

LA MATEMATIZACIÓN DE LOS PROCESOS DE TOMA DE DECISIONES; UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Andrea Vergara Gómez, Lianggi Espinoza Ramírez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile), Universidad de Valparaíso. (Chile)
andrea.vergara.gomez@gmail.com, lianggi.espinoza@uv.cl

Resumen

Tomar decisiones en contextos de incertidumbre es un aspecto inherente a lo humano. Sin embargo, la matematización de este tipo de procesos ocurre recién en siglo XIX, principalmente desde la Economía como práctica de referencia. Con el propósito de identificar y recuperar categorías epistémicas de interés para repensar la enseñanza actual de algunas nociones fundamentales asociadas a la probabilidad, se realiza un estudio socioepistemológico de la obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843) de Antoine Augustin Cournot, mediante el método de análisis de contenido. Esta obra representa el primer intento sistemático por aplicar conocimiento probabilístico a los procesos de toma de decisiones que tienen lugar en diversos contextos de la vida social y natural. Los análisis, correspondientes a una investigación en curso, apuntan a una concepción amplia e integradora de la probabilidad como medio para elaborar juicios respecto de la realidad.

Palabras clave: probabilidad, incertidumbre, binomial, Economía, epistemología

Abstract

Making decisions in contexts of uncertainty is an inherent aspect of human beings. However, the use of mathematics in this type of process began in the nineteenth century, mainly from the Economy as a reference practice. In order to identify and recover epistemic categories of interest to rethink the current teaching of some fundamental notions of probability, we carried out a socio-epistemological study of the A. A. Cournot's work "*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*" (1843), by using the content-based analysis method. This work represents the first systematic attempt to apply probabilistic knowledge to the decision-making processes that take place in diverse contexts of social and natural life. The analyses, corresponding to an ongoing research, point to a broad and integrative conception of probability as a means of making judgments about reality.

Key words: probability, uncertainty, binomial, Economy, epistemology

■ Introducción

A lo largo de la vida, todas las personas tomamos una gran cantidad de decisiones, mientras más incertidumbre nos ofrezca la situación más difícil se vuelve decidir. Toda vez que se considera la enseñanza de nociones asociadas a la incertidumbre, se contempla la organización de una serie de temas matemáticos y estadísticos que, de acuerdo con Moore (1997), suelen incluir el estudio de la variación en los procesos y su cuantificación, el reconocimiento de la incertidumbre y el error en las mediciones,

técnicas de representación, descripción e interpretación de datos, etc. Sin embargo, cuando se considera la enseñanza y aprendizaje de modelos probabilísticos a nivel de estándares internacionales (OCDE, 2013), no suele problematizarse la relación entre la necesidad de tomar una decisión en condiciones de incerteza con la factibilidad de referir matemáticamente un fenómeno mediante el uso de la probabilidad desde una perspectiva amplia.

En el ámbito de la psicología cognitiva, existen diversas investigaciones que analizan la forma en que las personas elaboran juicios y toman decisiones en contextos de incertidumbre (Kahneman y Tversky, 1979; Gigerenzer y Gaissmaier, 2011; Gigerenzer y Todd, 2012; Kruglanski y Gigerenzer, 2011, entre otros). Sin embargo, son exiguos los estudios que reportan el vínculo entre las la necesidad de tomar decisiones en situaciones cotidianas de incertidumbre y la emergencia de pensamiento probabilístico. En Nilsson (2007), por ejemplo, se expone cómo la comprensión probabilística de jóvenes de entre 12 y 13 años varía según las condiciones de contexto en las que deben realizar una decisión concerniente a un juego con dados.

Actualmente es posible identificar distintas áreas que estudian los procesos de toma de decisiones bajo incerteza, con enfoques multidisciplinares, como Teoría de la Decisión, Teoría de Juegos o Teoría de Expectativas Racionales. Estas perspectivas se han desarrollado fuertemente a partir de la segunda mitad del siglo XX. No obstante, lo anterior, el origen de esta preocupación la hallamos en el siglo XIX, la cual puede relacionarse con una actividad humana relativamente específica. Li Calzi y Basile (2004) afirman que la teorización matemática respecto de la toma de decisiones bajo incertidumbre comienza a surgir con la disciplinarización de la Economía. Siguiendo esta argumentación, Martin y Touffut (2007) señalan que Antoine Augustin Cournot fue el primero en reconocer y explicar la matemática tras los fenómenos sociales, contribuyendo especialmente al desarrollo de la economía matemática. A. A. Cournot, filósofo, matemático y economista francés del siglo XIX, posee una vasta obra, que tal vez debido a su carácter clarividente e innovador no estuvo al alcance de la comprensión de su época. El impacto de su trabajo fue póstumo y sus alcances continúan hasta nuestros días.

Dado lo anterior, es nuestro interés estudiar aquellos significados que preceden al desarrollo del saber matemático asociado a la toma de decisiones, con miras a contribuir a la construcción de un pensamiento probabilístico amplio a nivel escolar. Una de las obras de A. A. Cournot que intenta ejemplificar y sistematizar el uso de modelos probabilísticos en distintos fenómenos sociales y naturales, tanto para asistir la toma de decisiones como para renovar la comprensión del problema en sí, es *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843). Reconocemos en esta pieza matemática un germen para el tratamiento analítico de los procesos de toma de decisiones. Presentamos así, en este artículo, un análisis socioepistemológico de la obra mencionada. Este distingue, de manera preliminar, caracterizaciones relativas a las formas de significar la probabilidad en los procesos de toma de decisiones en contextos de incerteza. La reconstrucción de esta epistemología olvidada, esperamos permita repensar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y los modelos probabilísticos.

■ Marco Teórico y Metodología

La Socioepistemología plantea el problema de la construcción social del conocimiento matemático desde un punto de vista sistémico, asumiendo los saberes matemáticos como procesos deliberados para el uso

compartido del conocimiento (Cantoral, 2013). De esta manera, la actividad matemática, siendo primeramente actividad humana, provee de saberes cuyos significados no se limitan a los objetos matemáticos preexistentes en la Matemática. Consideramos así que el estudio de la actividad humana relacionada con distintos fenómenos sociales, como la transacción de valores en el mercado económico o la elaboración de apuestas en juegos de azar, contextualiza y significa los procesos de toma de decisiones. Cantoral (2013) señala que una de las formas de abrir la reflexión en torno al discurso matemático escolar con miras a la sociedad del conocimiento, es problematizar al saber a través de su historización. La historización debe entenderse “más allá de lo cronológico factual, pues se interesa por la historia crítica del desarrollo conceptual” (Cantoral, 2013, p.57). Historizar el saber es un mecanismo fundamental que permite revelar los elementos mediante los cuales la matemática se constituye, de ahí que este proceso implica un examen epistemológico, crítico y situado tanto del saber cómo de las prácticas que acompañan su producción (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

Uno de los métodos que muestra la tradición socioepistemológica, para explicar la emergencia de un saber matemático, es el análisis de obras originales (Cantoral, 2013). Siguiendo esta idea, el presente estudio se estructuró bajo un enfoque cualitativo, específicamente a través del análisis de contenido de la obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843) de Antoine Augustin Cournot, en su versión original en francés de la edición de L. Hachette. Este análisis se complementó mediante la consulta de la versión en inglés con comentarios de Oscar Sheynin (2013). La elección de esta obra obedece, por una parte, a que fue escrita bajo una clara intencionalidad didáctica y, por otra, a que su contenido sistematiza varios de los conocimientos sobre probabilidad vigentes en la época. De acuerdo a Martin (2007) las preocupaciones de Cournot, aun las de tipo estrictamente matemático, siempre están acompañadas por una reflexión epistemológica e incluso histórica sobre el significado y alcance de los conceptos matemáticos y sus relaciones con otros campos del saber. Dado lo anterior, la obra del autor reviste especial interés para un estudio de corte socioepistemológico.

El abordaje de la obra se realiza mediante el análisis de contenido que, como explica Krippendorff (2004), es una metodología que permite una interpretación crítica, considerando la deconstrucción del relato desde los aspectos contextuales, culturales e históricos. Esta técnica de análisis nos provee algunas formas de proceder para obtener inferencias plausibles a partir de los extractos textuales de la obra. El análisis de los datos aún se encuentra en proceso, pero este está siendo llevado a cabo básicamente a través de dos tipos de acciones: 1) la identificación de unidades conceptuales, explícitas en la narrativa de Cournot, vinculadas a la probabilidad y 2) la resolución de los ejemplos propuestos mediante el uso de las estrategias explicadas por el mismo Cournot. A partir de estos elementos, se han levantado caracterizaciones preliminares que permiten fundamentar una epistemología para la probabilidad, las que son descritas a continuación.

■ Relación entre azar y aleatoriedad

Para Cournot no es la imperfección actual de nuestros conocimientos y métodos lo que nos hace considerar el azar en los fenómenos, sino que es la naturaleza de las cosas y las condiciones inherentes a nuestra constitución intelectual lo que nos obliga a considerar varias fuentes separadas e independientes de información: la experiencia, la deducción, la imaginación, el conocimiento que se tiene por válido, la intuición, etc. Esta independencia y variedad es la clave para comprender qué es el azar para Cournot; no

es la ausencia de causas, es la multiplicidad de causas sin dependencia o relación rastreable entre ellas. Como él mismo señala: "Il faut, pour bien s'entendre, s'attacher exclusivement à ce qu'il y a de fondamental et de catégorique dans la notion du hasard, savoir à l'idée de l'indépendance ou de l'absence de solidarité entre diverses séries de faits ou de causes" (Cournot, 1843, p.77).

Para Cournot, el azar tienen un papel notable en la manifestación de gran cantidad de fenómenos, pues este resulta más consistente con el plan general de la naturaleza, donde los sucesos obedecen mayoritariamente a distintas causas cuya solidaridad o relación vinculante no es manifiesta. Así lo declara en el capítulo 4, "il est juste de dire en ce sens (comme on l'a aussi répété si souvent) que le hasard gouverne le monde, au plutôt qu'il a une part, et une part notable, dans le gouvernement du monde" (Cournot, 1843, p.83).

Además Cournot enfatiza que, si bien en el lenguaje coloquial se suele usar la expresión azar cuando se está frente a sucesos raros o poco frecuentes, esta no es la condición intrínseca del azar. Lo raro o sorprendente no es la manifestación del azar, porque "le hasard les amène, entre beaucoup d'autres auxquels donneraient lieu des combinaisons différentes, qu'ils sont rares; et c'est parce qu'ils sont rares, qu'ils nous surprennent" (Cournot, 1843, p.76). El azar trae consigo muchas combinaciones posibles, algunas de las cuales pueden parecernos inusuales, pero también desencadena aquellas que nos resultan habituales o comunes.

En relación a lo aleatorio, este está sujeto o deviene de la variabilidad. Esta última puede o no tener un comportamiento conocido. Cournot definió un evento aleatorio como una intersección de dos o más cadenas independientes determinadas por otros eventos, es decir "les événements amenés par la combinaison ou la rencontre de phénomènes qui appartiennent à des séries indépendantes, dans l'ordre de la casualité, sont ce qu'on nomme des événements *fortuits* ou des résultats du *hasard*" (Cournot, 1843, p.73).

En los eventos aleatorios Cournot reconoce la factibilidad del cálculo de probabilidades para los estados posibles de acuerdo a la teoría matemática de las combinaciones, debido a la presencia de variaciones proporcionales. Cournot, considera, por ejemplo, el evento aleatorio resultante de realizar una serie de experimentos independientes e idénticos, cada uno de los cuales con dos resultados posibles. En este tipo de experimentos, lo aleatorio expresa una regularidad en la distribución cuando el experimento se repite una gran cantidad de veces. Supongamos que los eventos A', A'', \dots, A^n son repeticiones del evento A y B', B'', \dots, B^n son repeticiones del evento B . Si se asume que las probabilidades p y q de los eventos A y B respectivamente, permanecen invariantes durante el proceso, entonces para m intentos, el producto $(p + q)(p' + q')(p'' + q'') \dots$ se convierte en $(p + q)^m$. Esta expresión es generalizada por Cournot a partir del uso del binomio de Newton, como se puede apreciar en la Figura 1.

$$(p + q)^m = p^m + \frac{m}{1} \cdot p^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} p^{m-2}q^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-n)} p^n q^{m-n} + \dots + q^m \cdot m$$

Figura 1. Uso del binomio de Newton para describir la probabilidad binomial, en Cournot (1843, p.47).

La suma de los términos del binomio hasta e incluyendo su término general expresa la probabilidad de que el suceso de probabilidad p llegue a ocurrir al menos n veces y que el suceso contrario no ocurra más de $m - n$ veces. De esta manera, la aleatoriedad, aunque consecuencia ostensible del azar, no está exenta de una regulación y la forma de su variabilidad puede ser descrita mediante una ley general.

■ Lo subjetivo y lo objetivo como unidad

Con base a lo anterior, Cournot se atreve a poner en discusión si la probabilidad se aplica a los acontecimientos mismos o a los juicios que hacemos sobre esos acontecimientos. Los capítulos 1, 2, 3 y 8 de la obra tratan explícitamente el tema de la significación objetiva y la interpretación subjetiva de la probabilidad.

Una vez que se admite la existencia efectiva de fenómenos aleatorios y, en consecuencia, se desestima la hipótesis del determinismo completo y universal, se puede aseverar que la probabilidad tiene una significación objetiva. Ahora bien, toda vez que se realiza un juicio probabilístico sin indagar si la estructura que lo sustenta existe o no, estamos frente a una concepción subjetiva de la probabilidad. Esto se debe a que, en la ruta matemática de las probabilidades, el acto de comparar, evaluar o medir las posibilidades de los eventos no conlleva una certeza absoluta ni en términos físicos ni en términos metafísicos. De esta manera, para Cournot la concepción subjetiva de la probabilidad se legitima debido a que el uso estricto de su valor teórico sólo es posible bajo condiciones muy restrictivas y poco comunes en sucesos producidos por combinaciones de causas independientes.

... et qui se rectifient dès qu'on a présente à l'esprit la distinction fondamentale entre les probabilités qui ont une existence objective, qui donnent la mesure de la possibilité des choses, et les probabilités subjectives, relatives en partie à nos connaissances, en partie à notre ignorance, variables d'une intelligence à une autre, selon leurs capacité et les données qui leur sont fournies (Cournot, 1843, p.155).

La probabilidad subjetiva no remite al uso de sensaciones psicológicas para hacer vaticinios, sino que corresponde y refleja la cualidad intrínseca del azar. No se pueden hacer más que estimaciones de la posibilidad de ocurrencia de sucesos venideros cuando no se conocen todas las causas y condiciones que rigen su acontecer, no conocer tales causas es lo que nos lleva inevitablemente a considerar el estudio de las probabilidades.

En consecuencia, por una parte, para Cournot es mucho más conflictivo establecer que la probabilidad puede medir efectivamente la posibilidad de ocurrencia de un suceso que asumir su carácter subjetivo y, por otra, es indispensable admitir que la probabilidad no es sólo una representación hecha por el sujeto, que varía según el grado de conocimiento de este, sino la medición de una realidad efectiva, una cuya esencia no puede ser alcanzada mediante certeza absoluta. En su explicación no se remite a señalar bajo qué condiciones el concepto de probabilidad puede efectivamente medir una realidad fenoménica y, en consecuencia, imputarse un valor objetivo, sino que construye su visión desde una epistemología de la realidad que admite la cohabitación entre objetividad y subjetividad en la forma en que conocemos e intervenimos en nuestro mundo.

■ El principio de imposibilidad física

Cournot recurre al principio de imposibilidad física para facilitar la exposición de su teoría del azar. Los ejemplos incluyen situaciones tales como intentar equilibrar un cono por su vértice extremo o lograr que una determinada medida se ajuste rigurosamente a la norma. Dichos acontecimientos son de la misma naturaleza: se caracterizan no porque su probabilidad de ocurrencia sea muy baja, sino más bien por el hecho de que sólo tienen una oportunidad en favor para su realización frente a un infinito número de posibilidades en contra. Cournot lo metaforiza a partir de la extracción ciega de una bola blanca desde una urna que solo tiene una bola blanca e infinitas bolas negras. Así, un evento físicamente imposible no es lo mismo que un evento probabilísticamente imposible. Una cosa físicamente imposible puede ser concebida como matemáticamente o metafísicamente posible, aunque en los hechos nunca suceda.

La probabilité mathématique n'est plus un simple rapport abstrait, tenant au point de vue de notre esprit, mais l'expression d'un rapport que la nature même des choses maintient, et que l'observation manifeste, lorsque, sous l'influence de causes indépendantes qui se combinent fortuitement, les épreuves des mêmes hasards se multiplient indéfiniment, comme cela arrive sans cesse dans l'ordre des phénomènes naturels et des faits sociaux (Cournot, 1843, p.155).

Esta forma de concebir lo posible y lo imposible en la realidad, proporciona una mayor comprensión del valor objetivo-subjetivo de la probabilidad, pues conjuga la noción general de la independencia de las causas y la multiplicidad infinita de posibles combinaciones con la noción empírica de nuestra percepción material del mundo.

■ Discusión y Conclusiones

Las nociones de azar y probabilidad son reivindicadas desde la dimensión epistemológica que nos proporciona la obra de Cournot. Los usos, significados y constructos asociados a la probabilidad pueden enriquecerse si se realiza la toma de decisiones y el valor del contexto. Lo fundamental, por ejemplo, en la noción de azar de Cournot es la idea de la independencia o la falta de solidaridad entre las distintas series de hechos o causas. Al contrario de lo que se creía en la época, y tal vez aún en nuestros días, para Cournot el azar no es la ausencia de causas sino la imbricación de esta; su huella predomina en todo lo que nos rodea.

Por otra parte, la visión de Cournot nos permite concebir a la probabilidad no como un abanico multifacético que eventualmente despliega distintas interpretaciones (frecuentista, bayesiana, laplaciana, intuitiva, etc.), sino como una unidad viva que es inherentemente objetiva y subjetiva a la vez, y no por ello menos válida o científica. Esto va más allá de lo que sugieren algunos autores (Torres y Parra, 2013; Carranza y Fuentealba, 2010; Rodríguez y Agnelli, 2009; Díaz y Batanero, 2006) en relación a atender los distintos significados de la probabilidad para mejorar su comprensión, pues la concepción de la probabilidad por sí misma no es el fin último. La probabilidad no es más que uno de los muchos aparejos epistemológicos que tenemos los seres humanos para realizar el constante acto de conocer.

En los albores de la matematización de fenómenos no determinísticos Cournot nos enseña que la expectativa no es hacer calzar forzosamente la realidad a la teoría matemática sino más bien aproximarse

modestamente mediante esta última a la elaboración de una racionalidad funcional. De este modo, como señalan Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) el significado deviene del uso situado que se le otorgue a los objetos y procesos de acuerdo a las actividades y situaciones en las que nos vemos involucrados.

La epistemología de la probabilidad sustentada en la obra que analizamos, consideramos refleja el principio de relatividad epistemológica de la Socioepistemología (Cantoral, 2013), puesto que denota claramente que la validez de nuestro pensamiento matemático no recae *per se* en mediciones absolutas y abstractas, sino que en la experiencia de una relación que existe entre las cosas mismas.

La restitución de estos usos y caracterizaciones de la probabilidad podría encausar el discurso matemático escolar hacia el desarrollo de una epistemología de prácticas asociadas a la toma de decisiones, y de este modo propiciar la resignificación de la probabilidad y sus nociones subsecuentes.

■ Referencias bibliográficas

- Calzi, M. L., & Basile, A. (2004). Economists and Mathematics from 1494 to 1969. *Beyond the Art of Accounting*. Mathematics and Culture I, 95-107.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. Estudios sobre construcción social del conocimiento. México: Editorial Gidesa.
- Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 5-17.
- Cournot, A. (1843) *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Librairie de L. Hachette, Paris.
- Gigerenzer, G., & Gaissmaier, W. (2011). Heuristic decision making. *Annual review of psychology*, 62, 451-482.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 263-291.
- Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology*. London: Sage Publications.
- Kruglanski, A. W., & Gigerenzer, G. (2011). Intuitive and deliberate judgments are based on common principles. *Psychological review*, 118(1), 97.
- Martin, T. (2007). Cournot ' probabilistic epistemology. En J.P. Touffut (Ed.), *Augustin Cournot: Modelling Economics* (pp. 1-7). Massachusetts: Edward Elgar Publishing Limited.
- Martin, T., & Touffut, J.P. (2007). Introduction. En J.P. Touffut (Ed.), *Augustin Cournot: Modelling Economics* (pp. 1-7). Massachusetts: Edward Elgar Publishing Limited.
- Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International statistical review*, 65(2), 123-137.

Nilsson, P. (2007). Different ways in which students handle chance encounters in the explorative setting of a dice game. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 293-315.

OCDE (2013). *El programa PISA de la OCDE: Qué es y para qué sirve*. Disponible en <https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf>

Todd, P. M., & Gigerenzer, G. (2012). *Ecological rationality: Intelligence in the world*. USA: Oxford University Press.