obtener la nota máxima en la evaluación. Según Cadoche (2009), competir es una constante en las relaciones interpersonales de la sociedad y en las aulas universitarias, estas acciones de interdependencia se dan de dos formas: la competitiva y la cooperativa. La ausencia de interdependencia da como resultado el individualismo, aspecto que debe evitarse en los cursos de matemática e incentivar el trabajo colaborativo. De modo que en la actividad se trabajó bajo el lema de que el éxito individual depende del grupal. Según Spagni y Cadoche (2014, p. 213),

> el Aprendizaje Cooperativo es uno de los métodos de enseñanza y aprendizaje que sustentan su teoría en el principio de que el alumno no aprende solo; que, por el contrario, la actividad del sujeto durante dicho proceso está mediada por la influencia de los demás.

Metodología

La actividad se realizó con estudiantes de un curso introductorio de cálculo de la Universidad de Costa Rica (MA313), en el que participaron 18 estudiantes de la carrera de estadística del I ciclo del 2014. Se trabajó en una modalidad de grupos de 3 personas a los que se les proporcionó unas guías de trabajo, donde se les expuso algunas estrategias sobre cómo crear un problema cuyo fin fuera hallar la suma de una serie de potencias. Para la recolección de datos, se usó un diario detallado de los acontecimientos que se fueron dando en el aula y se fueron anotando comentarios y algunas discusiones internas de los estudiantes (para ello se contó con la ayuda de una asistente para poder cubrir las observaciones de los grupos). También se recolectaron evidencias escritas del trabajo de ellos, en este caso el problema propuesto y las soluciones dadas.

Descripción de la Experiencia

Cada grupo debería **c**rear y resolver un problema de suma de series de potencias siguiendo la guía dada y depositarlo en una caja. Luego debían **e**scoger aleatoriamente un problema de la caja y resolverlo. Las siguientes reglas para la actividad y adjudicación del puntaje, fueron creadas en consenso entre la docente y el grupo de estudiantes.

Reglas de la actividad

- Si un grupo encuentra y demuestra que el problema creado por un grupo adversario está mal planteado o mal resuelto, ellos obtienen 50 puntos y el grupo creador obtiene -25 puntos.
- Si un grupo no logra resolver el problema planteado por un grupo adversario, el grupo creador obtiene una nota de 50 puntos extra y el grupo que resuelve el problema, obtiene 0 puntos.
- La nota de la prueba corta se pondera así: creación del problema 25 puntos, la solución de su propio problema 25 puntos, solución del problema adversario 50 puntos (para un total de nota 100 que equivale al 3% de la nota final del curso). Pueden obtener 50 puntos extra de acuerdo al punto anterior.

Los estudiantes iniciaron la actividad con una actitud muy entusiasta y la mantuvieron en las dos horas siguientes en que esta se desarrolló, con muestras de risas y actitudes de camaradería y competitividad. En lugar de la seriedad y tensión usual mostrada ante exámenes cortos anteriores a este, esta vez parecía que lo estaban disfrutando, sin importarles que se trataba de una evaluación. A continuación se presenta parte de las guías de trabajo dada a los estudiantes, que por razón de espacio, solo se presenta el final de las mismas, en la que se propone una tarea de modificación de problema, de acuerdo a una serie específica, y seguidamente se presentan algunas de las creaciones de los estudiantes.

Guía #1: Usando series de potencias

Sabiendo que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = senx$, verifique que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (e/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} == sen(e/2)$

1. Elijan otra serie de potencias relacionada a alguna función f
2. Realicen álgebra para "camuflar" la serie y cambie el valor de x por algún valor numérico que esté dentro del intervalo de convergencia de la serie dada
3. Planteen un problema de hallar la suma de dicha serie y pongan la respuesta sin la solución.

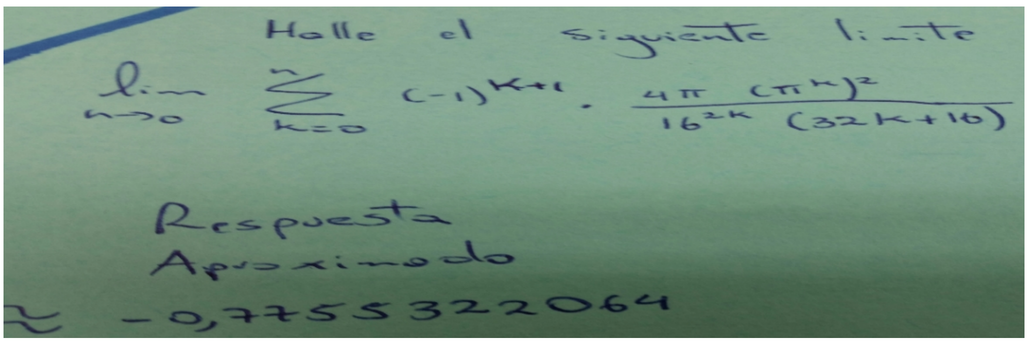


Figura 1. Problema creado por uno de los grupos de estudiantes

La figura 1 muestra una de las modificaniones de un grupo, en el que se da un poco más que una simple modificación del problema original. Observe que plantea la suma de la serie como el límite de una sucesión de sumas parciales. Puede observarse que también muestra cierto grado de ingeniosidad al reescribir la serie "camuflada".

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)(-1)^k \pi^{2k+1}}{16^{2k}16(2k+1)} = -4\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi/16)^{2k+1}}{(2k+1)} = -4\arctan(\pi/16)$$

Otro problema creado por otro grupo de estudiantes se muestra en la figura 2, el cual resulta interesante en cuanto a creatividad con una dificultad mayor a algunos problemas que usualmente la docente, en semestres anteriores ha planteado a sus estudiantes.

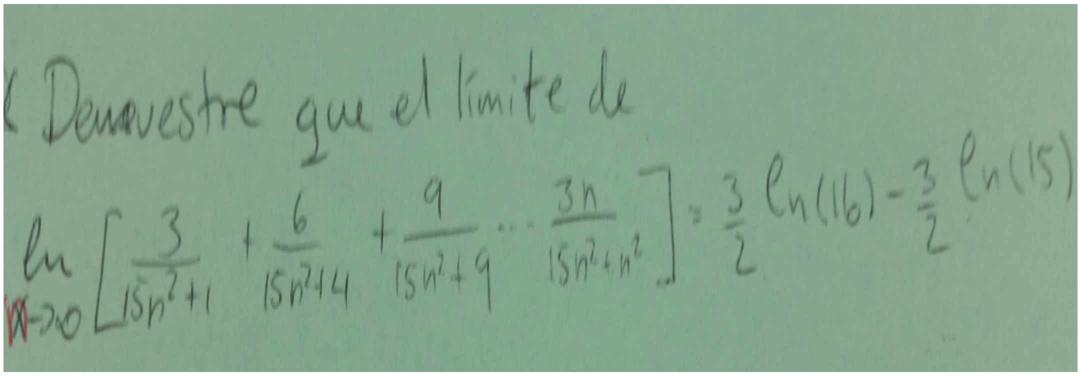


Figura 2. Problema creado por uno de los grupos de estudiantes

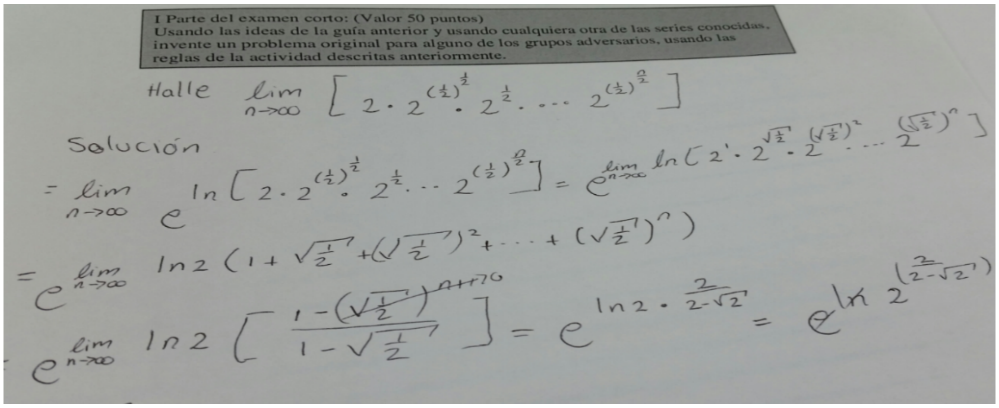
La solución a este problema es desarrollado por los estudiantes de la siguiente manera:

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{n^2\left(15+\dfrac{k^2}{n^2}\right)} == \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3\dfrac{k}{n}}{\left(15+\dfrac{k^2}{n^2}\right)} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{3x}{15+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\ln(15+x^2) =$$

$$\frac{3}{2}\ln(15+1^2) - \frac{3}{2}\ln(15+0^2) = \frac{3}{2}\ln(16) - \frac{3}{2}\ln(15)$$

Guía # 2: usando la serie geométrica

1. Elija un valor específico de r para la serie geométrica con $|r| < 1$
2. Forme la sucesión $x_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$
3. Realice álgebra para "camuflar" la sucesión
4. Deduzca que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} = \dfrac{1}{1-r}$.


I Parte del examen corto: (Valor 50 puntos)
Usando las ideas de la guía anterior y usando cualquiera otra de las series conocidas, invente un problema original para alguno de los grupos adversarios, usando las reglas de la actividad descritas anteriormente.

Halle $\lim_{n\to\infty}\left[2\cdot 2^{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdots 2^{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}\right]$

Solución

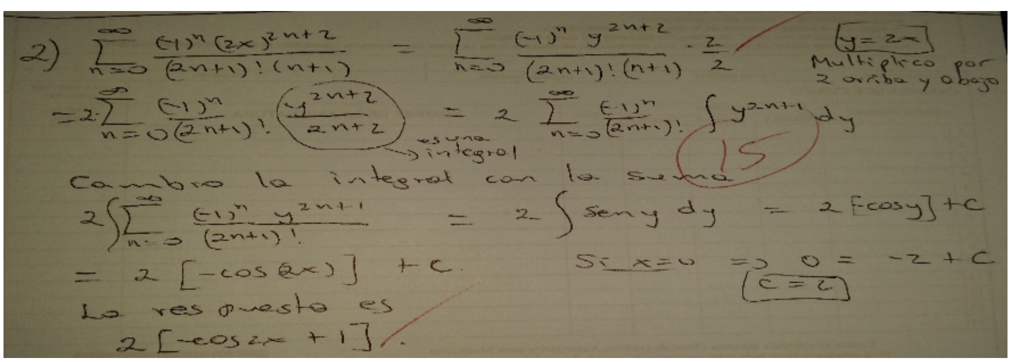
$= e^{\lim_{n\to\infty} \ln\left[2\cdot 2^{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdots 2^{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}\right]} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln\left[2^1\cdot 2^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot 2^{(\sqrt{\frac{1}{2}})^2}\cdots 2^{(\sqrt{\frac{1}{2}})^n}\right]}$

$= e^{\lim_{n\to\infty} \ln 2\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}+(\sqrt{\frac{1}{2}})^2+\cdots+(\sqrt{\frac{1}{2}})^n\right)}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}\ln 2\left[\frac{1-(\sqrt{\frac{1}{2}})^{n+1\to 0}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}\right]} = e^{\ln 2\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = e^{\ln 2^{\left(\frac{2}{2-\sqrt{2}}\right)}}$

Figura 3. Problema creado por uno de los grupos de estudiantes

Como puede verse en la figura 3, el grupo creador presenta la creación de una sucesión como una productoria, tomando el valor de $r = \sqrt{1/2}$, y luego toman logaritmos para pasarlo a una suma. Todo esto siguiendo las ideas de la guía, pero aún así muestran gran originalidad al tomar el valor de r de esta forma. Cabe destacar que este grupo obtuvo puntos extra por la creacción de su problema, dado que mostró una mayor ingeniosidad y creatividad. Además, el grupo adversario no pudo resolverla, de modo que según las reglas estipuladas, este grupo obtuvo 50 puntos extra. La figura 4 muestra una de las soluciones de un grupo donde el grupo creador incluye elementos de integración de series en donde hacen un manejo de intercambiar el símbolo de suma e integral acertadamente.


2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+2}}{(2n+1)!(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+2}}{(2n+1)!(n+1)}\cdot\frac{2}{2}$ $\boxed{y=2x}$ Multiplico por 2 arriba y abajo

$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{y^{2n+2}}{2n+2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int y^{2n+1}dy$ es una integral

15

Cambio la integral con la suma

$2\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2\int \operatorname{sen} y\, dy = 2[\cos y]+c$

$= 2[-\cos(2x)]+c$ Si $x=0 \Rightarrow 0=-2+c$ $\boxed{c=2}$

La respuesta es
$2[-\cos 2x+1]$

Figura 4. Solución de uno de los estudiantes

La segunda parte de este problema solicitaba la suma de una serie numérica, que corresponde a la serie dada en (a), pero evaluada en el valor de $x = \pi/2$, aspecto que muestra compresión de lo ejecutado en la primera parte.

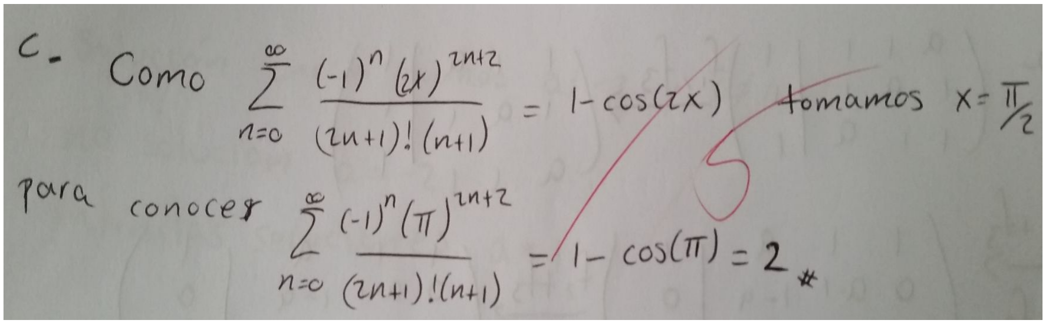


Figura 5. Solución de uno de los estudiantes a la parte 2b

Finalmente, se aplicó un instrumento con una escala de Lickert a los 18 estudiantes que participaron para evaluar la actividad con los estudiantes. Como puede verse en la tabla 1, en general los estudiantes sienten que la actividad les ayudó a comprender el tema.

Tabla 1. Resultados de la evaluación de la actividad

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Neutral	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
La actividad de creación de problemas le ayudó a reafirmar conceptos matemáticos.				17	2
Comprendió detalles y sutilezas de las series y con hallar las sumas, creando problemas.			1	15	2
El trabajo en grupos le resultó útil para el estudio y comprensión de los temas.		1		2	17
La actividad le ayudó a mejorar su comprensión individual de sumas de series.				19	
La actividad le resultó motivadora por la competencia.		1		18	

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

La experiencia en general resultó muy positiva, los estudiantes se motivaron, a tal punto que minutos después de haber iniciado la actividad, olvidaron la tensión que implica una evaluación y algunos hasta le llamaron el juego. Se les notaba un interés diferente, una concentración inusual y disfrute. Por otra parte se escucharon comentarios que indicaban que hasta ahora entendían el tema, a pesar de que se suponía debían venir preparados al quiz. Los problemas planteados fueron desde simples modificaciones al problema dado en la guía, como otros problemas donde se mostró un mayor nivel de dificultad, ingeniosidad y dominio de los conceptos. Por otro lado el trabajo cooperativo y competitivo resultó una buena combinación con la creación de problemas, dado que los estudiantes se integraron en su propio equipo participando activamente de las tareas, unos dando ideas, mostrando camaradería que no se había mostrado antes en trabajos en grupo. El elemento de competitividad ayudó a mejorar este trabajo conjunto. Por otro lado, cuando los estudiantes tuvieron que resolver el problema creado por otro grupo, estaban preparados debido a la experiencia previa de haber tenido que crear un problema similar. Estaban más desconfiados, y por primera vez buscaban dónde podría haber algunos camuflajes, en el intento de disfrazar una serie conocida. Los resultados del examen donde se evaluó el tema de convergencia y sumas de series de potencias, arrojó mejores resultados que otros semestres donde no se aplicó la actividad. Se logró un 83% de notas por encima de 70, lo cual según la experiencia de muchos años de enseñar este tema, representa una diferencia.

Referencias bibliográficas

Cadoche, L. (2009). *Aprendizaje cooperativo, competitivo e individualista, sus implicaciones en el aula de matemática*. Facultad de Ciencias Veterinarias. Universidad Nacional del Litoral. Esperanza. Santa Fe, Argentina. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/42%20Cadoche.pdf.

Delgado, M. L., Codes, M., Monterrubio, M. C., y González Astudillo, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo “folding back”. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 25 - 44.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.

Espinoza, J. Lupiañez J., Segovia, I (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. Vol. 14, Marzo 2014.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma,* 17, 10-16.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 11(15). 321-33.

Spagni, B., Cadoche, L. (2014). Aprendizaje cooperativo y desarrollo de habilidades sociales. *Acta de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática*. 212-217.

Salazar, L (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto y su implementación con futuros profesores de matemática. *Revista Paradigma* vol. XXXV (1) junio 2014 V-2.

Salazar, L. (2015). Problem-posing as a didactc resource in formal mathematics courses to train future secondary school mathematics teachers. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE)*, 5(2), 64-74. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.141.

Singer. F. M. & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics,* 83(1), 9-26.

Tapia, A (2005). *Motivación para el aprendizaje: la perspectiva de los alumnos*. Ministerio de Educación y Ciencia. La orientación escolar en centros educativos. Madrid: MEC.