

## ESTUDIO DE PROPIEDADES DE LOS SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN UTILIZANDO GEOMETRÍA DINÁMICA

Maritza Luna Valenzuela, José Carlos León Ríos.

Pontificia Universidad Católica del Perú. Universidad de Lima. Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas. IREM.(Perú)  
luna.m@pucp.edu.pe, jleonr@ulima.edu.pe

### Resumen

Las actividades que presentamos en este taller se han diseñado teniendo en cuenta la influencia de la tecnología en la educación matemática y la visualización de los contenidos, por tal motivo nos hemos basado en el enfoque instrumental de Rabardel. Nuestras actividades incluyen la rotación de los polígonos alrededor de un eje, cambio de los puntos de vista de los objetos tridimensionales, reconocimiento de sus propiedades invariantes de dichos objetos, rotación mental de las figuras planas, identificación de las caras del poliedro en el desarrollo de su superficie. Nuestra pregunta de investigación es ¿Una secuencia de actividades permite enriquecer las propiedades de las componentes de los sólidos de revolución, con un programa de geometría dinámica?

Nuestro objetivo es identificar las acciones que realizan los participantes cuando exploran las propiedades de las componentes de los sólidos de revolución, con un programa de geometría dinámica.

**Palabras clave:** enfoque Instrumental, instrumentalización, pensamiento variacional, génesis instrumental

### Abstract

The activities we present in this workshop were designed taking into account the influence of technology when teaching mathematics and the visualization of contents; therefore, we have based this workshop on the Rabardel's instrumental approach. Our activities include: rotation of polygons around an axis; change of the viewpoints of three-dimensional (3D) objects; recognition of their invariant properties; mental rotation of plane figures, and identification of polyhedron sides in the development of its surface. Our research is based on the following question: Will a sequence of activities enrich the properties of the solids of revolution components, with a dynamic geometry program? This research intended to identify the actions that participants perform when they explore the properties of the solids of revolution components, by using a dynamic geometry program.

**Key words:** instrumental approach, instrumentalization, variational thinking, instrumental genesis

### ■ Introducción

El taller que presentamos se dividió en dos sesiones, cada una de las cuales contiene cuatro actividades. En la primera sesión, construimos sólidos de revolución a partir de la rotación de un polígono alrededor de un eje, específicamente un rectángulo y un triángulo. Incluimos también la rotación de una figura formada por polígonos y un cuarto de círculo. En la segunda sesión, determinamos el área de la superficie

generada por la revolución de un segmento de recta alrededor de un eje y el volumen de un sólido generado por el giro de una región comprendida entre dos gráficas definidas en un intervalo. Los participantes encontraron el volumen de dichos sólidos haciendo uso del CAS (cálculo simbólico) del Geogebra.

En este artículo presentaremos la descripción de dos actividades correspondientes a las sesiones uno y dos del taller. En la descripción incluimos la descripción de las acciones de uno de los participantes basados en aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel, específicamente el proceso de génesis instrumental del objeto y la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Durante la secuencia de actividades se observó que el GeoGebra 3D propició en algunos participantes, el descubrimiento y la identificación de las propiedades particulares para luego dar solución a dichos problemas.

### ■ Aspectos del Enfoque Instrumental

Con el fin de analizar en este artículo las actividades descritas, hemos considerado presentar el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En dicho enfoque tomaremos los términos que haremos uso en el presente artículo, y que consideramos pertinentes para su descripción.

El autor considera que todo objeto material fabricado no debiera denominarse objeto tecnológico, debido a que esta denominación está muy centrada en el enfoque tecnocéntrico que sitúa a la tecnología como elemento principal del sistema y no contiene ninguna referencia a lo humano. En este enfoque tecnocéntrico el hombre ocupa una posición residual, el hombre es ineficiente, costoso e inoperante. Su función es atender a aquellas necesidades que no pudieron ser sistematizadas. En contraposición, agrega el autor, los productos que provienen de la tecnología no son puramente técnicos, y deben ser atendidos desde el punto de vista antropotécnico. Es decir, los objetos y los sistemas de los que estamos rodeados no deben solo ser aprehendidos a partir de las tecnologías que los han hecho nacer.

Estamos de acuerdo con Castro (2012) cuando indica que el hombre es un ser orgánicamente desvalido, es decir que su constitución biológica no le permite estar dotado con órganos que se adecuen al medio ambiente natural, mantiene una ausencia de especialización orgánica, no puede volar, su pelaje no está revestido para enfrentarse a la intemperie, tampoco órganos que le permitan enfrentarse a una pelea o a un ataque. Todas estas circunstancias obligan a que el hombre cree un ambiente independiente de su estatus orgánico. En ese sentido la técnica cumple una labor muy importante en su ciclo biológico que le ha posibilitado sobrevivir en una naturaleza muy hostil. Sin embargo, no es la tecnología lo que ha conservado a la especie humana, no son las herramientas fabricadas por el hombre lo que ha permitido se sostenga durante su evolución, sino un conjunto de acciones y conductas organizadas con un objetivo preciso. Como lo indica el autor:

La técnica, en este caso, no son las herramientas que el hombre fabrica, sino el conjunto de acciones coordinadas, estratégicas, reglamentadas y orientadas al logro de una finalidad precisa. Podríamos decir que la técnica es producto de la inteligencia práctica del hombre, aquella que le permite “disponer” del entorno y someterlo a sus necesidades vitales. No es, entonces, que el hombre haga “uso” de la técnica, sino que el hombre es, en sí mismo, un animal técnico. (p.65)

Este reportorio de habilidades es transmitido a las nuevas generaciones sobre la base de antiguas y nuevas destrezas que van acumulando e incrementando para continuar produciendo culturas superiores.

Para Rabardel (1995), un objeto tecnológico debiera ser llamado artefacto, por tratarse de un término neutral, el cual se enriquece con las situaciones de acción donde ha sido insertado de manera circunstancial o intencional como medio de su acción. Según el autor, el artefacto, material o simbólico, no tiene ninguna relación con el objeto al que se dirige, pero ha sido elaborado con alguna intención para transformar a un determinado objeto al cual va dirigida la acción por medio del artefacto y concreta una solución a un problema dado o a un problema social. Además, indica que el sujeto lleva consigo ciertos esquemas de uso, destrezas o habilidades que su medio le ha consignado y con los cuales se dirige al artefacto. Entonces con este conjunto de acciones se inicia el proceso de instrumentalización, en el cual el sujeto se dirige al artefacto al cual quiere conocer, movilizándolo sus esquemas de uso (EU).

Rabardel (1995), lo describe como un proceso de instrumentalización, referido al surgimiento, evolución y atribución de las propiedades del artefacto. Simultáneamente, mientras va manipulando el objeto, emergen los esquemas de acción instrumentada (EAI) que son aquellas acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto. En nuestro caso, consideramos que los participantes llevan consigo una serie de recursos o destrezas, como propiedades de la circunferencia, cálculo de áreas de superficies poligonales, cálculo de regiones encerradas por curvas, rotaciones de objetos con cierto ángulo de rotación, usos de funciones básicos del Geogebra, los cuales corresponden a los EU. Dichos esquemas serán coordinados en conjunto para redescubrir las propiedades de las componentes de los sólidos de revolución en un ambiente de geometría dinámica, que corresponde al EAI. Ambos esquemas de utilización tienen orientaciones específicas, en un caso los EU, orientados a verificar que las propiedades de los sólidos de revolución pueden ser redescubiertas con el Geogebra, convirtiendo dichas propiedades en medios y, por otra parte, los sólidos de revolución como EAI, aplicado en otros objetos sobre los cuales este objeto le permite actuar. Por lo tanto, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, dirigida por sus esquemas que elabora.

## ■ Metodología

Nuestra investigación es netamente cualitativa, de orden descriptivo y las actividades están dirigidas todo estudiante de nivel superior. La información que se describirá está basada en la observación de las respuestas y procedimientos de los alumnos. El taller está programado para dos sesiones de hora y media cada uno. Debido a que se hizo un análisis *a priori* de los saberes previos de los participantes, esperamos algunas destrezas en el uso del Geogebra y conocimientos de las propiedades elementales de la geometría espacial.

## ■ Descripción de la actividad

En este artículo mostraremos dos de las cinco actividades propuestas. Nos referimos en un caso, a la construcción de un cilindro haciendo girar un rectángulo sobre su propio lado y la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de los ejes cartesianos.

Tener en cuenta que, de acuerdo con Larson, R., & Edwards, B. (2010), los sólidos de revolución son sólidos que se generan al girar una región plana alrededor de un eje.

### ■ Actividad 1

Se pidió que se construya un cilindro de revolución girando un rectángulo de dimensiones 3 y 4 unidades sobre el eje X. Luego, identifique sus principales elementos como el radio de la base, la longitud de su generatriz y su volumen.

Paso1. Identificar la barra de entrada para 2D y 3D vea figura 1.

Se observa que el participante moviliza su EU de la barra de herramienta del Geogebra.

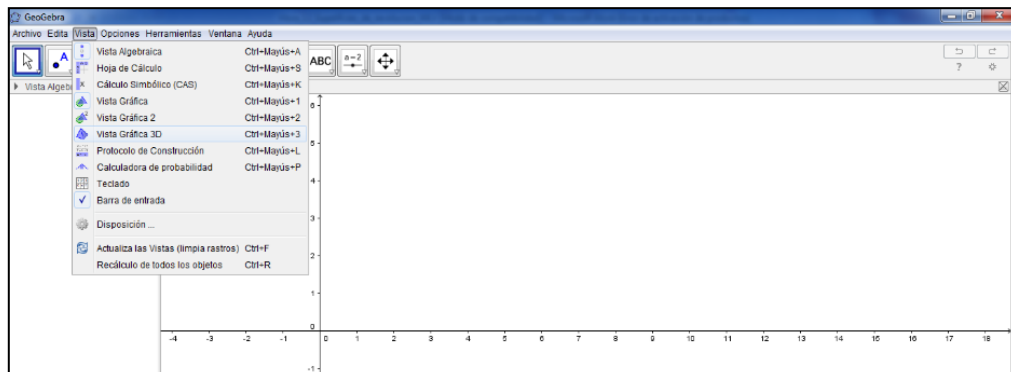


Figura1. Explorado el GeoGebra.

Luego debe movilizar otros EU que trae consigo de dicho programa, y que se muestran en la figura 2. Por ejemplo, la ubicación de los puntos en el sistema coordenado cartesiano, el ingreso de datos en la barra de entrada A (0,0), B (0,3), el trazo del polígono considerando que uno de los lados del rectángulo, es el segmento BC de longitud 4.

Paso 2. Dibuje en la Vista 2D un rectángulo ABCD con vértices A(0,0), B(0,3) y BC de longitud 4, además considere como eje de giro el eje X como podemos ver en figura 2.

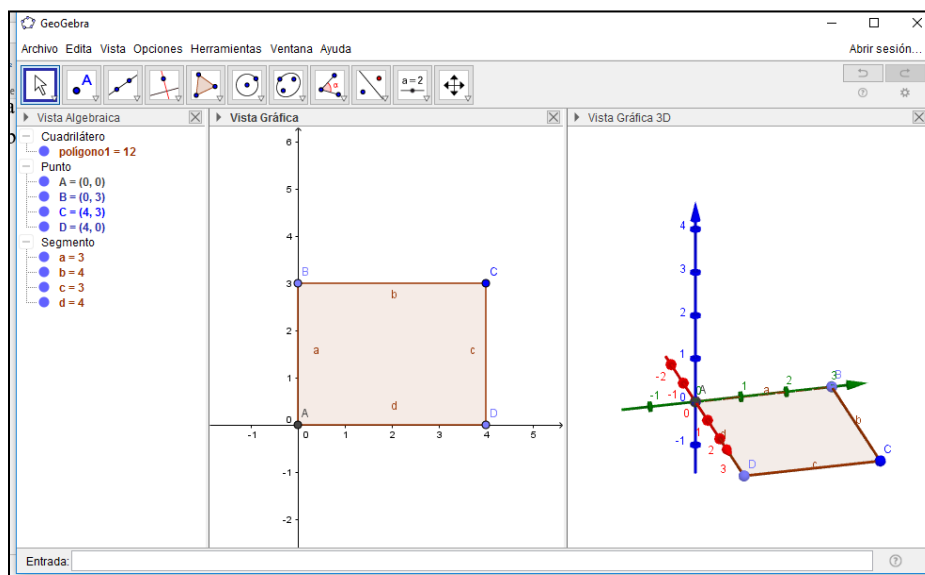


Figura 2. Rectángulo en vista 2D y 3D en el GeoGebra.

Paso 3. En 2D genere un deslizador de nombre  $\alpha$ , con ángulo de giro hasta de  $360^\circ$ .

Para ello, se le indica como generar el comando deslizador, Se les explica sus funciones, como se aprecia en la figura 3 y el participante debe movilizarlo como instrumento, es decir aplicado al objeto de la actividad.

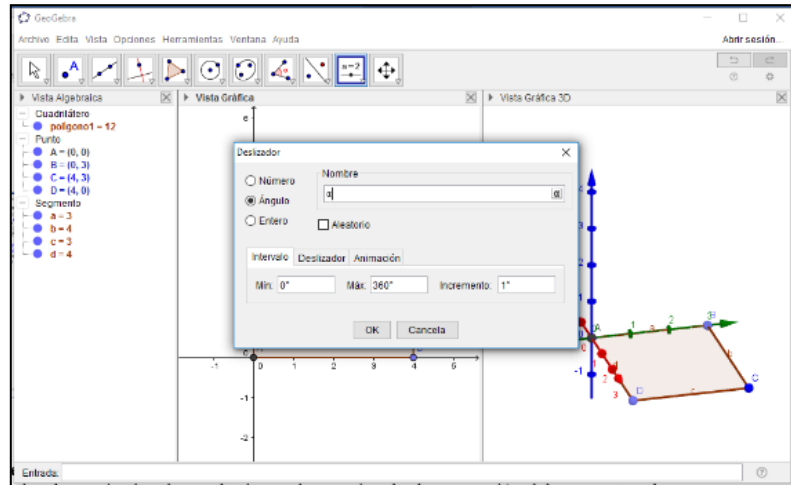


Figura 3. Insertando ángulo de giro en el GeoGebra.

Se observó, que los participantes tuvieron dificultad para internalizar el deslizador de un ángulo. Se tuvo que instrumentar dicho comando en clase. Luego los participantes, movilizaron dicho comando el cual actuó como EAI, pues fue dirigido para la rotación de un polígono, como se muestra en la figura 4 y figura 5

El deslizador es una de las herramientas que permiten la manipulación dinámica del objeto. Por ese motivo, las actividades se diseñaron teniendo en cuenta no solo el uso de esta herramienta, sino también propiciando la visualización de los contenidos.

Paso 4. En 3D genere la rotación con el comando rotación axial y modifique el ángulo a  $\alpha$ , de animación y la figura deje rastro.

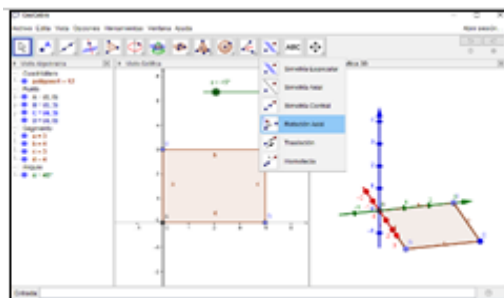


Figura 4. Rotación axial del cilindro

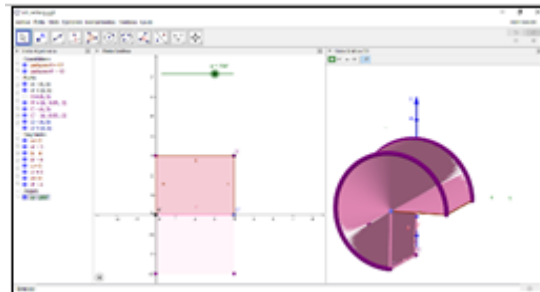


Figura 5. Generando el cilindro

Existen otros EU que los participantes movilizaron. Detallamos algunos de estos esquemas como propiedades de la circunferencia, cálculo de áreas de superficies poligonales, y volúmenes, los cuales anticipado. Por ejemplo, el volumen del cilindro se portó como un EAI pues los participantes mostraron un similar comportamiento de acciones estructuradas para determinarlo.

Los participantes midieron el radio y la altura con el uso del Geogebra y luego las relacionaron para obtener el volumen solicitado. De manera análoga, el volumen actuó como EU, cuando se le calculó haciendo uso de otro EU como el de la vista CAS (Cálculo simbólico).

Nuestro EAI, el volumen de un sólido de rotación fue movilizado en otros objetos, tal como mostramos a continuación, en la figura 6. De esta forma podremos decir que nuestro EAI evolucionó como EU, el cual junto a otros esquemas de uso EU, determinaron el sólido de revolución al rotar la región alrededor de la recta  $x = 2$ .

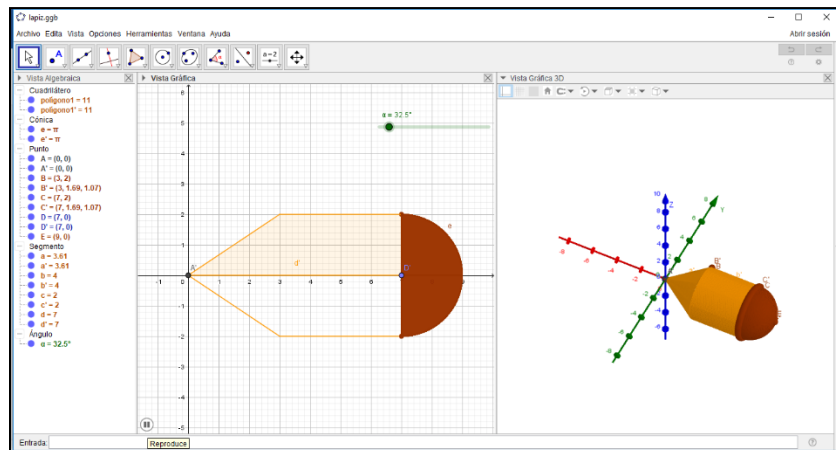


Figura 6. Rotación Axial de una región poligonal y curvo

Se inicia graficando la región. Para la simulación se procede con los pasos 4 y 5 haciendo uso de la rotación axial y de modo que se tiene el sólido de revolución que se muestra en la figura

## ■ Actividad 2

En un triángulo rectángulo de vértices A (1,1) y B (2,1) y C (2,2) se les pidió determinar el sólido que genera al rotar el triángulo rectángulo de lado AB sobre el eje X y el volumen del sólido obtenido.

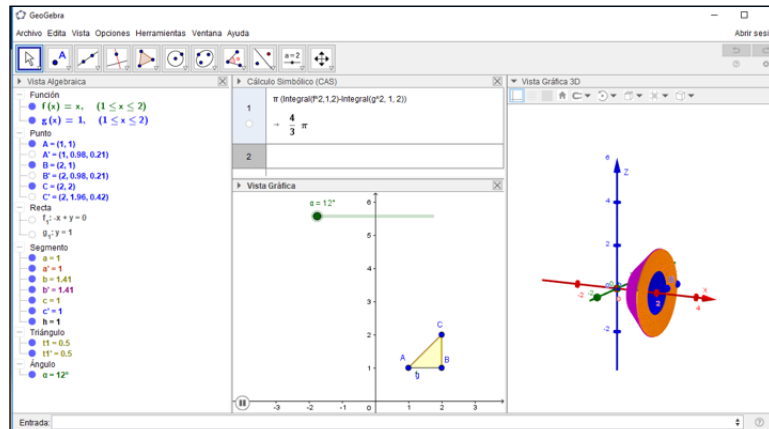


Figura 7 Sólido de revolución.

Esta actividad tiene como objetivo movilizar el EAI volumen de los sólidos de rotación como instrumento en un ambiente de geometría dinámica. Se movilizaron EU del Geogebra: ubicación de los puntos en el sistema coordenado cartesiano, el ingreso de datos en la barra de entrada A (1,1) y B (2,1) y C(2,2), el trazo del polígono y la rotación sobre el eje de abscisas. En esta oportunidad, instrumentaron la barra del deslizador, pues lograron movilizarla para generar la rotación del polígono. También se habilitó la vista CAS para determinar el volumen que es igual a  $\frac{4}{3}\pi u^3$  como se muestra en la figura 8. Observamos que el volumen actuó como EU, pues junto a otros EU como el de la vista CAS (Cálculo simbólico), lograron determinar el volumen del sólido de rotación. Además, existen otros EU como propiedades de la circunferencia, cálculo de áreas de superficies poligonales, y volúmenes.

### ■ Reflexiones finales

Estas actividades, permitieron llevar los sólidos de rotación, a un pensamiento y lenguaje matemático, pero desde un entorno de geometría dinámica. Durante la aplicación de las actividades, se observó que el GeoGebra 3D permitió que los estudiantes descubran e identifiquen las propiedades particulares de los sólidos, los cuales formaban parte de sus EU. Cuando construyeron el sólido de revolución, lo esquematizaron como un EAI, y luego dicho esquema evolucionó a un EU que, en combinación con otros esquemas como el CAS, se movilizaron para un determinado objetivo. Se recomienda, la obtención de volúmenes con objetos de formas simétricas

### ■ Referencias bibliográficas

- Castro, G (2012) *Sobre el concepto de antropotécnica en Peter Sloterdijk*. Revista de Estudios Sociales,(43), pp. 63-73. Universidad de Los Andes Bogotá, Colombia.
- Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Calculo 2 de varias variables*. Revisión técnica Instituto tecnológico y de estudios superiores de Monterrey, México. Mc Graw Hill Interamericana editores.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2011. Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.